جامعة ديالى

كلية التربية المقداد

المادة : معادلات تفاضلية جزئية

المرحلة : الثالثة

اعداد

م. وفاء فايق غيدان

المقدمة...

تتكون المجموعة الاولى من الفصل الاول :-

أولاً) تعريف المعادلة التفاضلية الجزئية .

ثانياً) الفرق بين المعادلة التفاضلية الجزئية والمعادلة التفاضلية الاعتيادية.

ثالثاً) رتبة ودرجة المعادلة التفاضلية الجزئية.

رابعاً) تصنيف المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية وغير الخطية.

خامساً) تصنيف المعادلات التفاضلية الجزئية المتجانسة وغير المتجانسة.

سادساً) هل أن ~~للمعادلة التفاضلية الجزئية حلاً~~ في علاقة معينة ام لا ؟

أولاً) تعريف المعادلة التفاضلية الجزئية :-

هي معادلة تتضمن دالة (متغير معتمد) ذات متغيرين أو أكثر من المتغيرات المستقلة . ويرمز لها بالرمز (∂) أي بارشل partial .

كما في المثال $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$

حيث أن z متغير معتمد و x,y هما متغيران مستقلان .

$p=\frac{\partial z}{\partial x}$ ، $q=\frac{\partial z}{\partial y}$ ، $r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ ، $s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ ، $t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ تحفظ مهمة جداً

ثانياً) الفرق بين المعادلة التفاضلية الجزئية والمعادلة التفاضلية الاعتيادية

١- في المعادلة التفاضلية الاعتيادية يكون لدينا متغير مستقل واحد بينما في المعادلة التفاضلية الجزئية يكون لدينا أكثر من متغير مستقل واحد.

٢- في المعادلة التفاضلية الاعتيادية تظهر لدينا ثوابت إختيارية بينما في المعادلة التفاضلية الجزئية تظهر لدينا دوال إختيارية

٣- رمز المشتقة في المعادلة التفاضلية الاعتيادية (d)
رمز المشتقة في المعادلة التفاضلية الجزئية (∂)

ثالثاً) رتبة ودرجة المعادلة التفاضلية الجزئية.

الرتبة :- هي أعلى مشتقة تظهر في المعادلة التفاضلية الجزئية.

الدرجة :- هي أس أعلى مشتقة تظهر في المعادلة التفاضلية الجزئية.

أمثلة محلولة :- حدد رتبة ودرجة المعادلات التفاضلية الجزئية

① $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=z^2$

الدرجة الاولى
الرتبة الاولى

② $2p+3q=2x$

$p=\frac{\partial z}{\partial x},\ q=\frac{\partial z}{\partial y}$ علماً ان

الرتبة الاولى
الدرجة الاولى

③ $x\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^3-y\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}\right)^2=6x\frac{\partial z}{\partial x}$

الرتبة الثالثة
الدرجة الثانية

④ $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^4+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^2-y=0$

الرتبة الثانية
الدرجة الرابعة

⑤ $u_{xx}-u_t=0$

الرتبة الثانية
الدرجة الاولى

ملاحظة/ أما الجذور والكسور فلا نستطيع أن نجد الرتبة والدرجة لها إلا بعد التخلص منها لكي نستطيع تحديدها. كما في المثال التالي.

$u_x\sqrt{2x+4}=3y$ بتربيع الطرفين

$(u_x)^2(2x+4)=9y^2$

∴ الرتبة الاولى
الدرجة الثانية

رابعاً) تصنيف المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية وغير الخطية.

تُسمى المعادلة التفاضلية الجزئية خطية إذا كان مجموع أُسس المتغير المعتمد (Z) ومشتقاته في كل حد من الحدود لا يزيد عن الواحد

✱ شروط الخطية

1) يجب أن تكون درجة المشتقة تساوي واحد.

2) اذا كانت الدالة مشتركة فأن معامل المشتقة هي متغيرات مستقلة للمتغير المعتمد

أمثلة محلولة / حدد أيهما معادلة خطية وأيهما غير خطية:

① $U_x + U_y = 0 \Rightarrow$ خطية

② $uU_t + xU_x = Z \Rightarrow$ غير خطية. لان معامل المشتقة ليس متغير مستقل

③ $U_x + \sqrt{u} = x \Rightarrow$ غير خطية. لان $u^{1/2 \neq 1}$

④ $U_{rr} + U_r + U_{\theta\theta} = 0 \Rightarrow$ خطية

⑤ $\frac{\partial^3 Z}{\partial x^3} + 4x\frac{\partial^3 Z}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + y\frac{\partial Z}{\partial y} = e^x \Rightarrow$ خطية

خامساً) تصنيف المعادلات التفاضلية الجزئية المتجانسة وغير المتجانسة الحدود

تُسمى المعادلة التفاضلية الجزئية مُتجانسة إذا كانت كل المشتقات الجزئية من نفس الجنس.

الشرط الاساسي للتجانس :- هو أن جميع المشتقات الموجودة في المعادلة من نفس الرتبة (أي من نفس الجنس) . ولذلك سميت بالمتجانسة .

** أمثلة محلولة : ميّز المعادلات التفاضلية الجزئية المتجانسة من غير المتجانسة .

① $U_t = 4U_{xx} \Rightarrow$ غير مُتجانسة الحدود

② $U_{xx} + 3U_{yy} = 0 \Rightarrow$ مُتجانسة الحدود

③ $\dfrac{\partial^2 Z}{\partial x^2} - x\dfrac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = 0 \Rightarrow$ مُتجانسة

④ $U_{xy} - 2U_{xx} + 2U_{yy} = x + 3y$ غير مُتجانسة ولكنها متجانسة الحدود

⑤ $(D^2 + 2DD' + D'^2)Z = 0$ مُتجانسة ومتجانسة الحدود

رابعاً) الواجب البيتي Hw

بين أيهما معادلة تفاضلية خطية وأيهما غير خطية.

① $U_{tt} = e^{-t} U_{xx} + \sin t$

② $xp + yq = 3Z$

③ $px + qy - Z + p^2 - pq + q^3 = 0$

④ $\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2 - 5xZ = 0$

⑤ $x U_{xx} + y U_y + U^2 = 0$

ثالثاً) الواجب البيتي Hw

حدد رتبة ودرجة كل من المعادلات التفاضلية الجزئية

① $U_x - U_y = 0$

② $\tan x \frac{\partial Z}{\partial x} + \tan y \frac{\partial Z}{\partial y} = \tan z$

③ $p^2 + q^2 = 3$

④ $x^2 \frac{\partial Z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial Z}{\partial y} = Z^2$

⑤ $x\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^5 + y\left(\frac{\partial^3 U}{\partial y}\right)^2 = 5x \frac{\partial Z}{\partial x}$

خامساً) الواجب البيتي Hw

ميّز المعادلات التفاضلية الجزئية المتجانسة من المعادلات التفاضلية الجزئية غير المتجانسة.

① $x^2\dfrac{\partial Z}{\partial x}+\dfrac{\partial Z}{\partial y}=0$

② $p+q=1$

③ $(3D^2+4D'+5)Z=0$

④ $p^2+pq=15$

⑤ $U_{xx}+U_y=0$

⑥ $U_t+U_{xt}=5$

⑦ $(D^2-D'^2)Z=0$

⑧ $(D^2-DD')Z=0$

Ali T. Fadel
21/11/2016

سادساً) هل للمعادلة التفاضلية الجزئية حل في علاقة معينة أم لا ؟

***
***
***

إذا طلب في السؤال (بين أن , هل أن) علاقة معينة (معادلة معينة) حلاً للمعادلة التفاضلية الجزئية
نشتق العلاقة المعطاة بقدر عدد مشتقات الجزئية الموجودة في المعادلة التفاضلية الجزئية ثم نعوض المعادلات التي حصلنا عليها بعد الاشتقاق وهي التي تولدت من العلاقة الاصلية نعوضها في المعادلة التفاضلية .
عندما يكون الطرف الايمن مساوي للطرف الايسر هذا يعني ان العلاقة تحقق المعادلة التفاضلية الجزئية
أما اذا الطرف الايمن لا يساوي الطرف الايسر . فان العلاقة لا تحقق المعادلة التفاضلية الجزئية .

** أما في حالة طلب في السؤال (برهن أنّ ، إثبت أنّ) علاقة معينة حلاً للمعادلة التفاضلية الجزئية.
يعني ١٠٠٪ تتحقق

ملاحظة/ إذا الطرف الايمن يساوي الطرف الايسر فأنَّ المعادلة تتحقق
$(L.H.S = R.H.S)$

أما إذا كان الطرف الايمن لايساوي الطرف الايسر فأنَّ المعادلة لا تتحقق
$(L.H.S \neq R.H.S)$

مثال١/ هل أن العلاقة $U(x,t) = e^{-4t}\sin x$ تمثل حلاً للمعادلة التفاضلية الجزئية
$U_t = 4U_{xx}$

Solution الحل /

نأخذ الطرف الايسر من المعادلة التفاضلية الجزئية

$L.H.s \longrightarrow U_t = -4e^{-4t}\sin x$

الان نأخذ الطرف الايمن من المعادلة التفاضلية الجزئية

$R.H.S \longrightarrow 4U_{xx}$

$$U_x = e^{-4t}\cos x$$

$$U_{xx} = -e^{-4t}\sin x$$

$\therefore R.H.s \longrightarrow 4U_{xx} = -4e^{-4t}\sin x$

بما أن الطرف الايمن يساوي الطرف الايسر

$$-4e^{-4t}\sin x = -4e^{-4t}\sin x$$

$\therefore L.H.S = R.H.S$

وعليه فأن العلاقة $U(x,t) = e^{-4t}\sin x$ تمثل

حلاً للمعادلة التفاضلية الجزئية $U_t = 4U_{xx}$

مثال / هل أن العلاقة $U(x,y) = \sin x \sin y + x^2$ يمثل حلاً للمعادلة التفاضلية الجزئية

$$U_{xx} = U_{yy} + x^2$$

الحل / Solution

نأخذ الطرف الايسر للمعادلة التفاضلية الجزئية

$$L.H.S \longrightarrow U_{xx}$$

$$U_x = \cos x \sin y + 2x$$

$$U_{xx} = -\sin x \sin y + 2$$

الان نأخذ الطرف الايمن للمعادلة التفاضلية الجزئية

$$R.H.S \longrightarrow U_{yy} + x^2$$

$$U_y = \sin x \cos y + 0$$

$$U_{yy} = -\sin x \sin y$$

$$\therefore R.H.S \longrightarrow U_{yy} + x^2 = -\sin x \sin y + x^2$$

بما أن الطرف الايمن لا يساوي الطرف الايسر

$$U_{xx} \neq U_{yy} + x^2$$

$$-\sin x \sin y + 2 \neq -\sin x \sin y + x^2$$

$$\therefore L.H.S \neq R.H.S$$

وعليه فأن العلاقة لا تمثل حلاً للمعادلة التفاضلية ...

سادساً) الواجب البيتي HW

① بين أنّ العلاقة $U(x,y)=xy$ تمثل حلاً للمعادلة التفاضلية الجزئية $xU_x-yU_y=0$

② هل أنّ $f(x,y,z)=xe^y+ye^z+ze^x$ تمثل حلاً للمعادلة التفاضلية الجزئية
$$f_x+f_y+f_z=2e^x+e^z+xe^y$$

③ إثبت أنّ $Z(x,y)=y^2e^x+y$ تمثل حلاً للمعادلة التفاضلية الجزئية $2y^{-1}Z_{xx}+yZ_{yy}=4ye^x$

④ برهن أنّ العلاقة $U(x,y)=xy$ تمثل حلاً للمعادلة التفاضلية الجزئية $U(x,y)=x^2y^2$

⑤ هل أنّ العلاقة $U(x,t)=\sin(x-ct)$ تمثل حلاً للمعادلة التفاضلية الجزئية
$$\frac{\partial^2U}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2U}{\partial x^2}$$

⑥ هل أنَّ العلاقة $V(x,y) = ax + by + ab$ تمثل حلاً للمعادلة التفاضلية الجزئية

$$V_x + V_y = 2ab$$

⑦ هل أنَّ العلاقة $U(x,y) = ax + \frac{y}{a}$ تمثل حلاً للمعادلة التفاضلية الجزئية

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} = a$$

⑧ برهن أنَّ العلاقة $W(x,y) = \cos(x+y) + \sin(x-y)$ تمثل حلاً للمعادلة التفاضلية الجزئية

$$W_{xx} = W_{yy}$$

⑨ بين أنَّ العلاقة $V(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$ تمثل حلاً للمعادلة التفاضلية الجزئية

$$V_{xx} + V_{yy} + V_{zz} = 0$$

(١٠) برهن أنَّ العلاقة $U(x,y)=\sin xy$ تُمثل حلاً للمعادلة التفاضلية الجزئية

$$xU_x - yU_y = 0$$

(١١) هل أنَّ العلاقة $f(c,r)=5c^2r^2+cr+3$ تُمثل حلاً للمعادلة التفاضلية الجزئية

$$0.5 f_{cc} + \frac{1}{0.5} f_{rr} = 5(r^2+4c^2)$$

(١٢) إثبت أنَّ العلاقة $Z(a,b)=2xa^2+3yb^2+4a+2b$ تُمثل حلاً للمعادلة التفاضلية الجزئية

$$Z_{aa} = 2(2x+3y) - Z_{bb}$$

Ali T. Fadel

21/11/2016

(الفصل الاول)

المقدمة ...

تتكون المجموعة الثانية من الفصل الاول :-

سابعاً) تكوين المعادلة التفاضلية الجزئية (طريقة حذف الثوابت الاختيارية)

ثامناً) تكوين المعادلة التفاضلية الجزئية (طريقة حذف الدوال الاختيارية)

الحالة الاولى :- تكوين المعادلة التفاضلية الجزئية عندما تحتوي المعادلة على دالة إختيارية واحدة (غير مشتركة)

الحالة الثانية :- تكوين المعادلة التفاضلية الجزئية عندما تحتوي المعادلة على دالة إختيارية واحدة (مشتركة).

الحالة الثالثة :- تكوين المعادلة التفاضلية الجزئية عندما تحتوي المعادلة على دالتين إختياريتين (غير مشتركة)

الحالة الرابعة :- تكوين المعادلة التفاضلية الجزئية عندما تحتوي المعادلة على دالتين إختياريتين (مشتركة)

تاسعاً) حل المعادلات التفاضلية الجزئية بالتكامل المباشر

سابعاً) تكوين المعادلة التفاضلية الجزئية (طريقة حذف الثوابت الاختيارية)

*** لنفرض Z دالة في المتغيرين المستقلين x و y ومعرفة بالعلاقة $f(x, y, Z, a, b) = 0$

علماً أنّ a, b هما ثابتان إختياريان.

وبأشتقاق العلاقة $f(x,y,z,a,b)=0$ جزئياً بالنسبة لـ x ولـ y نحصل على

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$=\frac{\partial f}{\partial x}+p\cdot\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$=\frac{\partial f}{\partial x}+p\frac{\partial f}{\partial z}=0 \quad \text{-----} (*)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$=\frac{\partial f}{\partial y}+q\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$=\frac{\partial f}{\partial y}+q\frac{\partial f}{\partial z}=0 \quad \text{-----} (**)$$

حيث يمكن حذف الثابتين a,b من العلاقة (*) و (**) فنحصل على معادلة تفاضلية جزئية من الرتبة الاولى .

الخلاصة // نشتق العلاقة (المعادلة المعطاة في السؤال) التي تحتوي على ثوابت . نشتقها بقدر عدد الثوابت الموجودة . إشتقاقاً جزئياً .

مثال / إحذف الثابتين الاختياريين a, b

$$Z = ax^2 + by^2 + ab$$

الحل / Solution

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = 2ax + 0 + 0 \Rightarrow \frac{\partial Z}{\partial x} = 2ax$$

$$\Rightarrow p = 2ax$$

$$\Rightarrow \boxed{\therefore a = \frac{p}{2x}} \text{-----} (*)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = 0 + 2by + 0 \Rightarrow \frac{\partial Z}{\partial y} = 2by$$

$$\Rightarrow q = 2by$$

$$\Rightarrow \boxed{\therefore b = \frac{q}{2y}} \text{-----} (**)$$

الآن نعوض (*) و (**) في المعادلة الاصلية

$$Z = \frac{p}{2\cancel{x}} x^{\cancel{2}} + \frac{q}{2y} y^2 + \left(\frac{p}{2x}\right)\left(\frac{q}{2y}\right)$$

$$\boxed{Z = 1/2\, px + 1/2\, qy + pq/4xy}$$ Solution

سابعاً) الواجب البيتي Hw

كون المعادلات التفاضلية الجزئية الاتية :-

① $Z = ax + ay$

② $Z = x^2y^2 + x^2b + ay^2 + ab$

③ $Z = (x-a)^2 + (y-b)^2$

④ $Z = Ax + By + c$

⑤ $Z = Ax + y$

⑥ $Z = Ax^2 + Ay + c$

⑦ $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} + \frac{z}{c} = 1$

⑧ أوجد المعادلة التفاضلية لكرة نصف قطرها (1) ومركزها $(x_0, y_0, 0)$ أي $z_0 = 0$

ثامناً) تكوين المعادلة التفاضلية الجزئية (طريقة حذف الدوال الاختيارية).

الحالة الاولى :- تكوين المعادلة التفاضلية الجزئية وتحتوي المعادلة على دالة اختيارية واحدة (غير مشتركة).
أي بالصيغة التالية $f(x)$ أو $g(y)$.

✳✳✳ عندما يطلب في السؤال (كون) أو (جد) المعادلة التفاضلية الجزئية ومعطى في السؤال دالة واحدة فقط. مثل $f(x)\ ,\ g(y)$.
نتبع الخطوات التالية :-

١) المعادلة المعطاة في السؤال نسميها معادلة رقم ①

٢) نشتق المعادلة المعطاة في السؤال مرة واحدة فقط وحسب السؤال.

أ) يعني عندما يعطي في السؤال $f(x)$ مثلاً نشتق بالنسبة لـ y.

ب) وعندما يعطي في السؤال $f(y)$ مثلاً نشتق بالنسبة لـ x.

ونسميها معادلة رقم ②

٣) من معادلة ② نحاول أن نجري عمليات جبرية

الغاية منها أن نجد $f(x)=?$ أو $?=f(y)$ ونسميها معادلة رقم ③ . كما في الشكل

$f(x) =$ طرف ايمن معادلة معينة ------- ③

أو

$f(y) =$ طرف ايمن معادلة معينة ------ ③

٤) الان نعوض معادلة رقم ③ في معادلة رقم ① . أي المعادلة المعطاة في السؤال
الغاية من ذلك التخلص من الدالة الاختيارية $f(x)$ أو $f(y)$

٥) نجري عمليات حسابية الغاية من ذلك وضع المتغير المعتمد والمشتقات الجزئية في جهة مثل الـ u و $\frac{\partial u}{\partial x}$ و $\frac{\partial u}{\partial y}$
والمتغيرات المستقلة في جهة أخرى
مثل الـ x و y

*** ملاحظة ***
وللتأكد من صحة الحل . نعوض معادلة المتغير المعتمد وهي معادلة رقم ① و المشتقة الجزئية معادلة رقم ② في الحل الذي حصلنا عليه . يجب أن نحصل على الطرف الايمن من الحل .

مثال/ كوّن المعادلة التفاضلية الجزئية

$$U = y^2 f(x) - 3x + 4y$$

الحل/ Solution

$$U = y^2 f(x) - 3X + 4y \;----\; (1)$$

(١) المعادلة الاصلية نسميها معادلة رقم (1)

(٢) نشتق المعادلة (1) مرة واحدة بالنسبة لـ y

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2y f(x) - 0 + 4$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2y f(x) + 4 \;----\; (2)$$

(٣) من معادلة رقم (2) نجد f(x) = ? ونسميها معادلة رقم (3)

$$\frac{\partial u}{\partial y} - 4 = 2y f(x) \quad / \div 2y$$

$$\frac{1}{2y}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{\underset{1}{\cancel{2y}}} = \frac{\overset{1}{\cancel{2y}}}{\underset{1}{\cancel{2y}}} f(x)$$

$$\frac{1}{2y}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{2}{y} = f(x) \;-----\; (3)$$

(٤) نعوض معادلة رقم (3) في معادلة رقم (1)

$$U = y^2 f(x) - 3X + 4y \;-----\; (1)$$

$$U = y^2\left[\frac{1}{2y}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{2}{y}\right] - 3X + 4y$$

$$U = \frac{y^2}{2y}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{2y^2}{y} - 3x + 4y$$

$$U = \frac{y}{2}\frac{\partial u}{\partial y} - 2y - 3x + 4y$$

$$U = \frac{y}{2}\frac{\partial u}{\partial y} - 3x + 2y$$ (بضرب طرفي المعادلة في 2)

$$2U = y\frac{\partial u}{\partial y} - 6x + 4y \Rightarrow 2U - y\frac{\partial u}{\partial y} = -6x + 4y$$

$$\boxed{2U - y\frac{\partial u}{\partial y} = -6x + 4y}$$ المعادلة المطلوبة

** وللتأكيد من صحة الحل نعوض معادلة رقم (1) ومعادلة رقم (2) في الحل (المعادلة المطلوبة)

$$2U - y\frac{\partial u}{\partial y} = -6x + 4y$$

$$2\left[y^2 f(x) - 3x + 4y\right] - y\left[2y f(x) + 4\right] = -6x + 4y$$

$$\cancel{2y^2 f(x)} - 6x + 8y - \cancel{2y^2 f(x)} - 4y = -6x + 4y$$

$$-6x + 4y = -6x + 4y$$

ثامناً) الحالة الاولى

الواجب البيتي HW

جد الحل للمعادلات التفاضلية الجزئية الاتية:-

① $Z = x^4 f(y) + 8x - 6y$

② $U - x^2 f(y) - 4x + 3y = 0$

③ $Z - g(y)x = x^2$

④ $c = \dfrac{U}{\frac{3f(t)}{c^{1}} + \frac{1}{\frac{1}{2}}}$

⑤ $\ln x = \dfrac{Z - 3x}{f(y)}$

⑥ $V = e^{t} f(c) + 2c^2 + 3e^{c}$

⑦ $W - \cos x = f(y) \sin x$

⑧ $U = f(x) \sin y \tan y \cot y + 3\cos x$

ثامناً) تكوين المُعادلة التفاضلية الجزئية (طريقة حذف الدوال الاختيارية).

الحالة الثانية :- تكوين المعادلة التفاضلية الجزئية عندما تحتوي المعادلة على دالة إختيارية واحدة مُشتركة أي بالصيغة $f(xy)$ أو $f(x-y)$. وهكذا .....

** * عندما يطلب في السؤال (كوّن) أو (جد) المعادلة التفاضلية الجزئية ومعطى في السؤال دالة إختيارية **مشتركة** نتبع الخطوات التالية :-

أولاً :-

١) نشتق المعادلة المعطاة في السؤال مرة واحدة بالنسبة لـ x. (كون المتغير x يعتبر متغير مستقل أول).

٢) نعوض بدل $\frac{\partial u}{\partial x}$ الى p

٣) نجري عمليات جبرية الغاية منها جعل الدالة المشتقة $f'(x-y)$ مثلاً. في جهة. وجعل الباقي في جهة أخرى ونسميها معادلة رقم ①

$f'(x-y) = ? \; ---- ①$

ثانياً:-

١) نشتق المعادلة المعطاة في السؤال مرة واحدة بالنسبة لـ y . (كون المتغير y يعتبر متغير مستقل ثاني) .

٢) نعوض بدل $\frac{\partial u}{\partial y}$ الـ q

٣) نجري عمليات جبرية الغاية منها جعل الدالة المشتقة $f'(x-y)$ مثلاً . في جهه . وجعل الباقي في جهه أخرى ونسميها معادلة رقم ②

$$f'(x-y) = ? \quad ---- ②$$

ثالثاً:-

بقسمة معادلة رقم ① على معادلة رقم ② ثم نجري عمليات جبرية ونختصر ونبسط وبهذا نحصل على الحل للمعادلة المطلوبة وتكون خالية من الدالة الاختيارية المشتركة .

وبتعبير آخر

نعوض معادلة رقم ① في معادلة رقم ② ثم نجري عمليات حسابية . حتى نحصل على الحل ويكون خالي من الدالة الاختيارية .

مثال/ جد المعادلة التفاضلية الجزئية $Z=f(x^2+y^2)$

الحل/ Solution

اولاً:- ١) نشتق بالنسبة لـ x

$$\frac{\partial Z}{\partial x}=f'(x^2+y^2).2x$$

٢) نعوض بدل $\frac{\partial z}{\partial x}$ الى P

$$P=2x\,f'(x^2+y^2)$$

٣) نجري عمليات حسابية

$$\therefore f'(x^2+y^2)=\frac{P}{2x} \text{------} (1)$$

ثانياً:- ١) نشتق بالنسبة لـ y

$$\frac{\partial Z}{\partial y}=f'(x^2+y^2).2y$$

٢) نعوض بدل $\frac{\partial z}{\partial y}$ بـ q

$$q=2y\,f'(x^2+y^2)$$

٣) نجري عمليات حسابية

$$\therefore f'(x^2+y^2)=\frac{q}{2y} \text{------} (2)$$

ثالثاً:- نعوض معادلة (1) في (2) نحصل على

$$\frac{P}{\cancel{2}x}=\frac{q}{\cancel{2}y} \Rightarrow Py=qx \Rightarrow Py-qx=0$$

$$\overset{or}{\Rightarrow} y\frac{\partial Z}{\partial x}-x\frac{\partial Z}{\partial y}=0$$

المعادلة التفاضلية الجزئية

ثامناً) الحالة الثانية :-

الواجب البيتي Hw

كوّن المعادلات التفاضلية الجزئية الاتية :-

① $Z = xy + f(x^2 + y^2 + Z^2)$

② $x^2 + y^2 + Z^2 = f(Lx + my + nZ)$

③ $Z = x^2 + 2\,g(y' + \ln x)$

④ $\phi(x + y + Z) - x^2 - y^2 - Z^2 = 0$

⑤ $Z = x^2\,\phi(x - y)$

⑥ $xyZ = \phi(x + y + Z)$

⑦ $Z = f(3x - 4y)$

⑧ $\dfrac{Z}{x^2} = \phi(x - y)$

⑨ $U = \sin x \sin y + f(\tan x + \cot y)$

⑩ $W = \ln x + \phi(e^{2y} + \cos x)$

[redacted]/2016

ثامناً) تكوين المعادلة التفاضلية الجزئية (طريقة حذف الدوال الاختيارية).

الحالة الثالثة :- تكوين المعادلة التفاضلية الجزئية عندما تحتوي المعادلة على دالتين إختياريين .(غير مشتركة).
أي بالصيغة $G(y)$ و $f(x)$.

*** عندما يطلب في السؤال (كوّن) أو (جد) المعادلة التفاضلية الجزئية ومعطى في السؤال دالتين إختياريين (غير مشتركة) . أي بالصيغة $G(y)$ و $f(x)$.
نتبع الخطوات التالية :-

أولاً :- كما في الحالة الثانية من :

١) نشتق المعادلة المعطاة في السؤال مرة واحدة بالنسبة لـ x . (كون المتغير x يعتبر متغير مستقل أول).

٢) نعوض بدل $\frac{\partial u}{\partial x}$ بـ p

٣) نجري عمليات جبرية الغاية منها جعل الدالة المشتقة كما في مثل هذه الصورة $f'(x)$ جعلها في جهة وجعل الباقي في جهة أخرى . ونسميها معادلة رقم ①

$$f'(x) = ? \text{ ------- } ①$$

ثانياً :- كما في الحالة الثانية من

١) نشتق المعادلة المعطاة في السؤال مرة واحدة بالنسبة لـ y
(كون المتغير y يعتبر متغير مستقل ثاني).

٢) نعوض بدل $\frac{\partial u}{\partial y}$ بـ q

٣) نجري عمليات جبرية الغاية منها جعل الدالة المشتقة
كما في مثل هذه الصورة $G'(y)$ جعلها في جهة
وجعل الباقي في جهة أخرى. ونسميها معادلة رقم 2

$$G'(y) = ? \text{-----} (2)$$

ثالثاً :- نستخدم المشتقة الجزئية $S = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$
أي نشتق المعادلة الاصلية المعطاة في السؤال
مرتين متتاليتين.
المرة الاولى بالنسبة لـ x فنحصل على $\frac{\partial u}{\partial x}$
ثم نشتق المشتقة الاولى $\frac{\partial u}{\partial x}$. نشتقها بالنسبة لـ y
فنحصل على $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ وتسمى بالمشتقة الجزئية

ثم نعوض معادلة رقم ① ومعادلة رقم ② في المشتقة الجزئية $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ ونجري عمليات جبري عليها حتى نحصل على معادلة المشتقة الجزئية خالية من الدوال الاختيارية

مثال / كوّن المعادلة التفاضلية الجزئية

$$U = x f(y) + y G(x)$$

Solution

الحل /

أولاً: ① نشتق بالنسبة لـ x

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f(y) + y G'(x)$$

② نعوض بدل $\frac{\partial u}{\partial x}$ بـ p

$$p = f(y) + y G'(x)$$

③ نجري عمليات جبرية

$$p - f(y) = y G'(x)$$

$$\therefore G'(x) = \frac{p - f(y)}{y} \text{ ------ } ①$$

ثانياً: ① نشتق بالنسبة لـ y

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x f'(y) + G(x)$$

② نعوض بدل $\frac{\partial u}{\partial y}$ بـ q_h

$$q_h = x f'(y) + G(x)$$

③ نجري عمليات جبرية

$$\therefore f'(y) = \frac{q_h - G(x)}{x} \text{ ------ } ②$$

ثالثاً :- نجد بالمشتقة الجزئية $S=\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$

$$U = x f(y) + y G(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f(y) + y G'(x)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f'(y) + G'(x) \text{ ------} \circledast$$

الان نعوض معادلة ① و ② في معادلة ⊛

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{q - G(x)}{x} + \frac{P - f(y)}{y}$$

بضرب طرفي المعادلة في (xy)

$$xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \cancel{x}y\frac{[q - G(x)]}{\cancel{x}} + x\cancel{y}\frac{[P - f(y)]}{\cancel{y}}$$

$$xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = yq - \underline{y\,G(x)} + xP - \underline{x f(y)}$$

$$xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = yq + xP - [\underbrace{y\,G(x) + x f(y)}_{u}]$$

$$xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - yq - xP + u = 0 \Rightarrow xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} + u = 0$$ Solution

ثامناً) الحالة الثالثة.

الواجب البيتي HW

جد الحل للمعادلات التفاضلية الجزئية الاتية :

① $Z = e^{-y} f(x) + e^{x} G(y)$

② $U = G(y) \sin x + \phi(x) \cos y$

③ $V = x^2 g(y) + y^2 f(x)$

④ $W = \phi(x) \tan y + f(y) e^{x}$

⑤ $Z = f(y)\, x \ln x + \phi(x)\, y e^{y}$ ← إثرائي

⑥ $U = \phi(x) e^{-y} + x^2 f(y)$

[redacted]

ثامناً) تكوين المعادلة التفاضلية الجزئية (طريقة حذف الدوال الاختيارية).

الحالة الرابعة :- تكوين المعادلة التفاضلية الجزئية عندما تحتوي المعادلة على دالتين إختياريتين. (مشتركة).
أي بالصيغة $G(x+y)$ و $f(x-y)$ مثلاً.

** عندما يطلب في السؤال (كوّن) أو (جد) لمعادلة التفاضلية الجزئية ومعطى في السؤال دالتين إختياريتين (مشتركة). أي بالصيغة $G(x+y)$ و $f(x-y)$ نتبع الخطوات التالية

أولاً :-

١) نشتق المعادلة المعطاة في السؤال مرة واحدة بالنسبة لـ x.

٢) نعوض بدل $\frac{\partial u}{\partial x}$ بـ P

١

ثانياً :- ١) نشتق المعادلة المعطاة في السؤال مرة واحدة بالنسبة لـ y.

٢) نعوض بدل $\frac{\partial u}{\partial y}$ ب q_h .

ثالثاً :- ١) نجد $r = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} p$. نسميها معادلة ①

٢) نجد $S = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} q_h$. نسميها معادلة ②

رابعاً :- بتعويض معادلة ① في معادلة ② . والعكس صحيح نحصل على الحل .

مثال/ جد المعادلة التفاضلية الجزئية

$$Z = f(x+ay) + g(x-ay)$$

Solution الحل

اولاً :- ① نشتق بالنسبة الى x

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = f'(x+ay).(1) + g'(x-ay)$$

② نقلب $\frac{\partial Z}{\partial x}$ الى p

$$p = f'(x+ay) + g'(x-ay)$$

ثانياً :- م نشتق بالنسبة لـ y

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = f'(x+ay)\cdot(0+a) + g'(x-ay)\cdot(0-a)$$

② نعوض بدل $\frac{\partial Z}{\partial y}$ بـ q

$$q = a f'(x+ay) - a g'(x-ay)$$

ثالثاً :- ١) نجد $r=\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}$

$$r=\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}p = f''(x+ay) + g''(x-ay)$$

$$\therefore r = f''(x+ay)+g''(x-ay) \text{ -----} ①$$

٢) نجد $S=\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}$

$$S=\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}q = a^2 f''(x+ay) + a^2 g''(x-ay)$$

$$\therefore S = a^2[f''(x+ay)+g''(x-ay)] \text{ -----} ②$$

رابعاً :- بتعويض معادلة ① في ② نحصل

$$S = a^2[r]$$

$$\therefore \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = a^2\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} \Rightarrow \therefore \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} - a^2\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = 0$$

Solution

ثامناً) الحالة الرابعة

الواجب البيتي Hw

جد المعادلة التفاضلية الجزئية الآتية :-

① $Z = f(x+ct) + \phi(x-ct)$

② $U = \phi(x+y) + g(x+y)$

③ $W = f(2x+4y) - g(2x-4y)$

تاسعاً) حل المعادلات التفاضلية الجزئية بالتكامل المباشر

* بالامكان حل المعادلات التفاضلية الجزئية من خلال تكاملات متتالية في الحالات التي يكون فيها المتغير المعتمد موجود فقط في الاشتقاق الجزئي.

ملاحظة/ عند كل عملية تكامل نجريها نضيف دالة إختيارية وليس ثابت إختياري. لان هنا التكامل للمعادلات التفاضلية الجزئية وليس الاعتيادية، ويكون شكل الدالة الاختيارية كالتالي

① اذا كان التكامل بالنسبة لـ x نضيف الدالة الاختيارية $\phi(y)$

③ إذا كان التكامل بالنسبة لـ y نضيف الدالة الاختيارية $\phi(x)$.

مثال/ حل المعادلة $\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = \sin x$

الحل/ Solution

اولاً: نكامل بالنسبة لـ x . ونضيف الدالة الاختيارية $\phi(y)$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = -\cos x + \phi(y) \text{ - - - - - } ①$$

ثانياً: نكامل معادلة ① بالنسبة لـ y فنحصل على

$$Z = -y\cos x + y\,\phi(y) + \phi(x)$$

مثال/ حل المعادلة $\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = xy$

الحل/ Solution

أولاً: نكامل بالنسبة لـ x مرتين متتاليتين وفي كل مرة نضيف دالة اختيارية $\phi(y)$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{x^2 y}{2} + \phi(y)$$

$$Z = \frac{x^3}{6} y + x\,\phi(y) + \phi(y)$$

مثال٣/ حل المعادلة $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \cos y$

الحل

Solution

اولاً :- نكامل بالنسبة لـ y مرتين متتاليين ونضيف في كل عملية تكامل دالة اختيارية $\phi(x)$.

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \sin y + \phi(x)$$

$$U = -\cos y + y\,\phi(x) + \phi(x)$$

Solve equation

تاسعاً) الواجب البيتي Hw

جد الحل للمعادلات التفاضلية الجزئية التالية:-

① $\dfrac{\partial^2 y}{\partial r \partial s} = 0$

② $\dfrac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = a^2$

③ $\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \tan x$

④ $\dfrac{\partial^2 W}{\partial x \partial t} = e^{-t} \cos x$

⑤ $\dfrac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = 2y + 2x$

⑥ $\dfrac{\partial^3 Z}{\partial x \partial y^2} = 2a$

⑦ $\dfrac{\partial V}{\partial s} = 2x$

⑧ $\dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2} = st$

⑨ $\dfrac{\partial^3 Z}{\partial y^3} = 2x + 3$

⑩ $\dfrac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = e^{x-y} + x$

[redacted]

المقدمة ...

تتكون المجموعة الثانية من الفصل الثاني :-

رابعاً) المعادلات التفاضلية الخطية $\frac{dy}{dx}+p(x)y=f(x)$

خامساً) معادلة برنولي $\frac{dy}{dx}+p(x)y=f(x)y^n$

رابعاً) المعادلات التفاضلية الخطية :-

إن المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الاولى يمكن التعبير عنها بالصيغة العامة.

$$\frac{d\,\text{متغير معتمد}}{d\,\text{متغير مستقل}}+p\left(\text{متغير مستقل}\right)\text{متغير معتمد}=f\left(\text{متغير مستقل}\right)$$

ومن الصيغة العامة نستنتج مايلي :-

أ) الصيغة القياسية للمعادلة التفاضلية الخطية بالنسبة لـ y.

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=f(x)$$

ب) الصيغة القياسية للمعادلة التفاضلية الخطية بالنسبة لـ x.

$$\frac{dx}{dy}+p(y)x=f(y)$$

** لحل أي معادلة تفاضلية خطية نتبع الخطوات التالية :-

1) نجعل المعادلة المعطاة في السؤال بالصيغة القياسية إذا لم تكن بالصيغة القياسية. وذلك بجعل معامل الـ $\frac{dy}{dx}$ مثلاً يساوي واحد.

2) نقارن المعادلة المعطاة بالصيغة القياسية

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=f(x) \quad \text{او} \quad \frac{dx}{dy}+p(y)x=f(y)$$

الغاية من المقارنة أن نحدد كل من

$p(x)=?\ ,\ f(x)=?$ بالنسبة لـ y

أو

$p(y)=?\ ,\ f(y)=?$ بالنسبة لـ x

3) نجد عامل التكامل M من خلال القانون التالي

$M=e^{\int p(x)dx}$ اذا كانت الصيغة القياسية بالنسبة لـ y.

$M=e^{\int p(y)dy}$ اذا كانت الصيغة القياسية بالنسبة لـ x.

٤) نعوض عامل التكامل M في إحدى العلاقتين.
اذا كانت الصيغة القياسية بالنسبة لـ y.
$$M.y = \int M.f(x)dx$$
اذا كانت الصيغة القياسية بالنسبة لـ x.
$$M.x = \int M.f(y)dy$$

٥) نجري عملية التكامل في الطرف الايمن.

٦) نقسم طرفي المعادلة بعد عملية التكامل على M لنحصل على الحل العام. ويكون أما بدلالة لـ x او بدلالة لـ y

ملاحظة / في حل أي سؤال في المعادلات التفاضلية الخطية يجب أن يكون معامل كل من $\frac{dy}{dx}$ أو $\frac{dx}{dy}$ يساوي واحد. واذا كان لم يساوي واحد نجري عمليات حسابية كل قسمة أو الضرب الغاية منها أن نجعل معامل $\frac{dy}{dx}$ او $\frac{dx}{dy}$ يساوي واحد.

مثال ١ / حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} - 3y = 0$

الحل /

Solution

① المعادلة المعطاة بالصيغة القياسية، لامعامل y' يساوي واحد

$$\frac{dy}{dx} - 3y = 0$$

② بالمقارنة مع الصيغة القياسية

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x)$$

$$\therefore p(x) = -3 \quad , \quad \therefore f(x) = 0$$

③ نجد عامل التكامل μ

$$\mu = e^{\int p(x)dx}$$

$$\mu = e^{\int -3dx} \Rightarrow \mu = e^{-3x} \longrightarrow \text{عامل التكامل}$$

---

④ نعوض عامل التكامل μ في العلاقة

$$\mu . y = \int \mu . f(x) dx$$

$$e^{-3x} . y = \int e^{-3x} (0)\, dx \Rightarrow e^{-3x} . y = c$$

$$\Rightarrow y = \frac{c}{e^{-3x}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\therefore y = c e^{3x}}$$ general solution

الحل العام

مثال / حل المعادلة التفاضلية الآتية

$$y\frac{dx}{dy}-4x=y^{6}e^{y}$$

الحل /

Solution

① نجعل المعادلة المعطاة في الـ (و) بالصيغة القياسية وذلك بضربها في $\frac{1}{y}$ أو بقسمة طرفي المعادلة على y

$$\frac{dx}{dy}-\frac{4}{y}x=y^{5}e^{y}$$

② بالمقارنة بالصيغة القياسية

$$\frac{dx}{dy}+p(y)x=f(y)$$

$$p(y)=-\frac{4}{y} \quad , \quad f(y)=y^{5}e^{y}$$

③ نجد عامل التكامل M

$$M=e^{\int p(y)dy} \Rightarrow M=e^{\int -\frac{4}{y}dy} \Rightarrow M=e^{-4\int \frac{1}{y}dy}$$

$$M=e^{-4\ln y} \Rightarrow M=e^{\ln y^{-4}} \Rightarrow M=y^{-4}$$ عامل التكامل

④ نعوض عامل التكامل M في العلاقة

$$M.x = \int M.\,f(y)\,dy$$

$$y^{-4}.x = \int y^{-4}.\,y^{5}e^{y}\,dy$$

$$y^{-4}.x = \boxed{\int \underset{u}{y}\,\underset{dv}{e^{y}\,dy}}$$ يكامل بالتجزئة

$u = y \Rightarrow du = dy$, $dv = e^{y}dy \Rightarrow v = e^{y}$

$$uv - \int v\,du$$

$$ye^{y} - \int e^{y}\,dy \Rightarrow \boxed{ye^{y} - e^{y} + c}$$

$$y^{-4}.x = ye^{y} - e^{y} + c$$ بقسمة طرفي المعادلة على y^{-4}

$$\frac{\cancel{y^{-4}}}{\cancel{y^{-4}}}.x = \frac{ye^{y}}{y^{-4}} - \frac{e^{y}}{y^{-4}} + \frac{c}{y^{-4}}$$

$$x = y.y^{4}e^{y} - e^{y}.y^{4} + c.y^{4}$$

$$\boxed{x = y^{5}e^{y} - y^{4}e^{y} + cy^{4}}$$ General Solution
الحل العام

رابعاً) الواجب البيتي Hw

حل المعادلات التفاضلية التالية :-

① $y' + y = e^{3x}$

② $y' + 3x^2 y = x^2$

③ $y' + 2xy = x^3$

④ $x^2 \frac{dy}{dx} + xy = 1$

⑤ $y' = 2y + x^2 + 5$

⑥ $xy' - y = x^2 \sin x$

⑦ $xy' + (1+x)y = e^{-x} \sin 2x$

⑧ $(1+x)\frac{dy}{dx} - xy = x + x^2$

⑨ $\cos x \frac{dy}{dx} + (\sin x) y = 1$

⑩ $y\,dx = (ye^{y} - 2x)\,dy$

⑪

⑫ $xy' - 3(y + x^2) = \frac{\sin x}{x}$

⑬ $\frac{dy}{dx} = x + 5y \quad , \quad y(0) = 3$

(14) $y' = 2x - 3y \quad , \quad y(0) = 1/3$

(15) $y' + (\tan x)y = \cos^2 x \quad , \quad y(0) = -1$

(16) $xy' + \frac{2x+1}{x+1}\, y = x - 1$

(17) $(2xy + x^2 + x^4)\,dx - (1 + x^2)\,dy = 0$

(18) $(y - x + xy\cot x)\,dx + x\,dy = 0$

(19) $dy - \cos^{-1}x\,dx + y\cot x\,dx = 0$

(20) $x\,dy + y\,dx - \frac{1}{\cos x + \sin x}\,dx = 0$

[redacted]

خامساً) مُعادلة برنولي :-

إن الصيغة العامة للمُعادلة التفاضلية برنولي التي تكون من المرتبة الأولى هي :-

$$\frac{d\,\text{مُتغير معتمد}}{d\,\text{مُتغير مُستقل}} + p\left(\text{مُتغير مُستقل}\right)\text{متغير معتمد} = f\left(\text{مُتغير مُستقل}\right)\cdot\left(\text{متغير معتمد}\right)^{n}$$

علماً أن $n \neq 1$

ومن الصيغة العامة نستنتج مايلي :-

أ) الصيغة القياسية لمُعادلة برنولي بالنسبة لـ y

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x)\,y^{n}$$

ب) الصيغة القياسية لمُعادلة برنولي بالنسبة لـ x

$$\frac{dx}{dy} + p(y)x = f(y)\,x^{n}$$

س/ مالفرق بين المُعادلة التفاضلية الخطية ومعادلة برنولي

خطية $\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x)$

برنولي $\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x)\,y^{n}$

هذا هو الفرق. ان معادلة برنولي هي معادلة خطية ولكن $f(x)$ مضروبة في y^n

* * لحل معادلة برنولي نتبع الخطوات التالية :-
للصيغة القياسية بالنسبة لـ y

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=f(x)y^n \text{-----} (*)$$

مثال ١

١) نقسم حدود المعادلة (*) على y^n فتصبح المعادلة بالشكل التالي

$$\frac{1}{y^n}\frac{dy}{dx}+p(x)\frac{y}{y^n}=f(x)\frac{\cancel{y^n}}{\cancel{y^n}}$$

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+p(x)y.y^{-n}=f(x)$$

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+p(x).y^{1-n}=f(x) \text{------} (1)$$

علماً ان n هو عدد حقيقي ماعدا $\boxed{1,0}$

٢) نغير المتغير المعتمد من y الى Z حيث

$$let\ Z=y^{1-n} \text{-----} (2)$$

٣) نشتق المعادلة رقم (2) بالنسبة لـ x مرة واحدة

فنحصل على

$$\frac{dZ}{dx} = (1-n)\, y^{\cancel{1}-n\cancel{-1}} \frac{dy}{dx}$$

بقسمة طرفي المعادلة على معامل y^{-n} . وهو $(1-n)$

$$\frac{dZ}{dx} = (1-n)\, y^{-n} \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{1}{1-n}\frac{dZ}{dx} = \frac{\cancel{(1-n)}}{\cancel{(1-n)}}\, y^{-n} \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{1}{1-n}\frac{dZ}{dx} = y^{-n} \frac{dy}{dx} \quad \text{------ ③}$$

٤) نعوض معادلة رقم ② ومعادلة رقم ③ في معادلة رقم ① فنحصل على معادلة جديدة تسمى معادلة رقم ④

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} + p(x) .\, y^{1-n} = f(x) \quad \text{------ ①}$$

$$\frac{1}{1-n}\frac{dZ}{dx} + p(x) .\, Z = f(x) \quad \text{------ ④}$$

الان من معادلة رقم ④ نستنتج أي معادلة برنولي أصبحت معادلة تفاضلية خطية . ولكن غير قياسية

* ويجب علينا أن نجعل المعادلة التفاضلية الخطية بالصورة القياسية . وذلك بجعل معامل $\frac{dZ}{dx}$ يساوي واحد

٥) نقارن المعادلة التي حصلنا عليها وهي معادلة رقم 4 بالصيغة القياسية للمعادلة التفاضلية الخطية

$$\frac{dZ}{dx} + p(x) Z = f(x)$$

الغاية من المقارنة إيجاد

$$p(x) = ? \quad , \quad f(x) = ?$$

٦) نجد عامل التكامل μ من خلال القانون

$$\mu = e^{\int p(x) dx}$$

٧) نعوض قيمة عامل التكامل μ في العلاقة

$$\mu . Z = \int \mu . f(x) dx$$

٨) نجري عملية التكامل للطرف الايمن فقط.

٩) نقسم طرفي المعادلة بعد عملية التكامل على عامل التكامل μ . فنحصل على المعادلة

$Z =$ المعادلة معينة ---- (**)

١٠) نعوض المعادلة رقم (2) في المعادلة (**) . أي تصبح

$y^{1-n} =$ المعادلة معينة

لنجد قيمة y . وبهذا قد وجدنا الحل العام لمعادلة برنولي

مثال/ جد الحل للمعادلة التفاضلية الاتية

$$\frac{dy}{dx} - y = x y^3$$

الحل/ Solution

ملاحظة/ من خلال نظرة بسيطة للمعادلة التفاضلية اعلاه تبين لي انها معادلة برنولي لان ما بعد اليساوي يوجد متغير معتمد مرفوع الى الاس معين n وهو (3)

١) نقسم حدود المعادلة المعطاة على y^3 ونسميها معادلة رقم ①

$$y^{-3}\frac{dy}{dx} - y^{-2} = x \quad ----- ①$$

علماً ان $\boxed{n=3}$

٢) نغير المتغير المعتمد y الى Z

$$let\ Z = y^{1-n} \quad ------ ②$$

$$Z = y^{1-3} \Rightarrow Z = y^{-2} \quad ----- ②$$

٣) نشتق المعادلة رقم ② بالنسبة الى x

$$\frac{dZ}{dx} = -2y^{-3}\frac{dy}{dx}$$

بقسمة طرفي المعادلة على -2

$$\frac{1}{-2}\,\frac{dZ}{dx} = \frac{\cancel{-2}}{\cancel{-2}}\,y^{-3}\,\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{-1}{2}\,\frac{dZ}{dx} = y^{-3}\,\frac{dy}{dx} \text{ ------ } (3)$$

٤) نعوض معادلة رقم (2) ومعادلة رقم (3) في المعادلة رقم (1)

$$y^{-3}\,\frac{dZ}{dx} - y^{-2} = x \text{ ------ } (1)$$

$$\frac{-1}{2}\,\frac{dZ}{dx} - Z = x$$

إذن حصلنا على معادلة تفاضلية خطية بعد عملية التعويض. نجعلها بالصيغة القياسية وذلك بضربها في (-2). ونسميها معادلة رقم (4)

$$-\cancel{2}\left(\frac{-1}{\cancel{2}}\right)\frac{dZ}{dx} + 2Z = -2x$$

$$\frac{dZ}{dx} + 2Z = -2x \text{ ------ } (4)$$

٥) بالمقارنة بالصيغة القياسية

$$\frac{dZ}{dx} + p(x)\,Z = f(x)$$

$\therefore P(x) = 2 \quad , \quad f(x) = -2x$

٦) نجد عامل التكامل من خلال القانون

$$\mu = e^{\int p(x)dx} \Rightarrow \mu = e^{\int 2dx} \Rightarrow \boxed{\therefore \mu = e^{2x}}$$ عامل التكامل

٧) نعوض قيمة عامل التكامل μ في العلاقة

$$\mu . Z = \int \mu . f(x)\, dx$$

$$e^{2x} . Z = \int e^{2x} . (-2x)\, dx$$

$$e^{2x} . Z = \int \underset{u}{-2x}\; \underset{dv}{e^{2x}\, dx}$$

٨) نجري عملية التكامل على الطرف الايمن

$$u = -2x \Rightarrow du = -2dx$$

$$dv = e^{2x}\, dx \Rightarrow \therefore v = \frac{1}{2} e^{2x}$$

$$uv - \int v\, du$$

$$-\cancel{2}x\left(\frac{1}{\cancel{2}}e^{2x}\right) - \int \frac{1}{\cancel{2}} e^{2x} (-\cancel{2}dx)$$

$$-x e^{2x} + \int e^{2x}\, dx$$

$$\boxed{-x e^{2x} + \frac{1}{2} e^{2x} + c} \longrightarrow$$ ناتج تكامل التجزئة

$$e^{2x} . Z = -x e^{2x} + \frac{1}{2} e^{2x} + c$$

٩) نقسم طرفي المعادلة على عامل التكامل $M = e^{2x}$

$$Z = -x \frac{\cancel{e^{2x}}}{\cancel{e^{2x}}} + \frac{1}{2} \frac{\cancel{e^{2x}}}{\cancel{e^{2x}}} + \frac{c}{e^{2x}}$$

$$Z = -x + \frac{1}{2} + c e^{-2x} \text{ - - - - - } (**)$$

١٠) نعوض المعادلة رقم ② في (**)

$$y^{-2} = -x + \frac{1}{2} + c e^{-2x}$$

$$\frac{1}{y^2} = -x + \frac{1}{2} + c e^{-2x}$$

$$y^2 \left(-x + \frac{1}{2} + c e^{-2x}\right) = 1$$

$$y^2 = \frac{1}{-x + \frac{1}{2} + c e^{-2x}}$$ بجذر الطرفين

$$\therefore y = \mp \sqrt{\frac{1}{-x + 1/2 + c e^{-2x}}} \Rightarrow \boxed{\therefore y = \mp \frac{1}{\sqrt{-x + 1/2 + c e^{-2x}}}}$$

General Solution

خامساً) الواجب البيتي HW

حل معادلات برنولي التفاضلية التالية :-

① $\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x} y = x y^2$

② $y' - \frac{1}{x} y = y^2$

③ $y' + \frac{1}{3} y = e^x y^4$

④ $x y' + y = x y^3$

⑤ $\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x} y = -x^2 \cos x \cdot y^2$

⑥ $2y' + y \tan x = \frac{(4x+5)^2}{\cos x} y^3$

⑦ $x \frac{dy}{dx} + y = x^2 y^2 \ln x$

⑧ $y' = y \cot x + y^3 \csc x$

⑨ $\frac{dy}{dx} - y = x y^5$

⑩ $\frac{dy}{dx} + y = -e^x y^2$

[redacted]

ثانياً) الحالات الخاصة للمعادلات التفاضلية الغير الخطية من المرتبة الاولى .

الحالة الثانية :- نستخدم هذه الحالة عندما تحتوي المعادلة المعطاة في السؤال على x, y, z, p, q . أي تكون بهذه الصيغة $Z = px + qy + \underline{f(p,q)}$

* لحل مثل هذا النوع من الاسئلة نتبع الخطوات التالية :-

1) نستبدل كل p الى a

ونستبدل كل q الى b

2) نطبق القانون $Z = ax + by + f(a,b)$

حيث أنَّ a, b ثابتان إختياريان

مثال ١/ جد الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية

$$Z=px+qy+5pq$$

Solution — الحل

$$Z=px+qy+\boxed{5pq}$$

$$Z=px+qy+\boxed{f(p,q)}$$

بالمقارنة

$$\therefore f(p,q)=5pq$$

$$f(a,b)=5ab$$

$$\therefore Z=ax+by+5ab$$

حيث أنّ a و b هي ثوابت إختيارية

مثال ٢/ جد الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية

$$px+qy=Z-p^3-q^3$$

Solution — الحل

$$Z = px + qy + p^3 + q^3$$

بالمقارنة

$$Z = px + qy + f(p,q)$$

$$\therefore f(p,q) = p^3 + q^3$$

$$\therefore f(a,b) = a^3 + b^3$$

$$\therefore Z = ax + by + a^3 + b^3$$

حيث أنَّ a,b هي ثوابت إختيارية

ثانياً) الحالة الثانية

الواجب البيتي Hw

جد الحل العام للمعادلات التفاضلية الجزئية التالية

① $Z = px + qy - 3p^2 + 6q^2$

② $Z = px + qy + 3\sqrt[4]{pq}$

③ $px+qy-z+p^2-pq+q^3=0$

④ $z=p^2+pq+px+qy$

ثانياً) الحالات الخاصة للمعادلات التفاضلية غير الخطية من المرتبة الاولى

الحالة الثالثة :- تستخدم هذه الحالة عندما تحتوي المعادلة المعطاة في السؤال على كل من p, q, z . أي بهذه الصيغة

$$f(z,p,q)=0$$

* لحل هذا النوع من المعادلات نتبع الخطوات التالية:-

١) نفرض z دالة تعتمد على u حيث أنَّ

let $z=f(u)$ and $u=x+ay$

$$p=\frac{\partial z}{\partial u}$$

٢) $\because q=ap \Rightarrow q=a\frac{\partial z}{\partial u}$

٣) نعوض $f\left(z, \frac{\partial z}{\partial u}, a\frac{\partial z}{\partial u}\right)=0$ بدلاً من $f(z,p,q)=0$

٤) نجري عمليات جبرية لفصل المتغيرات. الغاية منها جعل الـ ∂u في جهة . والباقي في جهة أخرى .

٥) نكامل طرفي المعادلة بطريقة فصل المتغيرات فنحصل على معادلة $\boxed{u = \cdots\cdots}$. وتسمى بالحل العام

مثال ١ / جد الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية $Z = p + q$

الحل — Solution

١) نفرض Z دالة تعتمد على u حيث أن .

$$\text{let } Z = f(u) \text{ and } u = x + ay$$

٢) $\boxed{p = \frac{\partial Z}{\partial u}}$ $\quad q = ap \Rightarrow \boxed{\therefore q = a\frac{\partial Z}{\partial u}}$

٣) نعوض في المعادلة الاصلية المعطاة

$$Z = p + q$$

$$Z = p + ap \Rightarrow Z = p(1+a)$$

٤) $Z = \frac{\partial Z}{\partial u}(1+a) \Rightarrow \frac{\cancel{Z}\,\partial u}{\cancel{Z}} = \frac{\partial Z(1+a)}{Z}$

٥) نكامل طرفي المعادلة $\partial u = \frac{(1+a)}{Z} \partial Z$

$$\int du = (1+a) \int \frac{1}{Z} dZ$$

$$u = (1+a) \ln|Z| + \ln|b|$$

نضرب طرفي المعادلة في (e)

$$e^{u} = e^{\ln|Z|^{(1+a)}} \cdot e^{\ln|b|}$$

$$e^{u} = Z^{(1+a)} \cdot b \Rightarrow \boxed{e^{x+ay} = b \cdot Z^{(1+a)}}$$ general Solution الحل العام

مثال ٢/ جد الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية

$$p^2 Z - q^2 = 1$$

الحل / بما ان المعادلة تحتوي على p, q, Z . اذن هي الحالة الثالثة Solution

١) نفرض Z دالة تعتمد على u حيث أن

$$\text{let } Z = f(u) \text{ and } u = x + ay$$

$$\boxed{p = \frac{\partial Z}{\partial u}} \quad , \quad q = ap \Rightarrow \boxed{\therefore q = a\frac{\partial Z}{\partial u}} \quad ٢$$

٣) نعوض في المعادلة المعطاة

$$p^2 Z - q^2 = 1$$

$$p^2 Z - a^2 p^2 = 1 \Rightarrow p^2 (Z - a^2) = 1$$

$$\therefore p^2 = \frac{1}{(Z - a^2)}$$ بجذر الطرفين

$$\therefore p = \mp \sqrt{\frac{1}{Z - a^2}} \Rightarrow \therefore p = \mp \frac{1}{\sqrt{Z - a^2}}$$

$$p = \mp (Z - a^2)^{-1/2} \Rightarrow \frac{\partial Z}{\partial u} = \mp (Z - a^2)^{-1/2} \quad / \cdot \partial u$$

$$\partial Z = \mp (Z - a^2)^{-1/2} \partial u$$

بقسمة طرفي المعادلة على $(Z - a^2)^{-1/2}$

$$\frac{\partial Z}{(Z - a^2)^{-1/2}} = \mp \frac{\cancel{(Z - a^2)^{-1/2}}}{\cancel{(Z - a^2)^{-1/2}}} \partial u$$

$$(Z - a^2)^{1/2} \partial Z = \mp \partial u$$

$$\int du = \int (Z - a^2)^{1/2} dZ \Rightarrow$$ بما أن مشتقة داخل القوس موجودة خارج القوس إذن بالمباشر نكامل القوس بإضافة واحد إلى الأس والتقسيم على الأس الجديد

$$u = \frac{(Z - a^2)^{1/2 + 1}}{\frac{1}{2} + 1} + b$$

$$\boxed{\therefore u = \frac{2}{3} (Z - a^2)^{3/2} + b}$$ general Solution الحل العام

ثانياً) الحالة الثالثة

الواجب البيتي Hw

جد الحل العام للمعادلات التفاضلية الجزئية التالية:

1) $p - q = z$

2) $p + q + z = 0$

3) $p + q + 2z = 0$

4) $2p + 3q + 4z = 0$

5) $z^3 = z^4 pq - 1$

6) $p - zp = q - p^2 q$

7) $pz = 1 + q$

10/12/2016

أ :- either $f_1(x,p)=a \Rightarrow \therefore p=\phi_1(x)$

ب :- or/ $f_2(y,q)=a \Rightarrow \therefore q=\phi_2(y)$

٢) نكتب القانون $dZ = p\,dx + q\,dy$

٣) نعوض أ- و ب :- القانون

٤) نكامل طرفي القانون بعد تعويض أ :- و ، ب :-

$$\int dZ = \int \phi_1(x)\,dx + \int \phi_2(y)\,dy$$

٥) بعد عملية التكامل نضيف ثابت إختياري وليكن b
ثم نقول هذه العبارة ، حيث أن a, b ثوابت اختيارية ،

مثال / جد الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية

$$p = 2x + q^2$$

Solution — الحل

من خلال نظرتنا للسؤال ، تبين لنا إنها حالة رابعة

(١ $f_1(x,p) = f_2(y,q) = a$

$$p = 2x + q^2$$

ثانياً) الحالات الخاصة للمعادلات التفاضلية غير الخطية من المرتبة الاولى

الحالة الرابعة :- تستخدم هذه الحالة عندما تحتوي المعادلة المعطاة في السؤال على x, y, p, q ، أي تكون بهذه الصيغة

$$f(x,p)=f_2(y,q)$$

. وبتعبير آخر يمكن القول

إن هذه الحالة تتضمن كتابة المعادلة بحيث أن أحد طرفي المعادلة يحتوي على x,p . والطرف الثاني يحتوي على y,q

وبتعبير آخر أيضاً يمكن القول

إن هذه الحالة هي عملية فصل أو عزل الـ x,p في جهة والـ y,q في جهة أخرى

** لحل أي سؤال في الحالة الرابعة نتبع الخطوات التالية :-

1) نحول المعادلة المعطاة في السؤال الى الصيغة الاتية

$$f_1(x,p)=f_2(y,q)=a$$

$$p - 2x = q^2$$

أ :- $f_1(x,p) = a \Rightarrow p = \phi_1(x)$

$p - 2x = a \Rightarrow p = a + 2x$

ب :- $f_2(y,q) = a \Rightarrow q = \phi_2(y)$

$q^2 = a \Rightarrow \therefore q = \sqrt{a}$

٢) نكتب القانون $dz = p\,dx + q\,dy$

٣) $dz = (a + 2x)\,dx + \sqrt{a}\,dy$

٤) $\int dz = \int (a + 2x)\,dx + \int \sqrt{a}\,dy$

$z = ax + \frac{2x^2}{2} + \sqrt{a}\,y + b$

$z = ax + x^2 + \sqrt{a}\,y + b$

حيث أن a, b هما ثابتان إختياريان

11/12/2016

الراجد

ثانياً) الحالة الرابعة

الواجب البيتي HW

جد الحل العام للمعادلات التفاضلية الجزئية التالية :

① $x - p + q + y = 1$

② $xq - y^2 p^2 - xy^2 = 0$

③ $x = \sqrt{p} - \sqrt{q}$

④ $x^2 - px + q + y = x$

⑤ $\frac{p\, x \ln x - 1}{x \ln x} - \sec y + q = 0$

11/12/2016