المحاضرة الاولى / تفاضل وتكامل متقدم

مدرس المادة / م.م بشار احمد سلطان

Sequence of Numbers

Def(1): Sequence of Numbers is a function whose domin is Natural numbers and Co-domin is Real Numbers

i.e $F: N \to R$ and denoted by $\{a_n\}$

$$\{a_n\} = \{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots\}$$

Ex1) $F(n) = \{\frac{1}{n}\}$

$$= \{1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \cdots\}$$

Ex2) $F(n) = \{1\}$

$$= \{1, 1, 1, \cdots\}$$

Ex3) $F(n) = \{(-1)^n\}$

$$= \{-1, 1, -1, 1, \cdots\}$$

* بطريقة ما ... سيصلح الله كل شيء 💙

Def②: A sequence $\{a_n\}$ is convergence to a point $\underline{a}$ If $\forall$ positive number $\in$ there exist $n \in N$ s.t. $|a_k - a| < \in, \forall k \geq n$ and a is called the convergent point.

Ex1) $F(n) = \{\frac{1}{n}\}$, Given $\in = \frac{1}{10}$, $n = 11$

Sol) $F(n) = \{\frac{1}{n}\}$

$$= \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots \simeq \underline{\underline{0}}\}$$

$\underline{a}$

$\because |a_k - a| < \in, \forall k \geq n$

$\therefore |\frac{1}{11} - 0| < \frac{1}{10}$

$\therefore$ sequence $\{\frac{1}{n}\}$ is Conv. to 0 (zero)

Ex2) $F(n) = \{\frac{1}{n} + 6\}$, Given $\in = 0.03$, $n = 104$

$$= \{7, 6\tfrac{1}{2}, 6\tfrac{1}{3}, \cdots \simeq 6\}$$

$\because |a_k - a| < \in, \forall k \geq n$

$\therefore |\frac{1}{104} - 6| < 0.03$

$\therefore$ Sequence $\{\frac{1}{n} + 6\}$ is Conv. to 6.

Note : A Constant Sequence is Convergent.

Ex) $F(n) = \{4\}$, Given $\in = 1$, $n = 8$

sol) $= \{4, 4, 4, \cdots 4\}$

$\because |a_k - a| < \in , \forall k \geq n$

$|a_8 - a| < \in$

$|4 - 4| < 1$

$\therefore 0 < 1$ تحقق الشرط

$\therefore F(n) = \{4\}$ is Conv. to 4

Def③ : A Sequence which is not Convergent is Called divergent

Ex1) $\{a_n\} = \{n^2\}$

$= \{1, 4, 8, \cdots\}$ is div.

Ex2) $\{a_n\} = \{-1\}^n = \{-1, 1, -1, \cdots\}$ is div.

الداله المتذبذبه تكون متباعدة

Theorem 1: Let $\{a_n\}$ and $\{b_n\}$ be a sequence of Real numbers and let A and B be Real numbers. The Following rules hold if $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ and $\lim_{n\to\infty} b_n = B$.

1- Sum Rule $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A+B$

2- Difference Rule $\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = A-B$

3- Constant Multiple Rule $\lim_{n\to\infty} (k b_n) = kB, k \in R$

4- Product Rule $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$

5- Quentient Rule $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$, if $B \neq 0$

Theorem 2: The following sequence converge to the limits listed below:

1- $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$

2- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

3- $\lim_{n\to\infty} x^{\frac{1}{n}} = 1 \ (x > 0)$.

4- $\lim_{n\to\infty} x^n = 0 \ (|x| < 1)$

5- $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$ (For any x)

6- $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ (For any x)

Ex) Check the Convergence of the Following Sequences.

1- $\left\{\frac{n^2}{(n+1)^2}\right\}$ 2- $\left\{\frac{\ln n}{n}\right\}$ 3- $\left\{\frac{n-5}{n^2-25}\right\}$

الحل)

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+2n+1} \div n^2$ بالقسمة

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} = 1$, the Seq. Conv. to (1)

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}$

الحل by L-H Rule [بإيجاد المشتقة للبسط والمقام]

تصبح $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1} = 0$. The Seq. Conv. to (0)

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-5}{n^2-25} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cancel{(n-5)}}{\cancel{(n-5)}(n+5)}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+5} = 0$

The Seq. Conv. to (0)

* نصيحة بسيطة 🌌

اصمت كأنك لم تفهم 🍸 🌸 وتجاهل كأنك لم ترى، 🔑💜".

Series : المتسلسلات

Def : let $\{a_n\}$ be a seq. in R, and let $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$,

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \cdots, S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, then

the Seq $\{S_n\}$ is called Series

i.e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$

a_n : is the n.th term of the Seq.

S_n : is the Partial Sum of the Series.

Ex1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n}$

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{2}{3}, \quad a_3 = \frac{3}{4}, \cdots$$

$$S_1 = a_1 = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$$

$\vdots$

$\therefore \{S_n\} = \{\frac{1}{2}, \frac{7}{6}, \cdots\}$ be a Series

Ex2: $a_n = \left\{ \frac{n}{2n+1} \right\}$

$a_1 = \frac{1}{3}$, $a_2 = \frac{2}{5}$, $a_3 = \frac{3}{7}$, ...

$S_1 = a_1 = \frac{1}{3}$

$S_2 = a_1 + a_2 = S_1 + a_2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{11}{15}$

$\{a_n\} = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{11}{15}, \cdots \right\}$ be a series

ملاحظة :

الحد الاول $a_1 = S_1$

الحد الثاني $a_2 = S_2 - S_1$

$a_3 = S_3 - S_1$

$\vdots$

الحد النوني $a_n = S_n - S_{n-1}$

فلإيجاد الحد النوني في هذا المثال يكون

$$a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{n}{2n+1} - \frac{n-1}{2(n-1)+1}$$

$$= \frac{n}{2n+1} - \frac{(n-1)}{2n-1}$$

$$= \frac{n(2n-1) - (n-1)(2n+1)}{4n^2-1}$$

$$= \frac{1}{4n^2-1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$$ be a series

ملاحظه

Note: If $\{S_n\}$ cgt Seq. to $\underline{S}$, then we say that the series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is cgt to $\underline{S}$ or the series has Sum $\underline{S}$ and written as $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$, and If $\{S_n\}$ is dgt then the series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is dgt.

Ex) Determine whether of the following series $\underline{\text{cgt}}$ or $\underline{\text{dgt}}$?

1- $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ 2- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ 3- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 4- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

Sol) ① $\sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1+1+1+\cdots$

$\therefore S_1 = 1, S_2 = 2, S_3 = 3, \cdots$

$\{S_n\} = \{1, 2, 3, \cdots\}$ dgt.

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} 1$ is dgt.

② $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$

$\therefore S_1 = 1, S_2 = 0, S_3 = 1, \cdots$

$\{S_n\} = \{1, 0, 1, \cdots\}$ is dgt.

$\therefore \sum^{\infty} (-1)^{n+1}$ is dgt.

③ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$

$S_1 = 1 \;,\; S_2 = \frac{3}{2} \;,\; S_3 = \frac{7}{6} \;, \cdots$

$\{S_n\} = \{1, \frac{3}{2}, \frac{7}{6}, \cdots\}$ dgt

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ is dgt

④ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}$

$S_1 = \frac{1}{2} \;,\; S_2 = \frac{2}{3} \;, \cdots$

$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}$

$\frac{0}{1} = \frac{An + A + nB}{n(n+1)}$

$\Rightarrow \quad An + A + nB = 1 \quad \cdots ①$

$A + B = 0 \quad \cdots ②$

عند حلهما انيا بطريقة التعويض يكون

$A = 1 \;,\; B = -1$

$\therefore \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \sum_{n=} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \frac{1}{4} + \cdots$
$= 1$

$\therefore \{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \cdots\}$ cgt to 1

$\therefore$ The series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ is cgt to 1.

Def: A Series of from $a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$ is called Geometric series, the ratio of any term to the one befor is r.

$$\therefore r = \frac{ar^2}{ar}, \quad r = \frac{ar}{a}$$

ملاحظة

Note: To determine the G-Series cgt or dgt

let $S_1 = a$, $S_2 = a + ar$, $\cdots$, $S_n = a + ar + \cdots + ar^{n-1}$

$$\boxed{\therefore S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}} \rightarrow$$

قانون جمع المتسلسلة "الهندسية"

then:

1) IF $|r| < 1$, $\lim_{n \to \infty} r^n = 0$

$$\Rightarrow S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r} \text{ is cgt.}$$

$$\therefore S_n = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r} \quad \text{cgt.}$$

2) IF $|r| > 1 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} r^n \simeq \infty$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} \text{ is dgt.}$$

3) If $r=1$, then the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} a r^{n-1} = a+a+a+\cdots = n\cdot a$$

is dgt if $a\neq 0$ and is Cgt if $a=0$

4) If $r=-1$

$$S_n = \begin{cases} \dfrac{a(1+1)}{(1+1)} = a & \text{if } n \text{ odd} \\ \dfrac{a(1-1)}{(1+1)} = 0 & \text{if } n \text{ even} \end{cases} \Bigg\} \text{ dgt}$$

Ex) Determine whether of the following series Cgt or dgt

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n}}$

الحل)

1) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots$$

$a=1$, $r=\frac{1}{2} < 1$ is Cgt

$$\therefore S_n = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ is Cgt to 2.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$

$a = \frac{1}{2}$, $r = \frac{1}{2} < 1$ is Cgt

$\therefore S_n = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ is Cgt to 1

Def: A series of the form $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \cdots + \frac{1}{n^p}$ is called P-series.

Note: 1) The P-series is Cgt If $P > 1$

2) The P-series is dgt If $P \leq 1$

Ex) Determine whether of the following series is Cgt or dgt.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{n^3}}$

Q6 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots$

$= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots$

is P-series $\Rightarrow P = 2 > 1$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ is Cgt

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{(1)^{-\frac{1}{2}}} + \frac{1}{(2)^{-\frac{1}{2}}} + \cdots$

is P-series $\Rightarrow P = -\frac{1}{2} < 1$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}$ is dgt.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{n^3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^3}\right)^{\frac{1}{2}}$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$

$= \frac{1}{(1)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(2)^{\frac{3}{2}}} + \cdots$

is P-Series $\Rightarrow P = \frac{3}{2} > 1$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{n^3}}$ is Cgt

3) If $r=1$, then the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} a r^{n-1} = a+a+a+\cdots = n\cdot a$$

is dgt if $a\neq 0$ and is Cgt if $a=0$

4) If $r=-1$

$$S_n = \begin{cases} \dfrac{a(1+1)}{(1+1)} = a & \text{if } n \text{ odd} \\[2ex] \dfrac{a(1-1)}{(1+1)} = 0 & \text{if } n \text{ even} \end{cases} \Bigg\} \text{ dgt}$$

Ex) Determine whether of the following series Cgt or dgt.

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ 2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n}}$

الحل) 1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots$

$a=1$, $r=\frac{1}{2} < 1$ is Cgt

$$\therefore S_n = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$\therefore \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ is Cgt to 2.

* Convergence Tests : اختبارات التقارب

1. The n-th term test (اختبار الحد النوني)

If $\lim_{n\to\infty} \sum a_n \neq 0$ or does not exist then

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is dgt.

Ex 1 : $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$

Sol) $\lim_{n\to\infty} (-1)^n = \begin{cases} -1 & \text{if } n \text{ odd} \\ 1 & \text{if } n \text{ even} \end{cases}$ not exist

$\therefore \sum (-1)^n$ is dgt

Ex 2 : $\sum_{n=1}^{\infty} \cos n\pi$

Sol) $\lim_{n\to\infty} \cos n\pi = \begin{cases} -1 & \text{if } n \text{ odd} \\ 1 & \text{if } n \text{ even} \end{cases}$ not exist

$\therefore \sum \cos n\pi$ is dgt.

Ex 3 : $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$

$= \lim_{n\to\infty} n^2 \simeq \infty$

$\therefore \sum n^2$ is dgt.

* Convergence Tests : اختبارات التقارب

2- The Comparison test : اختبار المقارنة

i) If $|a_K| \leq C_K$ for $K \geq n_0$ for some n and if $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$ is cgt.
then $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is Cgt.

ii) If $a_K \geq d_K \geq 0$, $\forall K \geq n$, for some n and if $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ is dgt.
then $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is dgt.

Ex1) Test the following series by Comparison test :

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+15}$

$$n+15 < 16n \quad , n \geq 2$$

$$\frac{1}{n+15} > \frac{1}{16n}$$

$\because \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{16n}$ is dgt [P.series, P=1]

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+15}$ is dgt.

Ex 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+9}$

Sol) $n^2+9 > n^2 \quad , n \geq 1$

$$\frac{1}{n^2+9} < \frac{1}{n^2}$$

$\because \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ is cgt [P. Series, $P=2$]

$\therefore \sum \frac{1}{n^2+9}$ is cgt by Comp. test.

Ex 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{4^n}$

Sol)

$\because \cos^2 n \leq 1$

$\therefore \frac{\cos^2 n}{4^n} \leq \frac{1}{4^n}$ [بالقسمة على 4^n]

$\because \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}$ is cgt. [G. Series , $r = \frac{1}{4} < 1$]

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{4^n}$ is cgt.

(التحفيز) 🥺❤️

"إنّ الله يُخبئك لِمن يشبهك." ♡💫

Ex 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

$\ln n \geq 1 \ , n \geq 1$ (ملاحظة مهمة)

$\frac{\ln n}{n} \leq \frac{1}{n}$ (بالقسمة على n)

$\because \sum \frac{1}{n}$ is dgt [P.Series , $P = 1$]

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ is dgt.

Ex 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$$

$$n^2+n > n^2$$

$$\frac{1}{n^2+n} < \frac{1}{n^2}$$

$\because \sum \frac{1}{n^2}$ is Cgt [P.Siers , $P = 2$]

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$ is Cgt.

* Convergence Tests : اختبارات التقارب :

3- The ratio test : اختبار النسبة :

Let $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ be a series, and let $\alpha = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ then:

1. If $\alpha < 1$, then $\sum a_n$ is cgt.
2. If $\alpha > 1$, then $\sum a_n$ is dgt
3. If $\alpha = 1$, the test is fails

ملاحظة : في اختبار النسبه عندما تكون $\alpha = 1$ يعتبر الاختبار فاشل لايجد المتسلسله هل هي متقاربه أم متباعدة ويفضل استخدام اختبار اخر.

Ex: Test the following series by using ratio test:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

Sol) 1) $\alpha = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{2^n}{n^2}} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{2^n} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\cancel{2^n}\cdot 2}{n^2+2n+1} \cdot \frac{n^2}{\cancel{2^n}} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n^2+2n+1}$$

$$= 2 > 1$$

$\therefore \sum a_n$ is dgt

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{[2(n+1)+1]!}}{\frac{1}{(2n+1)!}} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{(2n+3)!} \cdot \frac{(2n+1)!}{1} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{(2n+3)(2n+2)\cancel{(2n+1)!}} \cdot \frac{\cancel{(2n+1)!}}{1} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{4n^2+10n+6} \right|$$

$$= 0 < 1$$

$\therefore \ \sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$ is Cgt.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{1} \right|$$

$$= \lim \left| \frac{1}{(n+1)\cancel{n!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{1} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}$$

$= 0 < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ is Cgt.

تفاضل وتكامل متقدم / صياغة السؤال في الاختبار

Q) Determine whether given series cgt. or dgt.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n}$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n+1}$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{3!\, n!\, 3^n}$

ملاحظة / يفضل أستخدام اختبار النسبة (The ratio test) كما هو الحال كلي (ليس بالمثلة) اذا كان بسط مرفوع قوة (n) أو مقام مرفوع قوة (n) او بسط ومقام مرفوع كلاهما لقوة (n).

* نأتي الى حل السؤال

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n}$

Sol) $\alpha = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{2^n} \right|$

$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\cancel{2^n}\cdot 2}{\cancel{3^n}\cdot 3} \cdot \frac{\cancel{3^n}}{\cancel{2^n}} \right|$

$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2}{3} \right| = \frac{2}{3} < 1$

$\alpha < 1$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n}$ is cgt.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n+1}$

Sol) $\alpha = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2^{n+1}}{n+2} \cdot \frac{n+1}{2^n} \right|$

$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\cancel{2^n} \cdot 2}{n+2} \cdot \frac{n+1}{\cancel{2^n}} \right|$

$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2(n+1)}{n+2} \right|$

$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2n+2}{n+2} \right|$

$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2+\frac{2}{n}}{1+\frac{2}{n}} \right| = 2$

$\alpha = 2 > 1$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n}$ is dgt.

الاصدقاء هم طعم وملح هذه
الحياه وحتى أنهم أكثر جزء
ثمين فيها ☹❤،

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^2}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^2} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n^2+2n+1}{\cancel{3^n}\cdot 3} \cdot \frac{\cancel{3^n}}{n^2} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n^2+2n+1}{3n^2} \right|$$

$$\alpha = \lim \left| \frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{3} \right| = \frac{1}{3} < 1$$

$\alpha < 1$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$ is cgt.

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{3!\,n!\,3^n}$

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+4)!}{3!(n+1)!\,3^{n+1}} \cdot \frac{3!\cdot n!\cdot 3^n}{(n+3)!} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+4)\cancel{(n+3)!}}{\cancel{3!}(n+1)\cancel{n!}\cdot\cancel{3^n}\cdot 3} \cdot \frac{\cancel{3!}\cdot\cancel{n!}\cdot\cancel{3^n}}{\cancel{(n+3)!}} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+4}{3n+3} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1+\frac{4}{n}}{3+\frac{3}{n}} \right| = \frac{1}{3} < 1$$

$\therefore \alpha < 1$

$\therefore \sum \frac{(n+3)!}{3!\,n!\,3^n}$ is cgt.

* Convergence Tests : اختبارات التقارب

4) The n. root test : اختبار الجذر النوني

Let $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ be a series and let $\alpha = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ then :

a. if $\alpha < 1$, Then $\sum a_n$ is cgt.

b. if $\alpha > 1$, Then $\sum a_n$ is dgt

c. if $\alpha = 1$, The test is fails

ملاحظة : يستخدم هذا الاختبار اذا كان بسط الدالة مرفوع للقوة (n) او المقام مرفوع للقوة (n) أو كلاهما معاً مرفوع للقوة (n) .

EX) Determine whether each series cgt or dg

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$

Sol) ① $\sum \frac{2^n}{n^2}$

$\alpha = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^2}}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^{2/n}} = 2 > 1$

$\therefore \sum \frac{2^n}{n^2}$ is dgt.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n$

Sol) $\alpha = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^n}$

$= \lim_{n\to\infty} (n^n)^{\frac{1}{n}}$

$= \lim_{n\to\infty} n$ not exist

$\therefore \sum n^n$ is dgt.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^n}$

sol) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{5^n}}$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^n}{5^n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{5} = \frac{2}{5} < 1$$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^n}$ is cgt.

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

sol) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}$

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{2/n}} = \frac{1}{1} = 1$$

$\therefore \alpha = 1 \Rightarrow$ The test is fails

وهذا يعني اختبار الحد النوني لا يحدد تقارب أو تباعد المتسلسلة
ويجب استعمال اختبار اخر لتحديد قيمتها .

* Power Series of Function :- متسلسلة القوى بالنسبة للدالة

ⓐ Taylor Series :- متسلسلة تايلر

$$F_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}$$

Ex) find the taylor Polynomial $f_n(x)$ for each function :-

1) $f(x) = \cos x$

Sol) $f(x) = \cos x$

$f(0) = \cos(0) = 1$

$f'(x) = -\sin x \Rightarrow f'(0) = 0$

$f''(x) = -\cos x \Rightarrow f''(0) = -1$

$f'''(x) = \sin x \Rightarrow f'''(0) = 0$

$f^{(4)}(x) = \cos x \Rightarrow f^{(4)}(0) = 1$

$\vdots$

$$f_n(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}$$

$$= 1 + 0\cdot x + \frac{(-1)x^2}{2!} + \frac{0\cdot x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

2) $f(x) = e^x$

Sol) $f(x) = e^x \Rightarrow f(0) = e^0 = 1$

$f'(x) = e^x \Rightarrow f'(0) = e^0 = 1$

$f''(x) = e^x \Rightarrow f''(0) = e^0 = 1$

$\vdots$

$$f_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

* Taylor series for f at $x = a$

i.e $F(a) + F'(a)(x-a) + \frac{F''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{F^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$

أوجد متعددة حدود تايلر للدالة $f(x) = e^x$ عند النقطة $x = 1$

$F x)$

Sol)
$F(x) = e^x$

$F(1) = e^1$

$F'(x) = e^x$

$F'(1) = e^1$

$F''(x) = e^x$

$F''(x) = e^1$

$F'''(x) = e^x$

$F'''(1) = e^1$

$\vdots$

$$F_n(x) = e + e(x-1) + \frac{e(x-1)^2}{2!} + \cdots + \frac{e(x-1)^n}{n!}$$

$$= e\left(1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2!} + \cdots + \frac{(x-1)^n}{n!}\right)$$

$$= e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n!}$$

اما متسلسلة ماكلورين فهي حالة خاصة من متسلسلة تايلور عندما $x=0$

مثال ④ اوجد متسلسلة ماكلورين للدالة $f(x)=Ln(x+1)$

Sol)

$$f(x) = Ln(x+1)$$

$$F(0) = Ln(0+1) = Ln(1) = 0$$

$$\bar{F}(x) = \frac{1}{x+1} = (x+1)^{-1} \Rightarrow \bar{F}(0) = 1$$

$$\bar{\bar{F}}(x) = -(x+1)^{-2} \Rightarrow \bar{\bar{F}}(0) = -1$$

$$F^{(3)}(x) = 2(x+1)^{-3} \Rightarrow F^{(3)}(0) = 2$$

$$F^{(4)}(x) = -6(x+1)^{-4} \Rightarrow F^{(4)}(0) = -6$$

$$f_n(x) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{2x^3}{3!} - \frac{6x^4}{4!} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$$

اذا تريد تعيش حياه سعيده

shopping_eating_sleeping

أبتسم_ اعتذر - سامح

* Binomial Series : متسلسلة باينوميل

The binomial series is the Maclaurin series for the function $F(x) = (1+x)^m$ of $x=0$ in the basic M-Series to obtain.

$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)x^k}{k!} \quad *$$

Ex1) use Binomail Series to estemate $\sqrt{1.25}$ with an error less than 0.001

Sol) $F(x) = (1+x)^m$

$(1+x)^m = (1+0.25)^{\frac{1}{2}}$

$\therefore x = \frac{1}{4}, \; m = \frac{1}{2}$

$$(1+\tfrac{1}{4})^{\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{4}) + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}(\tfrac{1}{4})^2 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)(\frac{1}{4})^3}{3!} + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{8} - \frac{1}{128} + \frac{1}{1024} + \cdots$$

تسهل →

$$\simeq 1.117$$

* أبتسم دائما كي يحتار الناس في فهمك.😌

Ex2) use the binomial series to estimate $\sqrt{1.5}$ with an error of less than 0.001

sol) $\sqrt{1.5} = \left(1+\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

$m = \frac{1}{2}\ ,\ x = \frac{1}{2}$

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2!} + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{-1}{32}\right)$$

$$= \frac{5}{4} - \frac{1}{32}$$

$$\simeq 1.0198$$

Ex3) use binomial series to estimate $\sqrt{1.05}$ with an error of less than 0.001

sol) $\sqrt{1.05} = \left(1+\frac{1}{20}\right)^{\frac{1}{2}}$

$\therefore\ m = \frac{1}{2}\ ,\ x = \frac{1}{20}$

$$\left(1+\frac{1}{20}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{40} + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{400}}{2!} + \cdots$$

$$= \frac{41}{40} - \frac{1}{3200}$$

$$\simeq 1.0246$$

* لَن يُقاسمك الوَجع أحداً إنتبه لِنَفسك جَيدا -

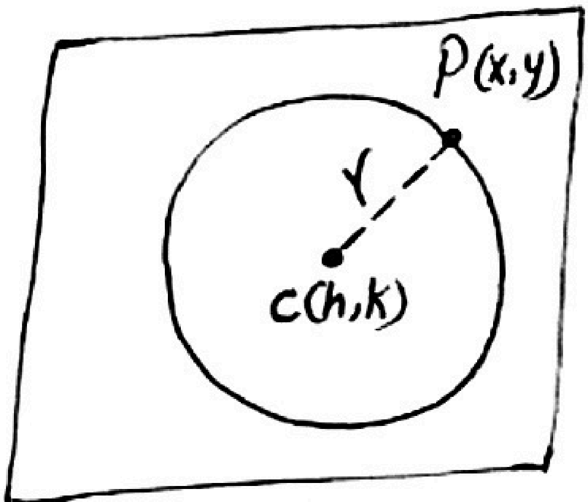
* Functions of two or more Variables الدوال ذات متغيرين فأكثر

1) (Circle) الدائرة

The circle is the set of Points in a plane whose distance from Fixed Point in a plane is constant

s.t: Fixed Point = Center (h,k) المركز

distance = Radius (r) نصف القطر



Let $P(x,y)$ be a Point on the circle, then $PC = r$, $r > 0$

$$= \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r \quad \text{(بتربيع الطرفين)}$$

$$= (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

$\therefore (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ (characteristic equation of circle) معادلة الدائرة القياسية

ملاحظة ①: يمكننا إيجاد معادلة الدائرة عند توفر مركزها ونصف قطرها.

$*\ (x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

$\Rightarrow x^2-2hx+h^2+y^2-2ky+k^2-r^2=0$

وعند فرضنا $A=-2h$, $B=-2k$, $C=h^2+k^2-r^2$

تصبح معادلة الدائرة بالصورة :

$x^2+y^2+Ax+By+C=0$ (General equation of circle)

المعادلة العامة للدائرة

حيث

S.t. :- 1) $r=\sqrt{h^2+k^2-C}$, $r>0$

2) $C(h,k)=\left(\frac{-A}{2},\frac{-B}{2}\right)$

ملاحظة 2 :- في معادلة الدائرة العامة نلاحظ ما يلي :-

1) تمثل معادلة من الدرجة الثانية للمتغيرين X, Y

2) يجب أن يكون معامل X^2 = معامل Y^2 = 1

3) تكون المعادلة خالية من الحد (XY)

" لو كانت الحياة إبرة، لكان رزقك خيطاً يأتيك من ثقبها .. فاطمئن "

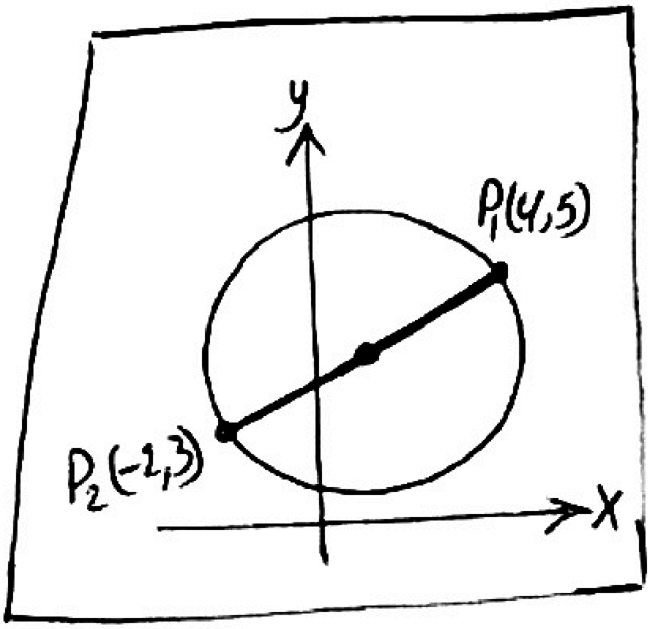
Ex1) find the equation of circle that $c(2,-3)$

$r=5$?

Sol) $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

$(x-2)^2+(y+3)^2=25$

Ex2) find the equation of circle that Diogonal $P_1(4,5), P_2(-2,3)$?



Sol) half $\overline{P_1P_2} = c(x,y)$

$h=x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{4+\bar{2}}{2}=\frac{2}{2}=1$

$k=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{5+3}{2}=\frac{8}{2}=4$

$c(h,k)=c(1,4)$

$r=P_1C=\sqrt{(4-1)^2+(5-4)^2}=\sqrt{(3)^2+(1)^2}=\sqrt{10}$

$r=\sqrt{10}$

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

$\therefore (x-1)^2+(y-4)^2=10$ المعادله القياسيه للدائرة

EX3) find the Center (c) and Radius (r) in the circle

$$2x^2+2y^2+12x-8y+6=0$$

sol) نجعل معامل x^2 = معامل y^2 = 1

$$(2x^2+2y^2+12x-8y+6)=0 \quad \div 2$$ بالقسمة

$$\Rightarrow x^2+y^2+6x-4y+3=0$$

نجد المركز $C(h,k)$

$$h=\frac{-A}{2}=\frac{-6}{2}=-3$$

$$k=\frac{-B}{2}=\frac{-(-4)}{2}=\frac{4}{2}=2$$

$$\therefore C(h,k)=C(-3,2)$$

نجد نصف القطر (r)

$$r=\sqrt{h^2+k^2-c}$$

$$=\sqrt{(-3)^2+(2)^2-3}=\sqrt{9+4-3}=\sqrt{10}$$

* نصيحة: ارضى بما قسمه الله لك ،فربما لو ملكت اكثر لكان فيها هلاكك🤲❤

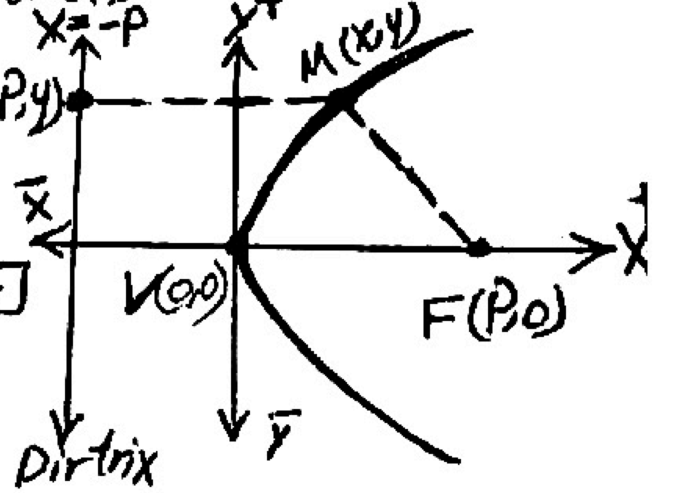
2) The Parabola القطع المكافئ

Def. Parabola is the set of Points in plane that equil distant from fixed Point (Focus) and given Line Naimed (Dirtrix)

* Case 1

Let $M(x,y)$ be a Point of the Parabola then

$$MF = MQ$$



$$\sqrt{(x-P)^2+y^2} = \sqrt{(x+P)^2+(y-y)^2}$$ [بالتربيع]

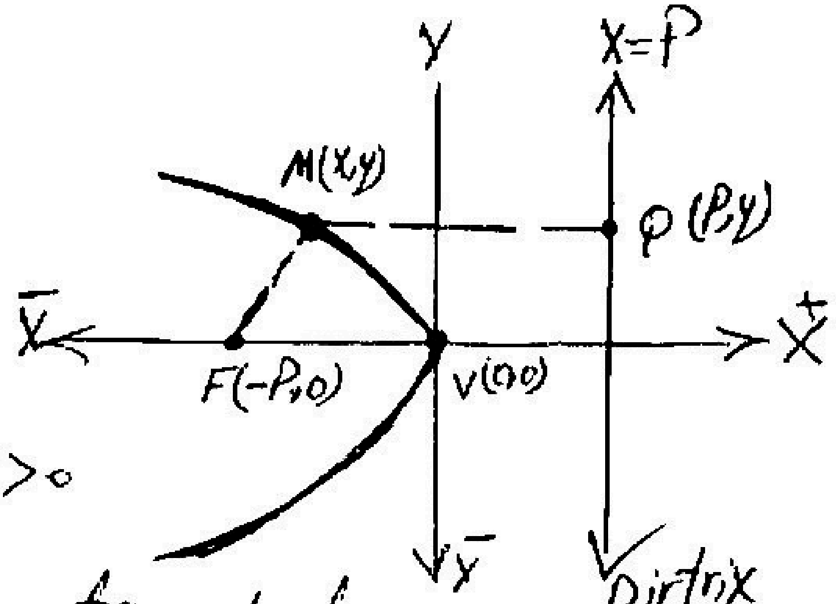
$$\cancel{x^2} - 2Px + \cancel{P^2} + y^2 = \cancel{x^2} + 2Px + \cancel{P^2}$$

$$\boxed{y^2 = 4Px}$$

معادلة قطع مكافئ بؤرته على محور السينات من اليمين حيث $P>0$

* لَطيفَة تِلكَ المواقِف التِي تَكشِفُ عَنْ جَوهَر الآخرينْ . . 🙃👌

* Case (2)



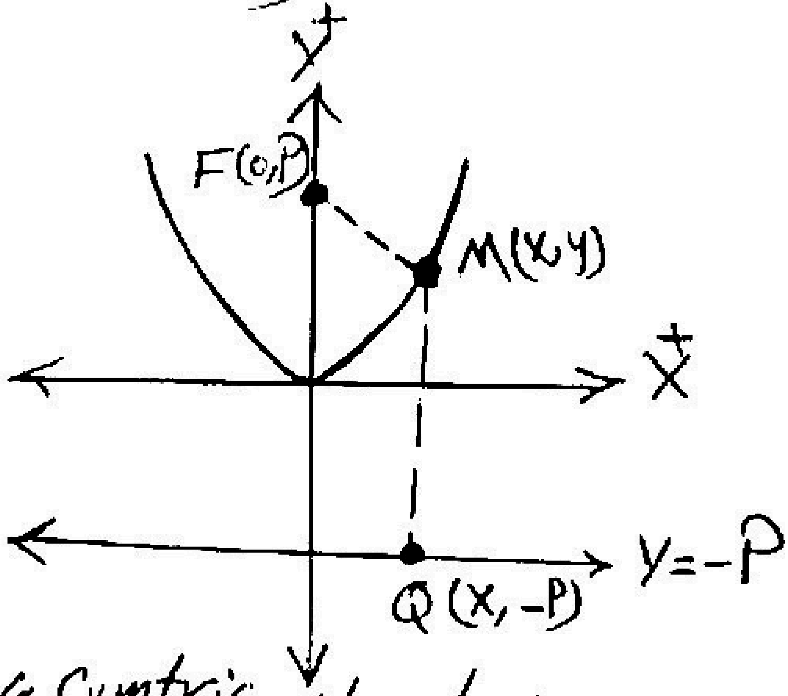
$MF = MQ$

$\boxed{y^2 = -4Px}$, $P>0$

The Curve is symetric about X-axis

• والي تمثل معادلة قطع مكافئ بؤرته تنتمي لمحور السينات
من جهة اليسار ومركزه أي رأسه نقطة الأصل.

* Case (3)



$MF = MQ$

$$\sqrt{x^2+(y-P)^2} = \sqrt{0+(y+P)^2}$$

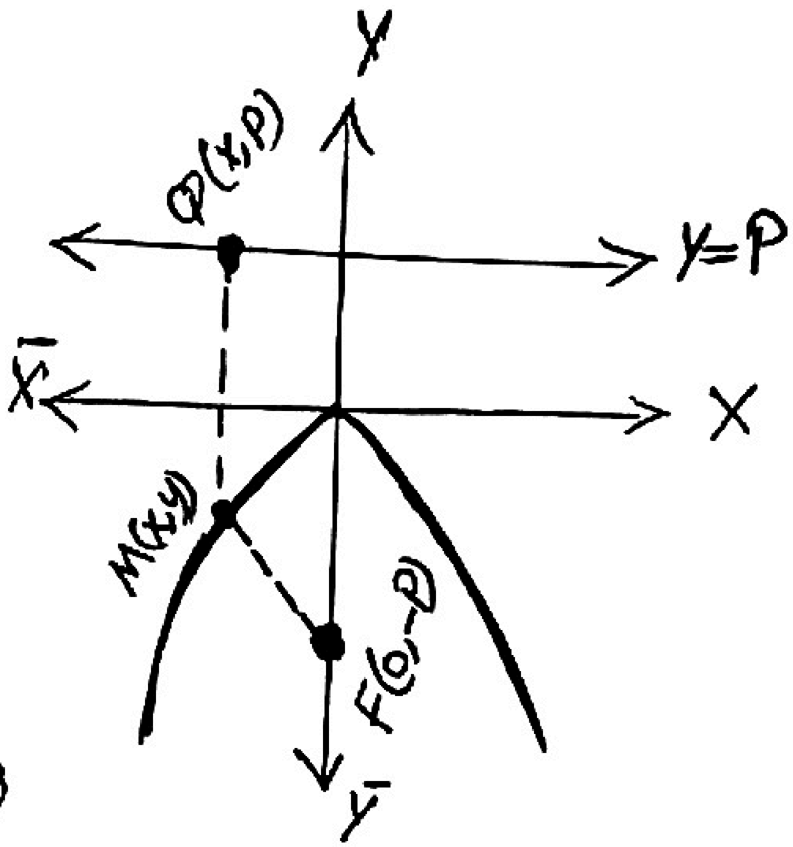
$$x^2+\cancel{y^2}-2Py+\cancel{P^2} = \cancel{y^2}+2Py+\cancel{P^2}$$

$\boxed{x^2 = 4Py}$, $P>0$ The Curve symtric about y-axis

• أي تمثل معادلة قطع مكافئ بؤرته تنتمي لمحور الصادات
نحو الأعلى ورأسه نقطة الأصل.

* Case (4) :

$MF = MQ$



$\boxed{x^2 = -4Py}$, $P > 0$

The Curve symtric about Y- axis

تمثل معادلة قطع مكافئ بؤرته تنتمي لمحور الصادات

نحو الأسفل ورأسه نقطة الأصل.

EX1) find the equation of Parabola whose the victor is the Point on origin and Foucs in X- axis, dates Dirtrix in a Point (4,2)

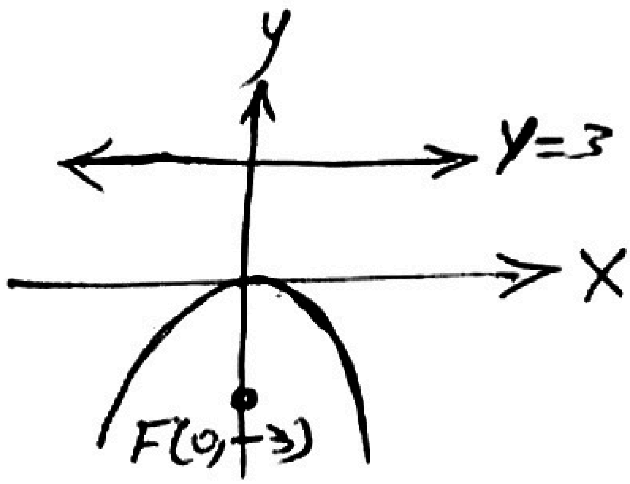
Sol) $\because$ Foucs in X-axis

$\therefore X = 4 \Rightarrow$ eq. of Dirtrix

$\therefore F(-4,0)$ foucs $\Rightarrow P = 4 > 0$

$\therefore Y^2 = -4PX \Rightarrow \boxed{Y^2 = -16X}$ eq. of Para.

EX 2) find the Foucs and Dirtrix the Parabola and Drow the Curve $x^2 = -12y$



Sol) $\left.\begin{array}{l} x^2 = -12y \\ x^2 = -4y \end{array}\right]$

$-4P = -12$

$\Rightarrow P = 3$

$F(0,-3)$

$y = 3$ Dirtrix eq.

EX3) find the equation of Parabola when the equation of Dirtrix $2x-6=0$ and the Victor is the origin Point.

Sol) $2x-6=0 \Rightarrow x = 3$ The Dirtrix eq.

$\Rightarrow F(-3,0) \Rightarrow P=3$

$y^2 = -4Px$

$y^2 = -4(3)x \Rightarrow \boxed{y^2 = -12x}$ eq. of Par.

* القطع الناقص (Ellipse)

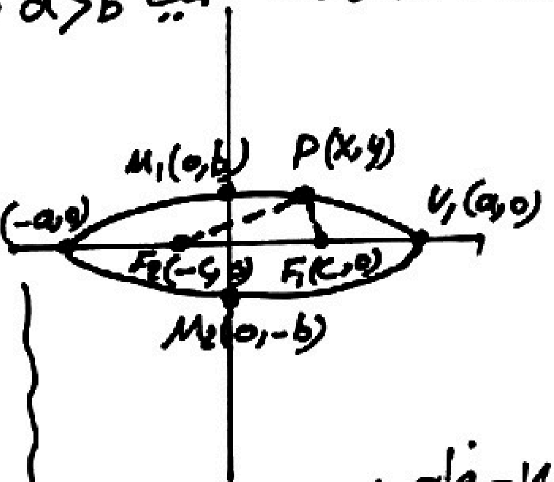
Def. An ellipse : is the set of points in plane whose distance from two fixed points is a constant sum (2a).

s.t: Two fixed point = Focus F_1 , F_2

constant sum $= 2a$, $a > 0$

$$PF_1 + PF_2 = 2a$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \longrightarrow$$ المعادله القياسية للقطع الناقص الذي بؤرتاه على محور السينات ومركزه نقطة الاصل حيث $a > b$ دائماً



* تسمى كل من

1- $V_1(a,0)$ و $V_2(-a,0)$ رأسا القطع

2- $M_1(0,b)$ و $M_2(0,-b)$ قطبا القطع

3- $F_1(c,0)$, $F_2(-c,0)$ بؤرتا القطع وتقعان على المحور الكبير للقطع الناقص

4- طول المحور الكبير $= 2a$ وحدة طول

5- طول المحور الصغير $= 2b$ وحدة طول

6- المسافة بين البؤرتين $= 2c$ وحدة طول

ملاحظة

1. مساحة القطع : $A = ab\pi$

2. محيط القطع : $P = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

* العلاقة بين a, b, c تكون : $\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$

* الاختلاف المركزي (e)

$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ حيث $e < 1$

مثال 1 : جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه على محور السينات والمسافة بين بؤرتيه (6) وحدات والفرق بين طولي محوريه يساوي (2) وحدة.

الحل / $2c = 6 \Rightarrow c = 3$

$2a - 2b = 2 \quad \div 2$

$a - b = 1 \Rightarrow a = b + 1 \quad \ldots (1)$

$a^2 = b^2 + c^2 \quad \ldots (2)$

نعوض (1) في (2)

$(b+1)^2 = b^2 + 9 \Rightarrow \cancel{b^2} + 2b + 1 = \cancel{b^2} + 9$

$\Rightarrow 2b = 8 \Rightarrow b = 4$

نعوض قيمة b في (1) $a = 4 + 1 \Rightarrow a = 5$

معادلة القطع $\therefore \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

_ماكو أحلى من كلِمة (أعرفك) بنص هوسة التبريّر .💜

مثال 2 / جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين ويقطع من محور السينات جزء طول (8) وحدات ، ومن محور الصادات جزءاً طوله (6) وحدات ثم جد المسافة بين البؤرتين ومساحة منطقته ومحيطه .

الحل /

المحور الكبير يقع على محور السينات $2a=8 \Rightarrow a=4$

المحور الصغير يقع على محور الصادات $2b=6 \Rightarrow b=3$

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow 16=9+c^2 \Rightarrow c=\sqrt{7}$$

المسافة بين البؤرتين $\Rightarrow 2c=2\sqrt{7}$

معادلة القطع $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$

$A=ab\pi \Rightarrow A=4(3)\pi=12\pi$ وحدة مربعة

$P=2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = 2\pi\sqrt{\frac{16+9}{2}}=2\pi\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)=5\sqrt{2}\pi$ وحدة

_ و كن في الدعاء لحوحاً ، فقد اوشك السهم أن يصيب ❤️🤲

مثال 3: جد طول المحورين واحداثي البؤرتين والرأسين والقطبين والاختلاف المركزي للقطع الناقص $16x^2+25y^2=400$

الحل/ $16x^2+25y^2=400 \quad \div 400$

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}&=1\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}&=1\end{aligned}\right\}\ \text{بالمقارنة}$$

الرأسان $a^2=25 \Rightarrow a=5 \Rightarrow V_1(5,0),\ V_2(-5,0)$

القطبان $b^2=16 \Rightarrow b=4 \Rightarrow M_1(0,4),\ M_2(0,-4)$

$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow 25=16+c^2 \Rightarrow c^2=9 \Rightarrow c=3$

البؤرتان $c=3 \Rightarrow F_1(3,0),\ F_2(-3,0)$

طول المحور الكبير $\Leftarrow 2a=10$

طول المحور الصغير $=2b$

$2b=8$

الاختلاف المركزي: $e=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}<1$

مثال 3: جد طول المحورين واحداثي البؤرتين والرأسين والقطبين والاختلاف المركزي للقطع الناقص $16x^2+25y^2=400$

الحل/ $16x^2+25y^2=400 \quad \div 400$

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}&=1\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}&=1\end{aligned}\right\}$$ بالمقارنة

الرأسان $a^2=25 \Rightarrow a=5 \Rightarrow V_1(5,0),\ V_2(-5,0)$

القطبان $b^2=16 \Rightarrow b=4 \Rightarrow M_1(0,4),\ M_2(0,-4)$

$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow 25=16+c^2 \Rightarrow c^2=9 \Rightarrow c=3$

البؤرتان $c=3 \Rightarrow F_1(3,0),\ F_2(-3,0)$

طول المحور الكبير $\Leftarrow 2a=10$

طول المحور الصغير $= 2b$

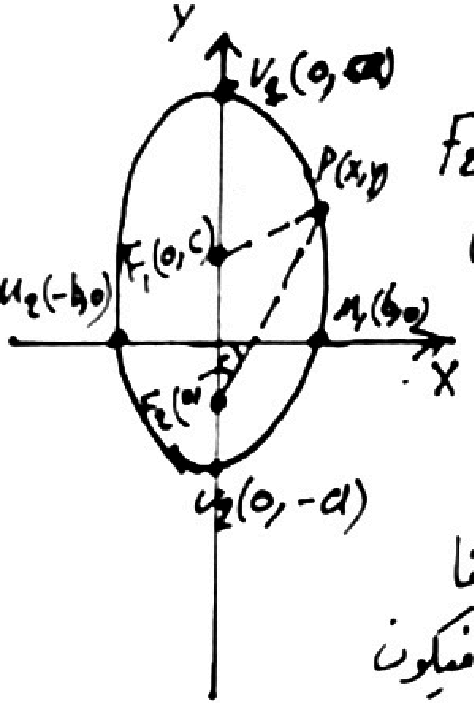
$2b=8$

الاختلاف المركزي: $e=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}<1$

٣/ القطع الناقص

* معادلة قطع ناقص الذي بؤرتاه تنتمي لمحور الصادات ومركزه نقطة الأصل

ملاحظات: في القطع الناقص الذي بؤرتاه تنتمي لمحور الصادات يكون إحداثي كل من:



أ) البؤرتان: $F_1(0, c)$, $F_2(0, -c)$

ب) الرأسان: $V_1(0, a)$, $V_2(0, -a)$

ج) القطبان: $M_1(b, 0)$, $M_2(-b, 0)$

ملاحظة ②: تبقى القوانين الأخرى نفسها كما هو الحال عندما تنتمي بؤرتاه لمحور السينات فيكون

* طول المحور الكبير $= 2a$ وحدة
* طول المحور الصغير $= 2b$ وحدة
* المسافة بين البؤرتين $= 2c$ وحدة
* العلاقة بين a, b, c: $\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$
* التعريف: $PF_1 + PF_2 = 2a$
* الاختلاف المركزي $e = \frac{c}{a} < 1$
* المساحة: $A = ab\pi$
* المحيط $P = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

ملاحظة 3 : يمكننا الاستدلال على نوع القطع الناقص سيني ام صادي من الحالات الآتية :

١- من احداثيات الرأس ٢- من احداثيات البؤرة

٣- من احداثيات الاقطاب ٤- من المعادلة نفسها

٥- من انطباق احد محوريه على احد المحورين الاحداثيين

ملاحظة 4 : لا يمكننا ان نستدل على نوع القطع الناقص سيني ام صادي من الحالات الآتية :

١. من المسافات (مثل طول المحور الكبير أو الصغير أو المسافة بين البؤرتين)

٢. من المساحة أو المحيط

٣. من الاختلاف المركزي

* صباح بهِ أنتِ لا أدري الشمس أكثر إشراقاً فيه أم حظي . 😍