مثال ① : جد المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه $F_1(0,2)$, $F_2(0,-2)$ ويتقاطع مع محور السينات عند $x=\mp 4$

الحل/ نوع القطع يكون صادي لكون بؤرتاه تنتمي لمحور الصادات

من خلال قيم F نجد $c=2$

ومن خلال التقاطع مع محور السينات نجد $b=4$

$$\therefore\ a^2=b^2+c^2 \Rightarrow a^2=16+4 \Rightarrow a^2=20$$

معادلة القطع $\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1 \Rightarrow \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{20}=1$

مثال ② جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين ويقطع من محور السينات جزءاً طوله 8 وحدات ومساحة منطقته 24π وحدة مساحة.

الحل/ $A=ab\pi \Rightarrow 24\pi=ab\pi \Rightarrow b=\dfrac{24}{a}$ ..①

$\therefore$ يوجد هنالك احتمالان :

1. عندما يكون القطع سيني ⇐ $2a=8 \Rightarrow a=4 \Rightarrow b=\dfrac{24}{4}=6>a$ يهمل

2. اذا كان القطع صادي ⇐ $2b=8 \Rightarrow b=4 \Rightarrow 4=\dfrac{24}{a} \Rightarrow a=6$

$\therefore$ معادلة القطع $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{36}=1$

مثال ③ : جد طول المحورين واحداثي البؤرتين والرأسين والقطبين والاختلاف المركزي للقطع الناقص $9x^2+5y^2=45$

الحل/ $9x^2+5y^2=45 \quad (\div 45)$

$$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1$$

$$\therefore b^2=5 \quad , \quad a^2=9$$

$$\therefore V_1(0,3) , V_2(0,-3) \Leftarrow a^2=9$$

$$M_1(\sqrt{5},0) , M_2(-\sqrt{5},0) \Leftarrow b^2=5$$

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow 9=5+c^2$$

$$\Rightarrow c^2=4$$

$$F_1(0,2) , F_2(0,-2) \Leftarrow c^2=4 \therefore$$

طول المحور الكبير $= 2a$

طول المحور الكبير $= 2\times3 = 6$ وحدة

طول المحور الصغير $= 2b = 2\times\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$ وحدة

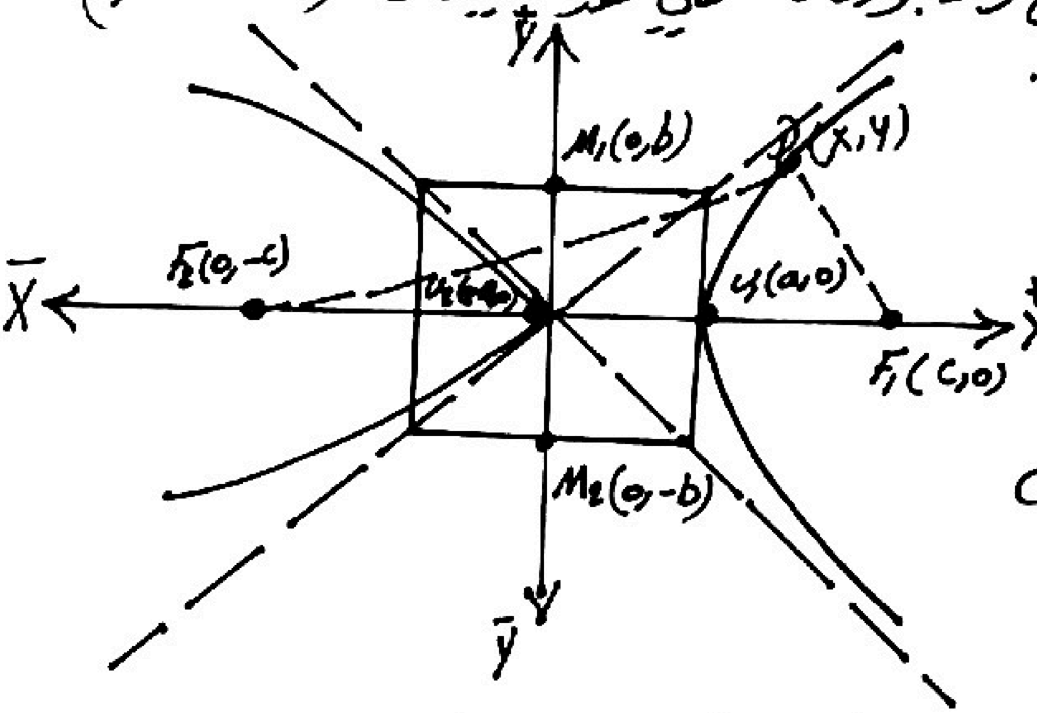
الاختلاف المركزي $1 > \frac{2}{3} = \frac{c}{a} = e$

* القطع الزائد (Hyperbola) :

Def : is the set of points in plane whose distance from two fixed points have a constant difference (2a).

أي القطع الزائد : هو مجموعة النقط في المستوي التي تكون القيمة المطلقة لفرق بعدي أي منها عن نقطتين ثابتتين تسميان البؤرتين يساوي عدداً ثابتاً قيمته (2a) .

① معادلة قطع زائد بؤرتاه تنتمي لمحور السينات (X - axis) ومركزه نقطة الأصل .



ملاحظة
العلاقة بين c, b, a

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

$PF_1 - PF_2 = 2a$ (التعريف)

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$ ⟵ معادلة قطع زائد بؤرتاه ∈ للسينات

حيث أن : $a > b$ أو $a < b$ أو $a = b$

الرأسان والبؤرتان والقطبان وطول المحورين تبقى نفس قيمها كما هو الحال في معادلة قطع ناقص بؤرتاه ∈ للسينات

مثال (1) / جد معادلة القطع الزائد الذي طول محوره الحقيقي (الكبير) يساوي (٦) وحدات والاختلاف المركزي يساوي (٢) وبؤرتاه تقعان على محور السينات .

الحل / $2a=6 \Rightarrow a=3$

$e=\frac{c}{a} \Rightarrow 2=\frac{c}{3} \Rightarrow c=6$

$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow 36=9+b^2 \Rightarrow b^2=27$

المعادلة القطع $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{27}=1}$

مثال (2) / جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه تقع على محور السينات اذا علمت أن طول محوره المرافق (الصغير) يساوي (12) وحدة والنسبة بين بؤرتيه وطول محوره الصغير تساوي ($\frac{5}{3}$)

الحل /

$2b=12 \Rightarrow b=\frac{12}{2}=6$

$\frac{2c}{2b}=\frac{5}{3} \Rightarrow \frac{2c}{12}=\frac{5}{3} \Rightarrow 3c=30 \Rightarrow c=10$

$\because c^2=a^2+b^2 \Rightarrow 100=a^2+36 \Rightarrow a^2=64$

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{}$

البقاء ليس للأقوى ;
البقاء للأوفى ، للألطف ،للأحن ، للأنقى و الأجمل أثراً

مثال③ / عين البؤرتين والرأسين والقطبين وطول المحورين للقطع الزائد الذي معادلته $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$

Sol)

$$\left.\begin{array}{l}\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\end{array}\right\}$$ بالمقارنة

$a^2 = 64 \Rightarrow a = 8$

$b^2 = 36 \Rightarrow b = 6$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 64 + 36 \Rightarrow c = 10$

∴ البؤرتان : $F_1(10,0)\,,\,F_2(-10,0)$

الرأسان : $V_1(8,0)\,,\,V_2(-8,0)$

القطبان : $M_1(0,6)\,,\,M_2(0,-6)$

طول المحور الكبير (الحقيقي) $= 2a$

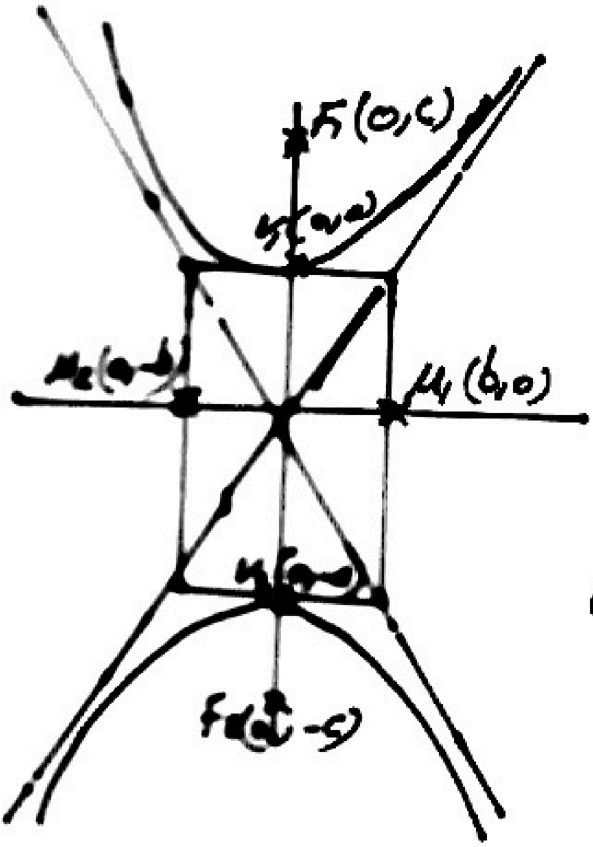
$= 2 \times 8 = 16$ وحدة طول

طول المحور الصغير (المرافق) $= 2b$

$= 2 \times 6 = 12$ وحدة طول

* القطع الزائد (Hyperbola)

② معادلة قطع زائد بؤرتاه ∋ لمحور الصادات (شكل - ٢)



$$PF_1 - PF_2 = 2a$$

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1}$$

المعادله القياسيه للقطع الزائد الذي بؤرتاه ∋ لمحور الصادات

١. الرأسان : $V_1(0,a)$, $V_2(0,-a)$

٢. القطبان : $M_1(b,0)$, $M_2(-b,0)$

٣. البؤرتان : $F_1(0,c)$, $F_2(0,-c)$

*ملاحظه / ① العلاقة بين c, b, a : $\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$

٢. الاختلاف المركزي $e > 1$

*ملاحظه ② اذا بدأت المعادله القياسيه بـ $\frac{x^2}{a^2}$ فالقطع يكون سيني.

③ اذا بدأت المعادله القياسيه بـ $\frac{y^2}{a^2}$ فالقطع يكون صادي.

④ طول المحور الكبير (الحقيقي) $= 2a$

⑤ 〃 المحور الصغير (المرافق) $= 2b$

مثال ① / جد معادلة القطع الزائد الذي طول محوره المرافق (4) وحدات وبؤرتاه $(0,-\sqrt{8})$, $F_2(0,-\sqrt{8})$, $F_1(0,\sqrt{8})$

الحل / طول المحور المرافق (الصغير) $= 2b$

$$\therefore 2b = 4 \Rightarrow b = \frac{4}{2} = \boxed{2}$$

$$\because F_1(0,\sqrt{8}) \Rightarrow c = \boxed{\sqrt{8}}$$

$$\because c^2 = a^2 + b^2$$

$$\therefore 8 = a^2 + 4 \Rightarrow a^2 = 8 - 4 = \boxed{4}$$

يعتبر القطع زائد ⊃ لمحور الصادات لكون البؤرتان ⊃ للصادات

$$\therefore \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

$$\boxed{\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{4} = 1}$$ معادلة القطع الزائد

اجعل علاقتك مع الناس كأوراق الشجر..؟
من يبقى يُثمر🌴
ومن يسقط لا يعود !! 🍁🍂

مثال ② / جد احداثيي البؤرتين والرأسين والقطبين والاختلاف المركزي وطول كل من محوري القطع الزائد

$$16y^2 - 9x^2 = 144$$

الحل /

$$16y^2 - 9x^2 = 144 \quad \div 144$$

بالمقارنة

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$$

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

$$a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$$

$$\therefore v_1(0,3), v_2(0,-3)$$

$$b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$$

$$\therefore M_1(4,0), M_2(-4,0)$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 9 + 16 \Rightarrow c^2 = 25 \Rightarrow c = 5$$

$$\therefore F_1(0,5), F_2(0,-5)$$

طول المحور الكبير $= 2a \Leftarrow 2 \times 3 = \boxed{6}$

طول المحور الصغير $= 2b \Leftarrow 2 \times 4 = \boxed{8}$

الاختلاف المركزي $= \frac{c}{a} = \frac{5}{3} > 1$

* Partial Derivatives : المشتقات الجزئية

Def: let $Z=F(x,y)$ be a function of two variable
If y is fixed we can derive with respect to x

$$\frac{\partial z}{\partial x} = Z_x = \frac{\partial F}{\partial x} = F_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x_0+\Delta x, y_0) - F(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

and If x is fixed, Then we can derive with respect to y

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y} = Z_y = F_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{F(x_0, y_0+\Delta y) - F(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

Ex) let $z=(x^2+y^3)^4$, then find $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$

Sol) $\frac{\partial z}{\partial x} = 4(x^2+y^3)^3 \cdot 2x = 8x(x^2+y^3)^3$

$\frac{\partial z}{\partial y} = 4(x^2+y^3)^3 \cdot 3y^2 = 12y^2(x^2+y^3)^3$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x} = 24x(x^2+y^3)^2 \cdot 2x + 8(x^2+y^3)^3 = 48x(x^2+y^3)^2 + 8(x^2+y^3)^3$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x} = 36y^2(x^2+y^3)^2 \cdot 3y^2 + 24y(x^2+y^3)^3$
$= 108y^4(x^2+y^3)^2 + 24y(x^2+y^3)^3$

Def : A function $z=f(x,y)$ is called Harmonic function Iff satisfy the Laplace's equation:

$$F_{xx}+F_{yy}=0$$

Ex) Show that $z=e^{-y}\cos x$ is harmonic

Sol) $z=e^{-y}\cos x$

$$z_x=-e^{-y}\sin x$$

$$z_{xx}=-e^{-y}\cos x$$

$$z_y=e^{-y}\cos x$$

$$z_{yy}=e^{-y}\cos x$$

$$z_{xx}+z_{yy}=0$$

$\therefore$ f is harmonic

* ومن أين لي بِـ هُدهُد سليمان ليأتيني بـ نبأ منك.؟

* Chain Rule : قاعدة السلسلة

تتضمن الآتي :

1. $Y=F(n)$, If (F) is differentiable function in (n)
$n=g(x)$, If (g) is diff. func. in (x)

$$\therefore \frac{dY}{dX}=\frac{dY}{dn}\times\frac{dn}{dX}$$

Ex1) If $Y=3n^2+5$, $n=4X+3$
find $\frac{dY}{dX}$

Sol) $\frac{dY}{dn}=6n$

$\frac{dn}{dX}=4$

$$\therefore \frac{dY}{dX}=\frac{dY}{dn}\times\frac{dn}{dX}$$
$$=6n(4)$$
$$=24n$$

$\because n=4X+3$
$$=24(4X+3)\Rightarrow 96X+72$$

2. $y = f(n)$, If (f) is diff. func. in (n)

$x = g(n)$, If (g) is diff. func. in (n)

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dn} \div \frac{dx}{dn}$$

Ex2) If $x = 3n - 4$, $y = 2n + 5$, find $\frac{dy}{dx}$

sol)

$$\frac{dx}{dn} = 3$$

$$\frac{dy}{dn} = 2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dn} \div \frac{dx}{dn}$$

$$= \frac{2}{3}$$

* جـمـيـلهْ ووكآنـهـهاآ خـلـقـت مـن تـرآبِ آلـ قـمـرد 🙂 ❤

3. Let $Z = f(x,y)$, s.t (f) in Continous, and $(x),(y)$ are function of t s.t. $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ is exist, then Z will be a function of (t) and $\frac{dz}{dt} = f_x \frac{dx}{dt} + f_y \frac{dy}{dt}$

Ex3) let $Z = x^2 + y^2$, $x = \sin t$, $y = e^t$

find $\frac{dz}{dt}$?

Sol) $\frac{dz}{dt} = \frac{dF}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{dF}{dy} \cdot \frac{dy}{dt}$

$\frac{dF}{dx} = 2x = 2\sin t$, $\frac{dx}{dt} = \cos t$

$\frac{dF}{dy} = 2y = 2e^t$, $\frac{dy}{dt} = e^t$

$\therefore \frac{dz}{dt} = 2\sin t \cos t + 2e^{2t}$

_ النجاح ليس عدم فعل الأخطاء،
_ النجاح هو عدم تكرار الأخطاء.

(Directional Derivatives) "المشتقات الإتجاهية" *

Def. Let $U = U_1 i + U_2 j + U_3 k$ be a unit vector and let (L) be a line through a point $P_0(x_0, y_0, z_0)$, whose equations are $x = x_0 + tU_1$, $y = y_0 + tU_2$, $z = z_0 + tU_3$

$$= \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} = \sqrt{(tU_1)^2 + (tU_2)^2 + (tU_3)^2}$$

$$= t\sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2}$$

$$\frac{dx}{dt} = U_1, \quad \frac{dy}{dt} = U_2, \quad \frac{dz}{dt} = U_3$$

We have $$\frac{dF}{dt} = \frac{dF}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{dF}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{dF}{dz} \cdot \frac{dz}{dt}$$

$$= U_1 \frac{dF}{dx} + U_2 \frac{dF}{dy} + U_3 \frac{dF}{dz}$$

is called the derictive of (F) at the Point (P_0) in the direction of U.

and the vector $(\nabla F) = i\frac{dF}{dx} + j\frac{dF}{dy} + k\frac{dF}{dz}$ is called the gradient of F contions.

Then $\boxed{(D_of)_{P_o} = (\nabla F)_{P_o} \cdot U}$ is called derivative of (F) at the Point (P_o) in the direction of U.

Ex$_1$) Find the drivative of $F(x,y,z) = x^2 - xy - z$ at the Point $P_o(1,1,6)$ in the direction of the Vector $A = 2i - 3j + 6k$?

Sol) $(D_of)_{P_o} = (\nabla F)_{P_o} \cdot U$

The direction of the vector $A \Rightarrow \frac{A}{|A|} = U$

$|A| = \sqrt{4+9+36} = \sqrt{49} = 7$

$\therefore U = \frac{A}{|A|} = \frac{2}{7} i - \frac{3}{7} j + \frac{6}{7} k$

$\nabla F = \frac{dF}{dx} i + \frac{dF}{dy} j + \frac{dF}{dz} k$

$\frac{dF}{dx} t_{P_o} = 2x - y = 1$, $\frac{dF}{dy} t_{P_o} = -x = -1$

$\frac{dF}{dz} t_{P_o} = -1$

$\nabla F t_{P_o} = i - j - k$

$D_of = \nabla F \cdot U = (i - j - k)(\frac{2}{7} i - \frac{3}{7} j + \frac{6}{7} k)$

$= \frac{2}{7} + \frac{3}{7} - \frac{6}{7} = \frac{-1}{7}$

Ex 2) find the drivative of $F(x,y) = \cos xy$ at the point $P_0(2, \frac{\pi}{4})$ in the direction of the vector $A = 4i - j$?

$(D_u f)_{P_0} = (\nabla F)_{P_0} \cdot u$

The direction of the vector A is $\frac{A}{|A|}$

$\therefore |A| = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$

$\therefore u = \frac{A}{|A|} = \frac{4}{\sqrt{17}} i - \frac{1}{\sqrt{17}} j$

$\nabla F = \frac{\partial F}{\partial x} i + \frac{\partial F}{\partial y} j$

$\frac{\partial F}{\partial x} t_{P_0} = -y \sin xy = \frac{-\pi}{4} \sin \frac{\pi}{2} = \frac{-\pi}{4}$

$\frac{\partial F}{\partial y} t_{P_0} = -x \sin xy = -2 \sin \frac{\pi}{2} = -2$

$\therefore \nabla F t_{P_0} = \frac{-\pi}{4} i - 2j$

$D_u f = \nabla F \cdot u = (\frac{-\pi}{4} i - 2j)(\frac{4}{\sqrt{17}} i - \frac{1}{\sqrt{17}} j)$

$= \frac{-4\pi}{4\sqrt{17}} + \frac{2}{\sqrt{17}} = \frac{-\pi + 2}{\sqrt{17}}$

Limit of function : غاية الدوال

٢) الدوال الخطية : جميع الدوال الخطية لها غاية وتخضع للقوانين التالية :

ملاحظة : اذا كانت $\lim_{x\to a} f(x)$ موجودة و $\lim g(x)$ موجودة

فان : n

① $\lim_{x\to a} [F(x)]^n = [\lim f(x)]^n$

② $\lim_{x\to a} [F(x) \mp g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \mp \lim_{x\to a} g(x)$

③ $\lim_{x\to a} [c\,F(x)] = c \lim_{x\to a} f(x)$

④ $\lim_{x\to a} [F(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$

⑤ $\lim [F(x)/g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) / \lim_{x\to a} g(x)$

شرط $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$

Ex1) find $\lim_{x\to 3} (x+2)$

Sol) $\lim_{x\to 3} (x+2) = \lim_{x\to 3} x + \lim_{x\to 3} 2$

$= 3 + 2 = 5$

Ex(2) $\lim_{x\to a} x^2$

Sol) $\left[\lim_{x\to a} x\right]^2 = a^2$

Ex 3) $\lim_{x\to 2} (x+3)^3$

Sol) $\left[\lim_{x\to 2} (x+3)\right]^3$

$= \left[\lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2} 3\right]^3$

$= \left[2+3\right]^3$

$= (5)^3 = 125$

Ex 4) let $F(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$, $x \neq 1$, find $\lim_{x\to 1} f(x)$?

Sol) $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x-1} = 1 & , x > 1 \\ \frac{-(x-1)}{x-1} = -1 & , x < 1 \end{cases}$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} 1 = 1 = L_1$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} -1 = -1 = L_2$

$\because L_1 \neq L_2 \Leftrightarrow \lim_{x\to 1} f(x)$ is not exist.

Ex5) let $f(x) = \begin{cases} x^2+4 & , x \geq 1 \\ 5x & , x < 1 \end{cases}$

find ① $\lim_{x \to 1} f(x)$ ② $\lim_{x \to 2} f(x)$

Sol) ① $\lim_{x \to 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \to 1} (x^2+4) = 5 = L_1 \\ \lim_{x \to 1} (5x) = 5 \cdot 1 = 5 = L_2 \end{cases}$

$\therefore L_1 = L_2 \Leftrightarrow \lim_{x \to 1} f(x) = 5$ is exist.

② $\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} (x^2+4)$

$= (2)^2 + 4$

$= 4 + 4$

$= 8$

ملاحظة / غاية الدالة التي تمتلك تعريفاً اذا كانت

أ) نقطة الاقتراب تمثل حداً فاصلاً فتكون الغاية للجزأين

من اليمين واليسار وعند تساويهما فتكون للدالة غاية.

ب) النقطة الاقتراب لا تمثل حداً فاصلاً فتكون الغاية للجزء الذي

تنتمي له النقطة فقط.

Ex 6) find $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{(x-a)}$

Sol)

$$= \lim_{x \to a} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a})}{(x-a)} \times \frac{\sqrt{x} + \sqrt{a}}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{\overset{1}{\cancel{(x-a)}}}{\underset{1}{\cancel{(x-a)}}(\sqrt{x} + \sqrt{a})}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

ملاحظة/1 اذا كانت الداله كسرية وفيها جذر سواء ما لبسط أم المقام وعند تعويض نقطة الاقتراب فتكون $\frac{zero}{zero}$ هذا غير ممكن ويجب ضرب الداله بالعامل المنسب وتبسيطها وثم تعوض نقطة الاقتراب .

ملاحظة ② : اذا كانت الداله كسرية وكانت نتيجة التعويض المباشر $\frac{zero}{zero}$ هذا غير ممكن ينبغي التحليل بين البسط والمقام ثم اختصار الحدود المتشابهه ثم تعويض نقطة الاقتراب .

* غاية الدوال الدائرية (Limit circular Function)

ملاحظة: غاية الدوال الدائرية تخضع لقيم المبرهنات التالية والتي نقبلها بدون برهان (تحفظ قيم الغايات لهذه الدوال)

1. $\lim_{x \to 0} \sin x = 0$

2. $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$

3. $\lim_{x \to 0} \tan x = 0$

4. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

5. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1$

6. $\lim_{x \to 0} \frac{\tan ax}{ax} = 1$

7. $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$

– يضنون من بعدهم سنضيع، يا معين الغافلين اعنهم 🖤👌

Ex1) find $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{4x}$

Sol) $= \frac{1}{4} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x}$

بالضرب في $\frac{3}{3}$

$= \frac{3}{4} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x}$

$= \frac{3}{4} \times 1 = \frac{3}{4}$

Ex 2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2 4x}{x \tan 2x}$

Sol) بالقسمة البسط والمقام على x^2

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin^2 4x}{x^2}}{\frac{x \tan 2x}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin^2 4x}{x^2}}{\frac{\tan 2x}{x}}$$

$$= \frac{4 \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{4x} \cdot 4 \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{4x}}{2 \lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{2x}}$$

ضرب البسط $\frac{4}{4}$
والمقام $\frac{2}{2}$

$$= \frac{4\times 1\times 4\times 1}{2\times 1} = \frac{16}{2} = 8$$

EX 3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 4x + \tan 3x}{\sin 5x}$

Sol)

بقسمة البسط والمقام على (X) يكون

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\tan 4x}{x} + \frac{\tan 3x}{x}}{\frac{\sin 5x}{x}}$$

$$= \frac{4\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 4x}{4x} + 3\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{3x}}{5\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}}$$

$$= \frac{(4\times 1 + 3\times 1)}{5\times 1} = \frac{7}{5}$$

EX 4) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sin(x-3)}{x^2-9}$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{\sin(x-3)}{(x-3)(x+3)}$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{\sin(x-3)}{(x-3)} \cdot \frac{1}{(x+3)}$$

$$= 1\cdot\left(\frac{1}{3+3}\right) = 1\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

* إستمرارية الدالة (Continuity of function)

ملاحظة: تكون الدالة مستمرة عند $x=b$ اذا حققت الشروط الثلاث الآتية:

① $f(b)$ معرفة

② $\lim\limits_{x\to b} f(x)$ موجودة

③ $\lim\limits_{x\to b} f(x) = f(b)$

تعريف: يقال للدالة f بأنها مستمرة اذا كانت مستمرة في جميع عناصر مجالها.

مثال① : لتكن $f(x) = 8 - x^3 + 2x^2$ ، اثبت ان الدالة مستمرة عند $x=2$ ؟ حيث $F: R \to R$

الحل/

$$f(x) = 8 - x^3 + 2x^2$$

$$f(2) = 8 - (2)^3 + 2(2)^2$$

$$f(2) = 8 - 8 + 8 \Rightarrow f(2) = 8$$

$$\lim_{x\to 2} 8 - x^3 + 2x^2 = 8 - (2)^3 + 2(2)^2 = 8$$

$$\therefore \lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$$

$\therefore$ $f(x)$ مستمرة عند $x=2$

مثال ② ليكن $F: R \to R$ حيث :

$$f(x) = \begin{cases} x^2+2 & , x \geq 2 \\ 8-x & , x < 2 \end{cases}$$

ابحث استمرارية الدالة عند

① $x = 2$ ② $x = 1$

Sol) ① عند $x=2$

$$f(2) = (2)^2 + 2 = 6$$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \to 2^+} (x^2+2) = 4+2 = 6 = L_1 \\ \lim_{x \to 2^-} (8-x) = 8-2 = 6 = L_2 \end{cases}$$

$$\because L_1 = L_2 \Rightarrow \lim_{x \to 2} f(x) = 6$$

$$\because \lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = 6$$

$\therefore$ f مستمرة عند $x=2$

② عند $x=1$

$$f(x) = 8-x \Rightarrow f(1) = 8-1 = 7$$

$$\lim_{x \to 1} (8-x) = 8-1 = 7$$

$$\because f(1) = \lim_{x \to 1} f(x)$$

$\therefore$ f is Cont in $x=1$

ملاحظة/ اذا كانت الدالة تمتلك تعريفان ($\geq$ ، $>$)
وكان المطلوب ايجاد استمرارية الدالة فعندما تكون

أ) النقطة تمثل حد فاصل بين التعريفان فتكون القيمة للجزء الذي فيه علامة اليساوي $\geq$ ، والغاية تكون للجزئين (التعريفان) وعند تساويهما تكون مستمرة .

ب) النقطة لا تمثل حد فاصل بين التعريفان فتكون القيمة والغاية للجزء الذي تنتمي لهما النقطة فقط وعند تساويهما تكون مستمرة .

واجب / لتكن $F: R \to R$

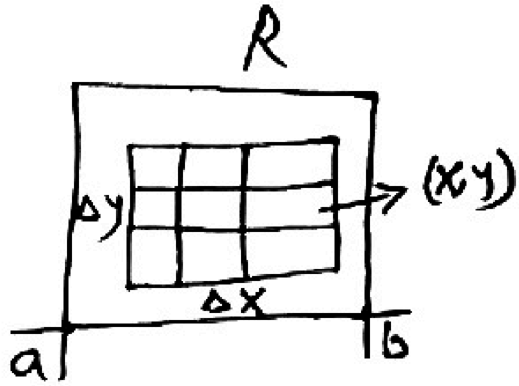
$$f(x) = \begin{cases} 6 - x^2 & , x \geq 1 \\ 4x + 1 & , x < 1 \end{cases}$$

ابحث استمرارية الدالة عند
① $x = 1$
② $x = -3$

" والمايگدر يلوحك يخرب الوادم عليك. 🍃 "

* Deuble Integrale : التكامل الثنائي

Def : Double Integrale : which of a function $f(x,y)$ of two indefent varibles on the regin R in xy-plane which denoted by $\iint\limits_R f(x,y)\,dA$



نجزئ المنطقه R بأي طريقة فمثلاً نجزئها الى مربعات
ونرمز لها $A_1, A_2, \dots, A_n$ في مساحه كل منطقه ΔA

أي
$$\Delta A_1 = \Delta x - \Delta y$$
$$\Delta A_2 = \Delta x - \Delta y$$
$$\vdots$$
$$\Delta A_n = \Delta x - \Delta y$$

فلو اخذنا من كل مربع عنصر A_1 نأخذ العنصر (x,y) وهكذا الى أن
نصل الى A_n فيكون العنصر (x_n,y_n) ثم نجد صورة هذا العنصر تحت
تأثير الداله (f) ونرمز لحاصل ضرب هذه الصورة بالمسافه (S_n)

$$S_n = f(x_1,y_1)\Delta A_1 + f(x_2,y_2)\Delta A_2 + \dots + f(x_n,y_n)\Delta A_n$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (x_k,y_k)\Delta A_k = \lim S_n = \iint f(x,y)\Delta A$$

خواص التكامل الثنائي (Propertes of double integral)

1) $\iint_R K F(x,y)\,dA = K\iint_R f(x,y)\,dA$ (K is any number)

2) $\iint_R [F(x,y)+g(x,y)]\,dA = \iint_R F(x,y)\,dA + \iint_R g(x,y)\,dA$

3) $\iint_R [F(x,y)-g(x,y)] = \iint_R F(x,y)\,dA - \iint_R g(x,y)\,dA$

4) $\iint_R F(x,y)\,dA = \iint_R f(x,y)\,dA + \iint_R f(x,y)\,dA$

5) $\iint_R f(x,y)\,dA =$ Area of R , If $f(x,y)=1$

6) $\iint_R f(x,y)\,dA =$ Volume of R , If $f(x,y)=z$

حيث أن Z : يمثل ارتفاع الجسم الذي قاعدته R وقيمته

النقطه (x,y)

- آلسعادة قرار وليس إمكانيات🤍🩸 "

EX1) Evalute $\int_0^1\int_x^{x-1} (x^2+e^y)\,dy\,dx$

Sol) $= \int_0^1 (yx^2+e^y)\Big|_x^{x-1} dx$

$= \int_0^1 \left(\left[x^2(x-1)+e^{x-1}\right]-\left[x^2(x)+e^x\right]\right)dx$

$= \int_0^1 (x^3-x^2+e^{x-1}-x^3-e^x)\,dx$

$= \frac{-x^3}{3}+e^{x-1}-e^x \Big|_0^1$

$= \left(\frac{-1}{3}+1-e\right)-\left(0+e^{-1}-1\right)$

$= \frac{5}{3}-e-e^{-1}$

EX2) $\int_0^1\int_{x^2}^{\sqrt{x}} (xy^2+x^2)\,dy\,dx$

Sol) $= \int_0^1 \frac{xy^3}{3}+yx^2 \Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} dx$

$= \int_0^1 \left[\left(\frac{x(\sqrt{x})^3}{3}+\sqrt{x}(x)^2\right)-\left(\frac{x^7}{3}+x^4\right)\right]dx$

$= \int_0^1 \frac{x^{5/2}}{3}+x^{5/2}-\frac{x^7}{3}-x^4\,dx$

$= \frac{1}{3}\;\frac{x^{7/2}}{7/2}+\frac{x^{7/2}}{7/2}-\frac{x^8}{24}-\frac{x^5}{5}\Big|_0^1$

$= \frac{39}{280}$

(Triple Integrals التكامل الثلاثي)

Def: If $F(x,y,z)$ is a function defined on a bounded region (D) in space, then the Integral of (F) over (D) may be defined in the following way.

* Properties of Triple Integral / (خواص التكامل الثلاثي)

1) $\iiint_D kF\,dV = k\iiint_D F\,dV$ (k any number)

2) $\iiint_D (F+G)\,dV = \iiint_D F\,dV + \iiint_D G\,dV$

3) $\iiint_D (F-G)\,dV = \iiint_D F\,dV - \iiint_D G\,dV$

4) $\iiint_D F\,dV \geqslant 0$, If $F \geqslant 0$ on D.

5) $\iiint_D F\,dV \geqslant \iiint_D G\,dV$, If $F \geqslant G$ on D

_ إن لم تفعل ماتحبه فأنت تضيع ايامك بلا فائدة. 🤦

EX) Evalute $\int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^2 dx\, dy\, dz$

Sol) $= \int_0^1 \int_0^{1-z} x \Big|_0^2 dy\, dz$

$= \int_0^1 \int_0^{1-z} 2\, dy\, dz$

$= \int_0^1 2y \Big|_0^{1-z} dz$

$= \int_0^1 [2(1-z) - 0]\, dz$

$= \int_0^1 (2 - 2z)\, dz$

$= 2z - \frac{2z^2}{2} \Big|_0^1$

$= [(2 - \frac{2}{2}) - 0]$

$= (2-1) = 1$

* ليس عليك أن ترد الجميل .. ولكن كن أرقى من أن تتكره ..!

Examples of Double and Triple Integrals

Ex1) Evalute $\int_1^2 \int_x^{2x} 3x^2 + 2y \, dy \, dx$

Sol) $\int_1^2 3x^2y + y^2 \Big|_x^{2x}$

$= \int_1^2 3x^2(2x) + (2x)^2 - (3x^2(x) + x^2) \, dx$

$= \int_1^2 6x^3 + 4x^2 - 3x^3 - x^2 \, dx$

$= \int_1^2 3x^3 + 3x^2 \, dx$

$= \frac{3}{4}x^4 + x^3 \Big|_1^2$

$= \frac{3}{4}(2)^4 + (2)^3 - \left(\frac{3}{4} + 1\right)$

$= \frac{3}{4} \cdot 16 + 8 - \frac{3}{4} - 1$

$= 12 + 8 - 1 - \frac{3}{4}$

$= \frac{48 + 32 - 4 - 3}{4} \Rightarrow \frac{73}{4}$

EX2) Evalute $\int_0^2 \int_0^{1+z} \int_0^{\pi/6} \cos x \, dx \, dy \, dz$

Sol) $\int_0^2 \int_0^{1+z} \sin x \Big|_0^{\pi/6} dy \, dz$

$= \int_0^2 \int_0^{1+z} \sin \pi/6 - \sin(0) \, dy \, dz$

$= \int_0^2 \int_0^{1+z} \frac{1}{2} \, dy \, dz$

$= \int_0^2 \frac{1}{2} y \Big|_0^{1+z} dz$

$= \int_0^2 \left[\frac{1}{2}(1+z) - \frac{1}{2}(0) \right] dz$

$= \int_0^2 \frac{1}{2} + \frac{1}{2} z \, dz$

$= \frac{1}{2} z + \frac{1}{2} \frac{z^2}{2} \Big|_0^2$

$= \frac{1}{2} z + \frac{1}{4} z^2 \Big|_0^2$

$= \frac{1}{2}(2) + \frac{1}{4} \cdot 4 - 0$

$= 1 + 1 = 2$

Exircise (تمارين)

Evalute the Integrales

1) $\int_{0}^{2}\int_{x}^{1-x} \sin x + x^{-2} \, dy \, dx$

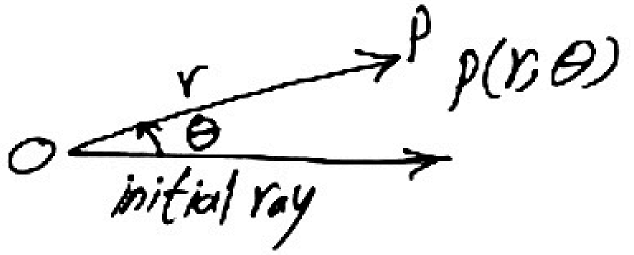
2) $\int_{1}^{2}\int_{x}^{3x} x^2 + 2x + 3y^2 \, dy \, dx$

3) $\int_{0}^{1}\int_{0}^{1-z}\int_{0}^{\pi/3} \sin 2x \, dx \, dy \, dz$

* سيخمن الاغبياء ان سبب حزنك دائماً هو الحب . 🙂

* الإحداثيات القطبية (Polar coordinates)

To define polar coordinates, we first fix an orgin (o) and an intial ray from (o) as shown below, then each point (P) can be assigned polar coordinates $P(r,\theta)$ in which the first number (r) gives the directed distance from (o) to (P), and the second number (θ) gives the directed angle from the initial ray to the segment (oP)



$P(r, \theta)$

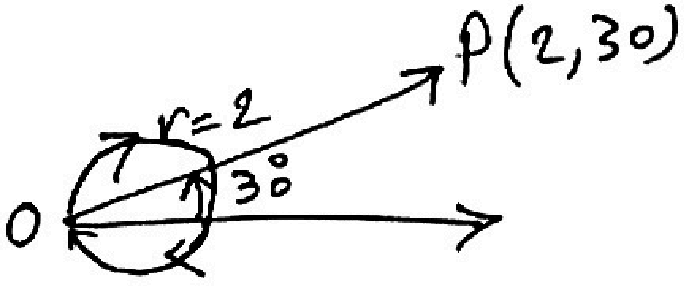
Directed distance from (o) to (P)

Directed angle from initial ray to (oP)

Note: The angle θ is positive when measured conter clock wise, and nagative when measured clock wise when a given point is not unigne.

Ex1) find all Polar Coordinates of the Point $P(2,30^\circ)$ when $r=2$

Sol)



$$P(2,30^\circ) = (2, 30 + n \cdot 360), \ n = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$$

So $n=0 \Rightarrow P(2,30^\circ)$

$n=\mp 1 \Rightarrow P(2,390^\circ) = P(2,-330^\circ)$

$n=\mp 2 \Rightarrow P(2,750^\circ) = P(2,-690^\circ)$

$\vdots$

when $r=-2$

$$P(-2,210) = (-2, 210 + n \cdot 360), \ n = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$$

So $n=0 \Rightarrow P(-2,210^\circ)$

$n=\mp 1 \Rightarrow P(-2,570^\circ) = P(-2,-150^\circ)$

$\vdots$

Ex2) find all Polar coordinates of the Point $P(2,-60°)$ when $r=2$

Sol) $P(2,-60°)=(2,-60°+n\cdot 360°)$, $n=0,\mp1,\mp2,\ldots$

So $n=0 \Rightarrow P(2,-60°)$

$n=\mp1 \Rightarrow P(2,300°)=P(2,-420°)$

$n=\mp2 \Rightarrow P(2,660°)=P(2,-780°)$

$\vdots$

when $r=-2$

$P(-2,120)=(-2,120°+n\cdot 360°)$, $n=0,\mp1,\mp2\ldots$

So: $n=0 \Rightarrow P(-2,120°)$

$n=\mp1 \Rightarrow P(-2,480°)=P(-2,-240°)$

$\vdots$

* هواي همه وذاك من ذاك اليعزك من صدك 🖤

الصيغه الكارتيزية والصيغة القطبية للمعادلات
(cartesian equations and Polar equations)

ملاحظة ①: إن قيم المجاهيل في المعادله الكارتيزية y, x تقابل القيم التاليه في المعادلة القطبية :

1) $x = r\cos\theta$

2) $y = r\sin\theta$

ملاحظة ②: أن قيمة $r^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta$

$r^2 = x^2 + y^2$

ملاحظة ③: يمكننا تحويل أي معادله من الصيغه القطبيه الى قيمه تلك المعادله بالصيغه الكارتيزية والعكس صحيح .

#بنت_الرياضيات 🖤
جميلة للحد اللذي تستطيع فيه إقناع أسد أن يتوقف عن أكل اللحوم وإستبدالها بالخضروات....🙂😊

Ex 1) find the Cartesian equations, which is equevalent the following Polar equations

1) $r\cos\theta = 2$

2) $r\sin\theta = -1$

3) $r\sin\theta + r\cos\theta = 1$

4) $r\sin\theta = e^{r\cos\theta}$

5) $r^2 = 3r\cos\theta$ (H.W)

Sol) 1) $r\cos\theta = 2$

$\because x = r\cos\theta$

$\therefore x = 2$ (cartesian eq.)

2) $r\sin\theta = -1$

$\because r\sin\theta = y$

$\therefore y = -1$ (cart. eq.)

3) $r\sin\theta + r\cos\theta = 1$

$\because r\sin\theta = y$, $r\cos\theta = x$

$\therefore y + x = 1$ (cart. eq)

4) $r\sin\theta = e^{r\cos\theta}$

$\therefore r\sin\theta = y$, $r\cos\theta = x$

$\therefore y = e^{x}$ (cart. eq)

ملاحظة: فيما يتعلق بقيم ضعف الزاوية لكل من دالتي
$\sin 2\theta$, $\cos 2\theta$ فان قيمهما تساوي :

1) $\sin 2\theta = 2\cos\theta \sin\theta$

2) $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

Ex 2) find the cart. eq, which is equevalent the following polar. eq.

$$r^2 \sin 2\theta = 2$$

Sol) $r^2 \sin 2\theta = 2$

$\Rightarrow r^2[2\cos\theta \sin\theta] = 2$

$\Rightarrow 2r\cos\theta \cdot r\sin\theta = 2$

$\Rightarrow 2xy = 2 \quad \div 2$

$\Rightarrow xy = 1$ (cart. eq)

* التسلق الى القمة شاق لكن المنظر عند الوصول يستحق ذلك التعب ...

EX3) find the Polar equations, which is equivalent the following Cartesian equations

1) $x^2+y^2=4$

2) $x^2-y^2=1$

3) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

4) $y^2=4x$

5) $xy=2$ (H.W)

Sol) 1) $x^2+y^2=4$

$\because r^2=x^2+y^2$

$\therefore r^2=4$ (Polar.eq.)

2) $x^2-y^2=1$

Sol) $(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2=1$

$r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta=1$ (Polar eq.)

3) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

Sol) $\frac{(r\cos\theta)^2}{9}+\frac{(r\sin\theta)^2}{4}=1 \Rightarrow \frac{r^2\cos^2\theta}{9}+\frac{r^2\sin^2\theta}{4}=1$ (Pol. eq.)

4) $y^2=4x$

$(r\sin\theta)^2 = 4\, r\cos\theta$

$r^2\sin^2\theta = 4\cos\theta$ (eol.eq)

* قوانين الاحتمال (Laws of Probability)

وضعت قوانين الاحتمال التالية لتسهيل حساب درجة الاحتمال عند وقوع حدثين او اكثر بدلاً من ايجادها عن طريق تعريف نسبة الاحتمال والتي يكون من الصعوبة في مثل هذه الحالات حساب عدد الحالات الممكنة. وقبل شرح قوانين الاحتمال نفرض لدينا حدثين B, A فالتعابير التالية يقصد بها مايلي :-

أ) احتمال وقوع الحدث A أو الحدث B = $P(A+B)$

ب) احتمال وقوع الحدث A والحدث B معاً = $P(AB)$

جـ) احتمال وقوع B علماً بأن الحدث A قد وقع = $P(B/A)$ (الاحتمال الشرطي)

التفاصيل :-

أ) قانون الجمع (Addition Law)

١- اذا كانت الاحداث متنافية

تعريف :- اذا كان A ، B حدثان متنافيان فان احتمال حدوث أي منهما (A أو B) يمثل حاصل جمع احتمال كل منهما

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

مثال (1) : صندوق يحتوي على 4 كرات سوداء و 5 كرات بيضاء و 3 كرات حمراء ، فاذا سحبت كرة واحدة فما هو احتمال أن تكون اما سوداء أو بيضاء ؟

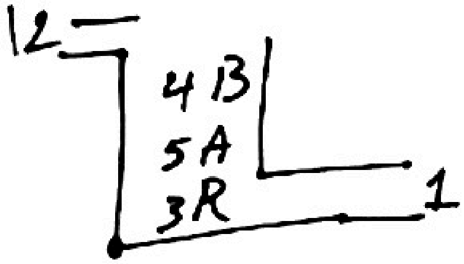
$$n(S) = 4+5+3 = 12$$

ليكن A حدث يمثل الكرة البيضاء المسحوبة

ليكن B حدثا يمثل الكرة السوداء المسحوبة

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

$$= \frac{5}{12} + \frac{4}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$



مثال (2) : عند رمي زهرة نرد ما هو احتمال الحصول على عدد زوجي .

الحل / احداث الحصول على عدد زوجي هي :

$$A = \{2\} \ , \ B = \{4\} \ , \ C = \{6\}$$

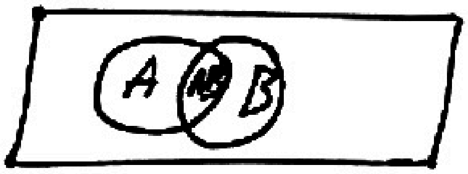
$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

٢- اذا كانت الاحداث غير متنافية

تعريف ١ : اذا كانت A ، B حدثان غير متنافيين فان احتمال حدوث أي منهما (A أو B) هو حاصل جمع احتمال كل منهما ناقصاً احتمال حدوثهما معاً أي :

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$



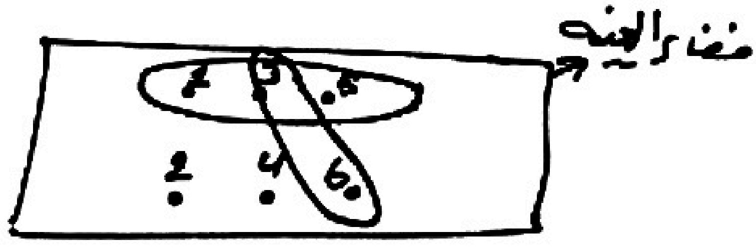
مثال ① اذا ألقي زار مرة واحدة فما هو احتمال ظهور عدد يكون فردياً أو يقبل القسمة على ٣ ؟

الحل/ ليكن A : الحدث فردياً فيكون $A=\{1,3,5\}$

ليكن B : الحدث يقبل القسمة على ٣ فيكون $B=\{3,6\}$

ليكن AB : حدث فردي ويقبل القسمة على ٣ فيكون $AB=\{3\}$

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$
$$=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}-\frac{1}{6}=\frac{4}{6}$$



مثال (2): اذا كان الرجل (A) يصيب هدفاً ما بأحتمال ($\frac{1}{4}$) وان الرجل (B) يصيب نفس الهدف بأحتمال ($\frac{2}{5}$) فما هو احتمال أصابة الهدف اذا صوب A أو B نحو الهدف؟

الحل/

$$P(A) = \frac{1}{4}$$

$$P(B) = \frac{2}{5}$$

وبما أن A ، B احداث مستقلة

$$\therefore P(AB) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{10}$$

$$\therefore P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{2}{5} - \frac{1}{10} = \frac{11}{20}$$

مثال (3): في احدى الكليات 25% من الطلبة رسب بالرياضيات 15% رسب في الكيمياء و 10% رسب في كلاً من الرياضيات والكيمياء، فاذا اختير طالب منهم عشوائياً فما هو احتمال أن يكون راسباً في الرياضيات والكيمياء

الحل نرمز للرياضيات بالرمز M ، والكيمياء بالرمز C

$$P(M+C) = P(M) + P(C) - P(MC)$$

$$= 0.25 + 0.15 - 0.10 = 0.30$$