التحليل الدالي

Functional Analysis

EX.: let $L = C[0,1]$, $\langle \, , \, \rangle : L \times L \to \mathbb{R}$

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t) g(t) \, dt$$

show that $\langle \, , \, \rangle$ is I.P.S. on L.

Solution:

① $\langle f,f \rangle = \int_0^1 f(t).f(t) \, dt = \int_0^1 (f(t))^2 dt \geq 0$

② $\langle f,f \rangle = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 (f(t))^2 dt \Leftrightarrow (f(t))^2 = 0$

$\Leftrightarrow f(t) = 0 \quad \forall \, t \in [0,1]$. ($f = \hat{0}$ دالة صفرية)

③ let $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $f, g, h \in L$

$$\langle \alpha f + \beta g, h \rangle = \int_0^1 (\alpha f + \beta g)(t) \, h(t) \, dt$$

$$= \int_0^1 (\alpha f(t) + \beta g(t)) \, h(t) \, dt$$

$$= \int_0^1 [\alpha f(t). h(t)] dt + [\beta g(t). h(t)] dt$$

$$= \alpha \int_0^1 f(t). h(t) dt + \beta \int_0^1 g(t). h(t) dt$$

$$= \alpha \langle f, h \rangle + \beta \langle g, h \rangle$$

$\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$ H.w.

H.W: let $f(x) = x+1$, $g(x) = x^2$, $h(x) = 3x+2$ $\forall x \in [0,1]$.

Find: $\langle f,f \rangle$, $\langle f+g, h \rangle$, $\langle f,h \rangle$, $\langle 2f+3g, h \rangle$.

Theorem: Every inner product space is a normed space and hence a metric space.

Proof: let $(L, \langle , \rangle)$ is an I.P.S. and let $\| \, \| : L \longrightarrow R$ is defined by

$$\|x\| = \sqrt{\langle x,x \rangle} \quad \forall x \in L$$

(1) since $\langle x,x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in L \Rightarrow$

$$\|x\| = \sqrt{\langle x,x \rangle} \geq 0 \quad \forall x \in L$$

(2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\langle x,x \rangle} = 0 \Leftrightarrow \langle x,x \rangle = 0$

$\Leftrightarrow \cancel{x = 0x} \; \boxed{x = 0_X}$

(3) let $\alpha \in F$ and $x \in L$

$$\|\alpha x\|^2 = \langle \alpha x, \alpha x \rangle = \alpha \bar{\alpha} \langle x,x \rangle = |\alpha|^2 \|x\|^2$$

Thus: $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$

EX. : $X = (\overset{x_1}{2}, \overset{x_2}{1})$, $Y = (\overset{y_1}{0}, \overset{y_2}{-3})$, $Z = (\overset{z_1}{3}, \overset{z_2}{4})$

Find $\langle X, Z \rangle$, $\langle X, X \rangle$, $\langle X+Y, Z \rangle$

تعريف I.P.S حسب المثال السابق.

Solution :

$$\langle X, Z \rangle = x_1 z_1 + x_2 z_2 = 2.3 + 1.4$$
$$= 6 + 4 = 10$$

$$\langle X, X \rangle = x_1 . x_1 + x_2 . x_2 = x_1^2 + x_2^2 = (2)^2 + (1)^2$$
$$= 4 + 1 = 5$$

$$\langle X+Y, Z \rangle = ?$$

$$X = (2, 1) \ , \ Y = (0, -3) \Rightarrow X+Y = x_1 y_1 + x_2 y_2$$
$$= 2.0 + 1.{}^{-}3$$
$$= -3$$

$\boxed{\text{H.w : } \langle 2X + 3Y, Z \rangle}$

EX.: $L = \mathbb{C}^2$ and

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^{2} x_i \bar{y}_i \quad \forall X, Y \in \mathbb{C}^2$$

where: $X = (x_1, x_2)$, $Y = (y_1, y_2)$

If $X = (\overset{x_1}{2+3i}, \overset{x_2}{1+i})$, $Y = (\overset{y_1}{1+i}, \overset{y_2}{1-i})$

$Z = (\overset{z_1}{2}, \overset{z_2}{1+i})$

Find: $\langle X, X \rangle$, $\langle X+Y, Z \rangle$, $\langle X, Y+Z \rangle$

Solution:

$$\langle X, X \rangle = \sum_{i=1}^{2} x_i \bar{x}_i = x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2$$

$$= (2+3i)(2-3i) + (1+i)(1-i)$$

$$= (2)^2 + (3)^2 + (1)^2 + (1)^2$$

$$= 4 + 9 + 1 + 1 = 15$$

$$\langle X+Y, Z \rangle = ?$$

$$X = (x_1, x_2) = (2+3i, 1+i)$$

$$Y = (y_1, y_2) = (1+i, 1-i)$$

$$X+Y = ((2+3i)+(1+i), (1+i)+(1-i))$$

$$= (3+4i, 2) = (r_1, r_2) \qquad r_1 = 3+4i, \; r_2 = 2$$

$$\therefore \langle X+Y, Z \rangle = \sum_{i=1}^{2} r_i \bar{z}_i = r_1\bar{z}_1 + r_2\bar{z}_2$$

$$= (3+4i)(2) + (2)(1-i)$$

H.W $\langle X, Y+Z \rangle$

Inner Product Space :

Let L is a linear space over F.

$< , > : L \times L \longrightarrow F$ is called an inner product on L if

(1) $<x, x> \geqslant 0 \quad \forall x \in L$.

(2) $<x, x> = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

(3) $\overline{<x, y>} = <y, x> \quad \forall x, y \in L$, where,

$\overline{<x, y>}$ = conjugate of $<x, y>$

(4) $<\alpha x + \beta y, z> = \alpha <x, z> + \beta <y, z> \quad \forall x, y, z \in L$

$\therefore$ $(L, < , >)$ is called inner product space or Pre-Hilbert space. (I.P.S.)

Examples: let $L = \mathbb{R}^2$, and let $\quad X = (x_1, x_2)$, $Y = (y_1, y_2)$

$< , > : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow F$ is defined as $\quad Z = (z_1, z_2)$

$<X, Y> = x_1 y_1 + x_2 y_2 \quad \forall X, Y \in \mathbb{R}^2$.

$X = (x_1, x_2)$, $Y = (y_1, y_2)$

show that $< , >$ is I.P.S. ?

Solution : $\cancel{X}= \langle x_1, x_2 \rangle$ $\quad X = (x_1, x_2)$

الشرط الأول : $\langle X, X \rangle = x_1 \cdot x_1 + x_2 \cdot x_2 = x_1^2 + x_2^2 \geq 0$

الشرط الثاني : $\langle X, X \rangle = 0 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 = 0 \Leftrightarrow$
$x_1 = x_2 = 0 \Leftrightarrow X = (0, 0).$

الشرط الثالث : $\langle X, Y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 = y_1 x_1 + y_2 x_2 = \overline{\langle X, Y \rangle}$

الشرط الرابع : $\langle \alpha X + \beta Y, Z \rangle \overset{?}{=} \alpha \langle X, Z \rangle + \beta \langle Y, Z \rangle$

$X = (x_1, x_2) \Rightarrow \alpha X = \alpha (x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2)$

$Y = (y_1, y_2) \Rightarrow \beta Y = \beta (y_1, y_2) = (\beta y_1, \beta y_2)$

$Z = (z_1, z_2)$

$\therefore \alpha X + \beta Y = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2)$

$$\begin{aligned} \therefore \langle \alpha X + \beta Y, Z \rangle &= (\alpha x_1 + \beta y_1) z_1 + (\alpha x_2 + \beta y_2) z_2 \\ &= \alpha x_1 z_1 + \beta y_1 z_1 + \alpha x_2 z_2 + \beta y_2 z_2 \\ &= (\alpha x_1 z_1 + \alpha x_2 z_2) + (\beta y_1 z_1 + \beta y_2 z_2) \\ &= \alpha (x_1 z_1 + x_2 z_2) + \beta (y_1 z_1 + y_2 z_2) \\ &= \alpha \langle X, Z \rangle + \beta \langle Y, Z \rangle \end{aligned}$$

(4) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$?

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle$$
$$= \langle x,x\rangle + \langle y,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle$$
$$= \|x\|^2 + \overline{\langle x,y\rangle} + \langle x,y\rangle + \|y\|^2$$
$$= \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle x,y\rangle + \|y\|^2$$
$$\leq \|x\|^2 + 2|\langle x,y\rangle| + \|y\|^2$$
$$\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 \quad \text{(By Cauchy Schwarz)}$$
$$= (\|x\| + \|y\|)^2$$

$\therefore$ $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

محاضرة تحليل دالي

Product of Normed Space

Def/ Let $(L, \| \|_L)$, $(L', \| \|)$ be a normed space over field F and $L \times L' = \{(x, y), x \in L, y \in L'\}$

is said to be cartesian product of L and L'

Define $+$ on $L \times L'$ by   تعريف عملية الجمع والضرب

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$
$$\forall (x_1, y_1) + (x_2, y_2) \in L \times L'$$

Define scalar multiplication

$$\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y) \quad \forall (\alpha x, \alpha y) \in L \times L'$$
$$\forall \alpha \in F$$

Ex // 2.18

Define $\| \| : L \times L' \longrightarrow \mathbb{R}$ s.t

1) $\|(x, y)\|_1 = \|x\|_L + \|y\|_{L'}$

2) $\|(x,y)\|_2 = \max\{\|x\|_L , \|y\|_{L'}\}$

Show that $(L\times L', \|\ \|_1)$, $(L\times L', \|\ \|_2)$ are normed space ?

Sol /

1) To show $(L\times L', \|\ \|_1)$ is normd space

i) since $\|x\|_L \geq 0$ and $\|y\| \geq 0$ $\forall x \in L, \forall y \in L'$

هنا تحقق شروط (normed) حسب التعريف المعطى في المثال

then

$$\|x\|_L + \|y\|_{L'} = \|(x,y)\| \geq 0$$

ii) $\|(x,y)\|_1 = 0 \Leftrightarrow \|x\|_L + \|y\|_{L'} = 0$

$\Leftrightarrow x = y = 0$, $(L, \|\ \|_L), (L', \|\ \|_{L'})$ are anormd space

iii) For each $(x_1,y_1) . (x_2,y_2) \in L\times L'$

$$\begin{aligned}\|(x_1,y_1)+(x_2,y_2)\|_1 &= \|(x_1+x_2, y_1+y_2)\| \\ &= \|x_1+x_2\|_L + \|y_1+y_2\|_{L'} \\ &\leq \|x_1\|_L + \|x_2\|_L + \|y_1\|_{L'} + \|y_2\|_{L'} \\ &= (\|x_1\|_L + \|y_1\|_{L'}) + (\|x_2\|_L + \|y_2\|_{L'}\end{aligned}$$

2

$\left((L, \| \|_{L}), (L', \| \|_{L'})\right)$ are normed space

$\Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$

iii) For each $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in L \times L'$

$$\|(x_1, y_1) + (x_2, y_2)\|_2 = \|(x_1 + x_2, y_1 + y_2)\|_2$$

$$= \max\{\|x_1 + x_2\|_L, \|y_1 + y_2\|_{L'}\}$$

$$\leq \max\{\|x_1\|, \|y_1\|_{L'}\} +$$

$$\max\{\|x_2\|_L, \|y_2\|_{L'}\}$$

$$= \|(x_1, y_1)\|_2 + \|(x_2, y_2)\|_2$$

IV) For each $(x, y) \in L \times L'$ and $\forall \alpha \in F$

$$\|\alpha(x, y)\|_2 = \|(\alpha x, \alpha y)\| = \max\{\|\alpha x\|_L, \|\alpha y\|_{L'}\}$$

$$= \max\{|\alpha|\,\|x\|_L, |\alpha|\,\|y\|_{L'}\}$$

$$= |\alpha| \max\{\|x\|_L, \|y\|_{L'}\}$$

$$= |\alpha|\,\|(x, y)\|$$

$$= \|(x_1, y_1)\|_L + \|(x_2, y_2)\|_{L'}$$

iv) For each $(x,y) \in X \times Y$ and for each $\alpha \in F$

$$\|\alpha(x,y)\| = \|\alpha x\|_L + \|\alpha y\|_{L'}$$

$$= |\alpha|\|x\|_L + |\alpha|\,\|y\|_{L'}$$

$$= |\alpha|\,\|(x,y)\|$$

تحققت جميع شروط Norm في هذا المثال, لنقطة رقم (1)

الآن نحقق الشرط الثاني من المثال (2) ونحقق عليه شروط (Norm).

2- Now, We show that $\|\ \|_2$ is norm on $L \times L'$

((شروط Norm))

i) Since $\|x\|_L \geq 0$ and $\|y\|_{L'} \geq 0$ $\forall x \in L$ $\forall x \in L$ and $y \in L'$ then

$$\max\{\|x\|_L, \|y\|_{L'}\} = \|(x,y)\|_2 \geq 0$$

ii) $\|(x,y)\|_2 = 0 \Leftrightarrow \max\{\|x\|_L, \|y\|_{L'}\}$

$$\Leftrightarrow \|x\|_L = \|y\|_{L'} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = y = 0$$

مثال تطبيقي عن مثال 2.18

Ex //

Let $L = (\mathbb{R}, \| \|_{\mathbb{R}})$ and $L' = (\mathbb{R}^2, \| \|_{\mathbb{R}^2})$

Where $\| \|_{\mathbb{R}^2}$ is Euclaidian norm if $X = 3 \in L \in \mathbb{R}$

$Y = (1,-2) \in \mathbb{R}^2 \in L'$. Find $\|(X,Y)\|_1$ and

$\|(X,Y)\|_2$?

Solution

$$\|(X,Y)\|_1 = \|X\| + \|Y\|_2$$

$$\|(3,(1,-2))\| = \|3\|_{\mathbb{R}} + \|(1,-2)\|_{\mathbb{R}^2}$$

$$\|3\| = \sqrt{3^2+0} = \sqrt{3^2} = |3| = 3$$

$$\|(1,-2)\| = \sqrt{1^2+(-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$\|(3,(1,-2))\|_1 = \|3\|_{\mathbb{R}} + \|(1,-2)\|_{\mathbb{R}^2}$$

$$= |3| + \sqrt{5}$$

$$= 3 + \sqrt{5}$$

Find $\|(X_1, Y)\|_2$ H.W

Sol/ $\|(X, Y)\| = \max\{\|X\|_L, \|Y\|_{L'}\}$

$$\|(3, (1, -2))\| = \max\{\|3\|_{\mathbb{R}}, \|(1, -2)\|_{\mathbb{R}^2}\}$$

$$= \max\{3, \sqrt{5}\}$$

محاضرة تحليل دالي رقم 1

Normed space and Metric space :

Def // Let X be a non empty set and $d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ be a mapping then d is called metric if

1) $d(x,y) \geq 0 \quad \forall\, x,y \in X$
2) $d(x,y) = 0 \iff x = y \quad \forall\, x,y \in X$
3) $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall\, x,y \in X$
4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \quad \forall\, x,y,z \in X$

then (X,d) is called metric space

ملاحظة/ طلاب هنا تعريف metric space مهم جدا

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة :
كلية :
اللجنة الأمتحانية
قسم :

المادة :
المرحلة :
عدد الوحدات :

قائمة الدرجات الفرعية للأمتحانات النهائية للعام الدراسي ٢٠١٨ - ٢٠١٩م

ت	أسم الطالب الرباعي	درجة السعي السنوي		درجة الأمتحان النهائي		الدرجة النهائية		التقدير
		رقما	كتابة	رقما	كتابة	رقما	كتابة	
٥١								
٥٢								
٥٣								
٥٤								
٥٥								
٥٦								
٥٧								
٥٨								
٥٩								
٦٠								
٦١								
٦٢								
٦٣								
٦٤								
٦٥								
٦٦								
٦٧								
٦٨								
٦٩								
٧٠								
٧١								
٧٢								
٧٣								
٧٤								

مدرس المادة :
التوقيع :

رئيس القسم :
التوقيع :

محاضرة تحليل دالي

Theorem // 2.20 // Let $(L, \|\ \|)$ be a normed space. Let $d: L \times L \longrightarrow \mathbb{R}$ define by

$$d(x,y) = \|x - y\| \quad \forall x, y \in X.$$

Prove that (L, d) is a metric space (i.e بمعنى every normed space is metric space).

Then metric d is called metric induced ناتج عن by the norm.

solution//

By using the definition of norm

1) $\|x-y\| \geq 0 \quad \forall x, y \in L$, then $d(x,y) = \|x-y\| \geq 0$

2) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow \|x-y\| = 0 \Leftrightarrow x-y=0 \Leftrightarrow x=y$
$\forall x, y \in L$

3) $d(x,y) = \|x-y\| = \|y-x\| = d(y,x)$

4) $d(x,y) = \|x-y\| = \|x \underbrace{- z + z}_{\text{نضيف ونطرح } z} - y\| \leq \|x-z\| + \|z-y\|$
$= d(x,z) + d(z,y)$

المادة :
المرحلة :
عدد الوحدات :

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة :
كلية :
اللجنة الأمتحانية
قسم :

قائمة الدرجات الفرعية للأمتحانات النهائية للعام الدراسي ٢٠١٨ - ٢٠١٩م

ت	أسم الطالب الرباعي	درجة السعي السنوي		درجة الأمتحان النهائي		الدرجة النهائية		التقدير
		رقما	كتابة	رقما	كتابة	رقما	كتابة	
٥١								
٥٢								
٥٣								
٥٤								
٥٥								
٥٦								
٥٧								
٥٨								
٥٩								
٦٠								
٦١								
٦٢								
٦٣								
٦٤								
٦٥								
٦٦								
٦٧								
٦٨								
٦٩								
٧٠								
٧١								
٧٢								
٧٣								
٧٤								

مدرس المادة :

التوقيع :

رئيس القسم :

التوقيع :

Remark مهم // Not every metric space is normed space

سوف نوضح هذه الملاحظة بالمثال الآتي ؟

Ex / 2.23

Let d be the discrete metric space X. Then d can't be obtained from a norm on X (i.e $(X, \|\ \|)$) where

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{if } x = y \\ 1 & \text{if } x \neq y \end{cases}$$

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة :
كلية :
اللجنة الأمتحانية
قسم :

المادة :
المرحلة :
عدد الوحدات :

قائمة الدرجات الفرعية للأمتحانات النهائية للعام الدراسي ٢٠١٨ - ٢٠١٩م

ت	أسم الطالب الرباعي	درجة السعي السنوي		درجة الأمتحان النهائي		الدرجة النهائية		التقدير
		رقما	كتابة	رقما	كتابة	رقما	كتابة	
٧٥								
٧٦								
٧٧								
٧٨								
٧٩								
٨٠								
٨١								
٨٢								
٨٣								
٨٤								
٨٥								
٨٦								
٨٧								
٨٨								
٨٩								
٩٠								
٩١								
٩٢								
٩٣								
٩٤								
٩٥								
٩٦								
٩٧								
٩٨								

مدرس المادة :

التوقيع :

رئيس القسم :

التوقيع :

Lemma 2.21

Let d be a metric induced by a normed space $(L, \| \|)$ (i.e $d(x,y) = \|x-y\|$). Then satisfies the following

1) $d(x+a, y+a) = d(x,y) \quad \forall x, y, a \in L$
2) $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| \, d(x,y) \quad \forall x, y \in L, \forall \alpha \in F$

Solution //

1) $d(x+a, y+a) = \|(x+a) - (y+a)\|$

$= \|x + a - y - a\|$

$= \|x - y\| = d(x,y)$

2) $d(\alpha x, \alpha y) = \|\alpha x - \alpha y\| = \|\alpha(x-y)\|$

$= |\alpha| \, \|x - y\| = |\alpha| \, d(x,y)$

Remark: Not every metric space is normed space

مثال تطبيقي عن مجاميع الجداء لبيكاري

Ex/2.18/ Let $L = (\mathbb{R}, \| \|_{\mathbb{R}})$ and $L' = (\mathbb{R}^2, \| \|_{\mathbb{R}^2})$

where $\| \|_{\mathbb{R}^2}$ is the Enclaidian norm.

If $x = 3 \in L = \mathbb{R}$ and $y = (1,-2) \in L' = \mathbb{R}^2$

Find $\|(x,y)\|_1$ and $\|(x,y)\|_2$

Ex 2.18/ ملاحظة / حسب المثال السابق

تعريف $\|(x,y)\|_1$ و $\|(x,y)\|_2$ هو كالاتي

1) $\|(x,y)\|_1 = \|x\|_1 + \|y\|_2$

2) $\|(x,y)\|_2 = \max\{\|x\|_L, \|y\|_{L'}\}$

Solution //

1) $\|(x,y)\|_1 = \|3\| + \|(1,-2)\|$

$\|x\|_1 = \sqrt{3^2} = 3 \leftarrow$ (Norm تعريف)

$\|(1,-2)\|_1 = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

$\therefore \|(x,y)\|_1 = \|3\| + \|(1,-2)\| = 3 + \sqrt{5}$

2) $\|(x,y)\|_2 = \max\{\|3\|, \|(1,-2)\|\}$
$= \max\{3, \sqrt{5}\} = 3$

$$\|\alpha(x, y)\| = |\alpha| \, \|(x, y)\|$$

$$\|\alpha(x,y)\| = \|(\alpha x, \alpha y)\|$$

$$= \|\alpha x\| + \|\alpha y\|$$

$$= |\alpha| \, \|x\| + |\alpha| \, \|y\|$$

$$= |\alpha| \left(\|x\| + \|y\| \right)$$

$$= |\alpha| \left(\|(x, y)\| \right)$$

محاضرة تحليل دالي رقم 0

Convergence in Normed Space

Definition 2.27: Let $\langle X_n \rangle$ be a sequance in normed space $(L, \| \|)$. Then $\langle X_n \rangle$ is said to be convergent in L if $\exists\, x \in L$ such that $\forall \epsilon > 0$, $\exists\, k \in \mathbb{Z}_+$ such that $\| X_n - X \| < \epsilon$, $\forall n > k$

We write $X_n \longrightarrow X$ as $n \longrightarrow \infty$ or $\lim\limits_{n \to \infty} (X_n) = X$,

that is $\| X_n - X \| \to 0 \iff x_n \longrightarrow X$

$\langle X_n \rangle$ is divergent if it is not convergent.

متباعدة   متقاربة

ملاحظة // التعريف مهم جداً حفظ

التقارب في normed space

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة :
كلية :
اللجنة الأمتحانية
قسم :

المادة :
المرحلة :
عدد الوحدات :

قائمة الدرجات الفرعية للأمتحانات النهائية للعام الدراسي ٢٠١٨ - ٢٠١٩م

ت	أسم الطالب الرباعي	درجة السعي السنوي		درجة الأمتحان النهائي		الدرجة النهائية		التقدير
		رقما	كتابة	رقما	كتابة	رقما	كتابة	
٢٧								
٢٨								
٢٩								
٣٠								
٣١								
٣٢								
٣٣								
٣٤								
٣٥								
٣٦								
٣٧								
٣٨								
٣٩								
٤٠								
٤١								
٤٢								
٤٣								
٤٤								
٤٥								
٤٦								
٤٧								
٤٨								
٤٩								
٥٠								

مدرس المادة :

التوقيع :

رئيس القسم :

التوقيع :

محاضرة تحليل دالي

Theorem 2.30 "مهم" //

Let $\langle x_n \rangle$, $\langle y_n \rangle$ be two sequences in normed space $(L, \|\ \|)$ such that $x_n \to x$ and $y_n \to y$.

Then

(1) $\langle x_n \rangle + \langle y_n \rangle \to x + y$ as $n \to \infty$

$\langle x_n \rangle - \langle y_n \rangle \to x - y$

(2) $\lambda \langle x_n \rangle \to \lambda x$ for any scalar λ $\quad \|y_n - y\| < \frac{\epsilon}{2}$

(3) $\| \langle x_n \rangle \| \to \|x\|$ $\quad \|x_n - x\| < \frac{\epsilon}{2}$

Proof// Since $x_n \to x$, then $\forall\, \epsilon > 0$, $\exists\, k_1 \in \mathbb{Z}_+$ s.t $\|x_n - x\| < \frac{\epsilon}{2}$, $\forall n > k_1$. Also since $y_n \to y$, then for $\epsilon > 0$, $\exists\, k_2 \in \mathbb{Z}_+$ s.t $\|y_n - y\| < \frac{\epsilon}{2}$ $\forall n > k_2$

Let $k = \max\{k_1, k_2\}$. Then $\forall\, n > k$

$\|x_n - x\| < \frac{\epsilon}{2}$ and $\|y_n - y\| < \frac{\epsilon}{2}$ ---- (1)

Now, for each $n > k$,

$$\|(x_n + y_n) - (x + y)\| = \|(x_n - x) + (y_n - y)\| \le \underbrace{\|x_n - x\|}_{\frac{\epsilon}{2}} + \underbrace{\|y_n - y\|}_{\frac{\epsilon}{2}} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \text{ (from (1))}$$

Thus $x_n + y_n \to x + y$.

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة :
كلية :
اللجنة الأمتحانية
قسم :

المادة :
المرحلة :
عدد الوحدات :

قائمة الدرجات الفرعية للأمتحانات النهائية للعام الدراسي ٢٠١٨ - ٢٠١٩م

ت	أسم الطالب الرباعي	درجة السعي السنوي		درجة الأمتحان النهائي		الدرجة النهائية		التقدير
		رقما	كتابة	رقما	كتابة	رقما	كتابة	
٢٧								
٢٨								
٢٩								
٣٠								
٣١								
٣٢								
٣٣								
٣٤								
٣٥								
٣٦								
٣٧								
٣٨								
٣٩								
٤٠								
٤١								
٤٢								
٤٣								
٤٤								
٤٥								
٤٦								
٤٧								
٤٨								
٤٩								
٥٠								

مدرس المادة :
التوقيع :

رئيس القسم :
التوقيع :

محاضرة تحليل دالي

(2) Let $\epsilon > 0$. Since $x_n \to x$, $\exists k \in Z_+$ s.t $\|x_n - x\| < \frac{\epsilon}{\lambda}$, $\forall n > k$ --- (I)

But $\|\lambda x_n - \lambda x\| = |\lambda| \, \|x_n - x\| < \frac{\epsilon}{|\lambda|} |\lambda| = \epsilon$

Thus $\lambda \langle x_n \rangle \to \lambda x$

(3) Let $\epsilon > 0$. Since $x_n \to x$, $\exists k \in Z_+$ s.t $\|x_n - x\| < \epsilon$, $\forall n > k$ --- (I)

$x_n \to x$

$\|x_n - x\| \to \|x\|$

But $\big| \|x_n\| - \|x\| \big| \leq \|x_n - x\| < \epsilon \quad \forall n > k$.

Hence, $\|x_n\| \to \|x\|$

$\|x_n\| - \|x\| =$

$\|x_n - x\| < \epsilon$

Definition 2.31 // Let $\langle x_n \rangle$ be a sequance in normed space $(L, \|\ \|)$. Then $\langle x_n \rangle$ is said to be Cauchy sequance if $\forall \epsilon > 0, \exists k \in Z_+$ s.t $\|x_n - x\| < \epsilon \ \forall n, m > k$.

ملاحظة تعريف Cauchy sequance

مهم جداً حفظاً

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة :
كلية :
اللجنة الأمتحانية
قسم :

المادة :
المرحلة :
عدد الوحدات :

قائمة الدرجات الفرعية للأمتحانات النهائية للعام الدراسي ٢٠١٨ - ٢٠١٩م

ت	أسم الطالب الرباعي	درجة السعي السنوي		درجة الأمتحان النهائي		الدرجة النهائية		التقدير
		رقما	كتابة	رقما	كتابة	رقما	كتابة	
٢٧								
٢٨								
٢٩								
٣٠								
٣١								
٣٢								
٣٣								
٣٤								
٣٥								
٣٦								
٣٧								
٣٨								
٣٩								
٤٠								
٤١								
٤٢								
٤٣								
٤٤								
٤٥								
٤٦								
٤٧								
٤٨								
٤٩								
٥٠								

مدرس المادة :
التوقيع :

رئيس القسم :
التوقيع :

محاضرة تحليل دالي

Theorem 2-32 مبرهنة

Every convergent sequence in normed space $(L, \|\ \|)$ is a Cauchy sequance.

Proof // Let $\langle X_n \rangle$ be a convergent sequence in L. Then $\exists x \in L$ s.t $x_n \to x$ and so $\forall \epsilon > 0\ \exists k \in Z_+$ s.t $\|X_n - x\| < \frac{\epsilon}{2}\ \forall n > k$ --- (I)

Now, for $n, m > k$,

$\|X_n - X_m\| = \|(X_n - X) + (X - X_m)\| \leq \|X_n - X\| + \|X - X_m\|$

$< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$

$\frac{2\epsilon}{2}$ $\|x - x_m\|$ $|-1|\,\|x_m - x\|$ $\frac{\epsilon}{2}$

Thus $\langle X_n \rangle$ is a cauchy sequence.

Definition 2-33 //

Let $\langle X_n \rangle$ be a sequance in normed space $(L, \|\ \|)$. Then $\langle X_n \rangle$ is said to be bounded sequence if $\exists k \in \mathbb{R}$, $k > 0$ such that $\|X_n\| \leq k$, $\forall n \in Z_+$.

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة :
كلية :
اللجنة الأمتحانية
قسم :

المادة :
المرحلة :
عدد الوحدات :

قائمة الدرجات الفرعية للأمتحانات النهائية للعام الدراسي ٢٠١٨ - ٢٠١٩م

ت	أسم الطالب الرباعي	درجة السعي السنوي		درجة الأمتحان النهائي		الدرجة النهائية		التقدير
		رقما	كتابة	رقما	كتابة	رقما	كتابة	
٢٧								
٢٨								
٢٩								
٣٠								
٣١								
٣٢								
٣٣								
٣٤								
٣٥								
٣٦								
٣٧								
٣٨								
٣٩								
٤٠								
٤١								
٤٢								
٤٣								
٤٤								
٤٥								
٤٦								
٤٧								
٤٨								
٤٩								
٥٠								

مدرس المادة :
التوقيع :

رئيس القسم :
التوقيع :

محاضرة تحليل دالي

Theorem 2.34 //

Every Cauchy sequence $\langle x_n \rangle$ in a normed space $(L, \|\ \|)$ is bounded

Proof // Let $\epsilon = 1$. Since $\langle x_n \rangle$ is a Cauchy sequence, $\exists\, k \in Z_+$ s.t $\|x_n - x_m\| < 1$, $\forall m, n > k$. Hence

$\|x_n - x_{k+1}\| < 1 \quad \forall n > k$ (by considering $m = k+1$) ... (1)

By Theorem 2.3, we have $\big|\, \|x_n\| - \|x_{k+1}\| \,\big| \leq \|x_n - x_{k+1}\|$

$< 1 \quad \forall n > k$

Thus $\|x_n\| - \|x_{k+1}\| < 1 \quad \forall n > k$

Then $\|x_n\| < 1 + \|x_{k+1}\| \quad \forall n > k$

Let $M = \max \{\|x_1\|, \|x_2\|, \ldots, \|x_k\|, 1 + \|x_{k+1}\|\}$

Hence $\|x_n\| \leq M \quad \forall n \in Z_+$, So $\langle x_n \rangle$ is bounded.

Corollary 2.35 // Every convergent sequence in normed space $(L, \|\ \|)$ is bounded.

Proof // From theorem (2.32). Every convergent sequence in a normed space $(L, \|\ \|)$ is Cauchy, and from theorem 2.34, every Cauchy sequence in normed space $(L, \|\ \|)$ is bounded.

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة :
كلية :
اللجنة الأمتحانية
قسم :

المادة :
المرحلة :
عدد الوحدات :

قائمة الدرجات الفرعية للأمتحانات النهائية للعام الدراسي ٢٠١٨ - ٢٠١٩م

ت	أسم الطالب الرباعي	درجة السعي السنوي		درجة الأمتحان النهائي		الدرجة النهائية		التقدير
		رقما	كتابة	رقما	كتابة	رقما	كتابة	
٢٧								
٢٨								
٢٩								
٣٠								
٣١								
٣٢								
٣٣								
٣٤								
٣٥								
٣٦								
٣٧								
٣٨								
٣٩								
٤٠								
٤١								
٤٢								
٤٣								
٤٤								
٤٥								
٤٦								
٤٧								
٤٨								
٤٩								
٥٠								

مدرس المادة :

رئيس القسم :

التوقيع :

التوقيع :

linear Space الفضاء الخطي

المحاضرة الاولى

* $(F, +, \cdot)$ هو حقل الاعداد (حقيقية او معقدة) معرف على عمليتي الجمع والضرب F

** L is (Linear vector space) هو فضاء المتجهات الخطي

لكي نبرهن ان

*** L is vectorspace over field F

يجب ان تحقق الشروط الاتية

1- $(L, +)$ is commutative group (زمرة ابدالية)

شروط الزمرة الابدالية هي

a. $\forall X, Y \in L \;,\; X + Y = Y + X$ عملية الجمع ابدالية

b. $\forall X, Y, Z \in L \;,\; X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$ (تجميعية)

c- $\forall X \in L \;,\; \underline{0} \in L \;,\; X + \underline{0} = \underline{0} + X = X$ العنصر المحايد للجمع هو $(\underline{0})$

d- $\forall X \in L \;,\; -X \in L \;,\; X + (-X) = \underline{0}$ النظير الجمعي هو $(-X)$

2- Linear space يجب ان تحقق شروط

a) $\forall \alpha, \beta \in F \;,\; X \in L \;,\; X = (x_1, x_2 \cdots x_n)$

$$\alpha \cdot X = \alpha (x_1, x_2 - - - x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, - - -, \alpha x_n)$$

b) $\alpha \cdot (X + Y) = \alpha X + \alpha Y$

c) $(\alpha + \beta) \cdot X = \alpha X + \beta X$

d) $1 \cdot X = X$

EX) 1-3 $(\mathbb{R},+,\cdot)$ Field, $\mathbb{R}^n = \{x_1, \dots, x_n\}$ $\forall X \in \mathbb{R}^n$

then $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall X, Y \in \mathbb{R}$ then

$$X + Y = \{(x_1 + y_1), \dots (x_n + y_n)\}$$

$$\alpha \cdot X = \{\alpha \cdot x_1, \dots, \alpha x_n\}$$

We Show that $\mathbb{R}^n$ is linear vector space over field $\mathbb{R}$?

SoL) Now, we show that $(\mathbb{R}^n, +)$ is commutative group

a. $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n$, $X + Y = Y + X$, $X = \{x_1, \dots, x_n\}$
$Y = \{y_1, \dots, y_n\}$

$$\{x_1, \dots, x_n\} + \{y_1, \dots, y_n\} = \{x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n\}$$

$$= \{y_1 + x_1, \dots, y_n + x_n\}$$ علماً الجمع ابدالي

$$= Y + X$$

b. $X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$ $\forall X, Y, Z \in \mathbb{R}^n$

$X = \{x_1, \dots, x_n\}$

$Y = \{y_1, \dots y_n\}$

$Z = \{z_1, \dots, z_n\}$

$$= \{x_1, x_2, \dots x_n\} + \{(y_1 + z_1) + \dots + (y_n + z_n)\}$$

$$= \{x_1 + (y_1 + z_1), \dots, x_n + (y_n + z_n)\}$$

$$= \{(x_1 + y_1) + z_1, \dots, (x_n + y_n) + z_n\}$$

$$= \{(x_1 + y_1) \dots (x_n + y_n)\} + \{z_1, \dots, z_n\}$$

$$= (X + Y) + Z$$ علماً الجمع تجميعي

c. $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\underline{0} \in \mathbb{R}^n$, $X + \underline{0} = \underline{0} + X = 0$

$$\{x_1, \dots x_n\} + \{0, \dots, 0\} = \{x_1 + 0, \dots, x_n + 0\}$$

$$= \{x_1, \dots x_n\}$$

$$= X$$

c) If $X=\{x_1,x_2,--x_n\}\in\mathbb{R}^n$, $-X=\{-x_1,-x_2,---,-x_n\}$

then $X+(-X)=\underline{0}$

$$(x_1,---x_n)+(-x_1,---,-x_n)=(0,---,0)$$

$\therefore$ $(\mathbb{R}^n,+)$ is commutative group.

We must to prove that $\mathbb{R}^n$ is linear vector space over field $\mathbb{R}$

1) $\forall X,Y\in\mathbb{R}^n$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $X=\{x_1,---,x_n\}$
$Y=\{y_1,---y_n\}$

$$\alpha(X+Y)=\alpha X+\alpha Y$$

$$\alpha(X+Y)=\alpha((x_1+y_1),---,(x_n+y_n))$$
$$\alpha(X+Y)=(\alpha(x_1+y_1),---,\alpha(x_n+y_n))$$
$$\alpha(X+Y)=(\alpha x_1+\alpha y_1,---,\alpha x_n+\alpha y_n)$$
$$\alpha(X+Y)=(\alpha x_1,---,\alpha x_n)+(\alpha y_1,---\alpha y_n)$$
$$\alpha(X+Y)=\alpha(x_1,---,x_n)+\alpha(y_1,---y_n)$$
$$\alpha(X+Y)=\alpha X+\alpha Y$$

2) $(\alpha+\beta)\cdot X=\alpha\cdot X+\beta X$

$$(\alpha+\beta)\cdot X=(\alpha+\beta)\cdot(x_1,x_2,---x_n)$$
$$(\alpha+\beta)\cdot X=((\alpha+\beta)\cdot x_1,(\alpha+\beta)x_2,---(\alpha+\beta)x_n)$$
$$(\alpha+\beta)\cdot X=(\alpha x_1+\beta x_1,\alpha x_2+\beta x_2,---,\alpha x_n+\beta x_n)$$
$$(\alpha+\beta)\cdot X=(\alpha x_1,\alpha x_2,---\alpha x_n)+(\beta x_1,\beta x_2,---,\beta x_n)$$
$$(\alpha+\beta)\cdot X=\alpha(x_1,x_2,---,x_n)+\beta(x_1,x_2,---,x_n)$$
$$(\alpha+\beta)\cdot X=\alpha X+\beta X$$

c. $(\alpha.\beta)X = ((\alpha.\beta).x_1, \dots, (\alpha.\beta x_n)$

$= \alpha(\beta x_1, \dots, \beta x_n)$

$= \alpha(\beta(x_1, \dots, x_n))$

$= \alpha.(\beta.X)$

d) If $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $1 \in \mathbb{R}$, then

$1.X = X$

$= (1.x_1, \dots, 1x_n)$

$= (x_1, \dots, x_n)$

EX. (1.7):

$$C^b(\mathbb{R}) = \{f : f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ , f \text{ is bounded and continuous}\}$$

Set of all bounded continuous functions on $\mathbb{R}$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha . f(x)$$

$C^b(\mathbb{R})$ هو فضاء كل الدوال الحقيقية المقيدة والمستمرة

Show that $C^b(\mathbb{R})$ is a linear space over $\mathbb{R}$.

Solution: Since f and g are bounded and continuous functions $\exists M_1, M_2$ such that

$$|f(x)| \leq M_1 \ , \ |g(x)| \leq M_2$$

$$|(f+g)(x)| = |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \\ \leq M_1 + M_2$$

$\therefore$ $f+g$ is bounded continuous function.

$\forall f, g, h \in C^b(\mathbb{R})$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\Big(\big(f + (g+h)\big)(x) \Big) = f(x) + (g+h)(x)$$

خاصية تجميع

$$= f(x) + g(x) + h(x)$$

$$= [f(x) + g(x)] + h(x)$$

$$= (f+g)(x) + h(x)$$

$$= \big((f+g) + h \big)(x) \big)$$

الخاصية الأبدالية :

$(f+g)(x) \overset{?}{=} (g+f)(x)$

$(f+g)(x) = f(x)+g(x) = g(x)+f(x) = (g+f)(x)$

الدالة الصفرية :

$\forall f \in C^b(\mathbb{R})$, $\hat{0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\hat{0}(x) = 0$.

$(f+\hat{0})(x) = f(x) + \hat{0}(x) = f(x) + 0 = f(x)$

$\hat{0}$ is called the additive identity

النظير :

$\forall f \in C^b(\mathbb{R})$, $-f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$(-f)(x) = -[f(x)]$ $\forall x \in \mathbb{R}$

f is continuous then $-f$ is continuous

$\forall x \in \mathbb{R}, |-f(x)| = |f(x)| \leq M_1$

$\therefore -f(x)$ is bounded.

$(f+(-f))(x) = f(x) + (-f(x)) = f(x) - f(x) = 0$

$= \hat{0}$

$(C^b(\mathbb{R}, +))$ is a commutative group.

$|(\alpha f)(x)| = |\alpha . f(x)| \leq |\alpha| M$, $|f(x)| \leq M$

$\therefore \alpha f \in C^b(\mathbb{R})$

If $f, g \in C^b(\mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha \cdot (f+g)(x) = \alpha \cdot \big(f(x)+g(x)\big) = \alpha \cdot f(x) + \alpha \cdot g(x)$$
$$= (\alpha f)(x) + (\alpha g)(x)$$
$$= (\alpha f + \alpha g)(x)$$

$$\big((\alpha+\beta) f\big)(x) = (\alpha+\beta) f(x)$$
$$= \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot f(x)$$
$$= (\alpha f)(x) + (\beta \cdot f)(x)$$
$$= (\alpha f + \beta f)(x)$$

$$\big((\alpha \cdot \beta) f\big)(x) = (\alpha \cdot \beta) f(x) = \alpha \cdot (\beta \cdot f(x))$$
$$= \alpha \cdot (\beta \cdot f)(x)$$
$$= \big(\alpha(\beta f)\big)(x)$$

If $f \in C^b(\mathbb{R})$ and 1 is the identity to $\mathbb{R}$

$$(1 f)(x) = 1 \cdot f(x) = f(x)$$

المحاضرة الثانية

Theorem 1.9 properties of linear space.

Let $L(F)$ be a linear space an O_L is a zero vector of L then

1) $\alpha \cdot O_L = O_L \quad \forall \alpha \in F$

proof//

نفرض ان $L = \mathbb{R}^3$, F هو حقل الاعداد

$O_L = (0,0,0)$, $\forall O_L \in \mathbb{R}^3$, $\alpha \in F$

$\alpha \cdot O_L = \alpha (0,0,0) = (\alpha \cdot 0, \alpha \cdot 0, \alpha \cdot 0) = (0,0,0) = O_L$

2) $0 \cdot x = O_L \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$, $0 \in F$, $x = (x_1, x_2, x_3)$

$0 \cdot x = 0 \cdot (x_1, x_2, x_3) = (0 \cdot x_1, 0 \cdot x_2, 0 \cdot x_3)$

$= (0,0,0) = O_L$

3) $\alpha \cdot (-x) = -(\alpha \cdot x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, $\forall \alpha \in F$

$\forall x \in \mathbb{R}^3$, $-x \in \mathbb{R}^3$, $-x = (-x_1, -x_2, -x_3)$

$\alpha \cdot (-x) = \alpha (-x_1, -x_2, -x_3)$

$= (-\alpha x_1, -\alpha x_2, -\alpha x_3)$

$= -(\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)$

$= -(\alpha x)$

(4) $(-\alpha)\cdot x = -(\alpha\cdot x)\ \forall x \in \mathbb{R}^3, \forall \alpha \in F, -\alpha \in F, X = (x_1, x_2, x_3)$

$$(-\alpha)\cdot X = (-\alpha)(x_1, x_2, x_3) = (-\alpha x_1, -\alpha x_2, -\alpha x_3)$$
$$= -(\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)$$
$$= -(\alpha X)$$

(5) $\alpha\cdot(x-y) = \alpha\cdot x - \alpha\cdot y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^3, \alpha \in F$

$x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3)$

$-y = (-y_1, -y_2, -y_3), -y \in \mathbb{R}^3$

$$\alpha\cdot(x-y) = \alpha((x_1, x_2, x_3) + (-y_1, -y_2, -y_3))$$
$$= \alpha((x_1, x_2, x_3) - (y_1, y_2, y_3))$$
$$= (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3) - (\alpha y_1, \alpha y_2, \alpha y_3)$$
$$\alpha(x_1, x_2, x_3) - \alpha(y_1, y_2, y_3)$$
$$= \alpha x - \alpha y$$

(6) If $\alpha\cdot x = 0$ then $\alpha = 0$ or $x = 0_L$

Let $\alpha = 0$, $x \in \mathbb{R}^3$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, $\alpha \in F$

if $\alpha \in F$, $\alpha \neq 0$, $\alpha x = \alpha(x_1, x_2, x_3)$

$$= (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)$$
$$= (0\cdot x_1, 0\cdot x_2, 0\cdot x_3)$$
$$= (0, 0, 0) = 0_L$$

if $\alpha \neq 0$ then $x = 0_L$

$x = (0, 0, 0)$

$$\alpha X = \alpha(0, 0, 0) = (\alpha\cdot 0, \alpha\cdot 0, \alpha\cdot 0)$$
$$= (0, 0, 0) = 0_L$$

H.W // Let $L = \mathbb{R}^4$ حل واجب مبرهنة 1.9

Def // Let L be a linear space over field F and let H be a non empty subset of L. Then H is called a Linear subspace of L if H itself is a Linear space over F

Theorem : Let H be a non empty sub set of a Linear space $L(F)$. H is called a subspace of L iff $\alpha x + \beta y \in H$ $\forall x, y \in H$ and $\forall \alpha, \beta \in F$

Example 1.12

(1) which of the following subsets of $\mathbb{R}^3$ are subspaces of $\mathbb{R}^3$

(i) $H_1 = \{(0, x_2, x_3), x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$

Let $x \in H_1$, $x = (0, x_2, x_3)$, $y \in H_1$, $y = (0, y_2, y_3)$
$\alpha, \beta \in F$

$$\left.\begin{aligned} \alpha x &= \alpha(0, x_2, x_3) = (0, \alpha x_2, \alpha x_3) \\ \beta y &= \beta(0, y_2, y_3) = (0, \beta y_2, \beta y_3) \end{aligned}\right\}$$

$$\alpha x + \beta y = (0, \alpha x_2, \alpha x_3) + (0, \beta y_2, \beta y_3)$$
$$= (0, c_1, c_2) \in H_1$$

(ii) $H_2 = \{(0,0,x_3), x_3 \in \mathbb{R}\}$ H.W

(iii) $H_3 = \{(x_1,x_2,x_3) : x_1+2x_2=1\}$

let $x, y \in H_3$: $x=(x_1,x_2,x_3)$: $x_1+2x_2=1$

$y=(y_1,y_2,y_3)$: $y_1+2y_2=1$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)$: $\alpha x_1 + 2\alpha x_2 = 1$

$\beta y = (\beta y_1, \beta y_2, \beta y_3)$: $\beta y_1 + 2\beta y_2 = 1$

$\alpha x + \beta y = (\alpha x_1+\beta y_1, \alpha x_2+\beta y_2, \alpha x_3+\beta y_3)$

$(\alpha x_1+\beta y_1)+2(\alpha x_2+\beta y_2)=1$ ...(1)

$x_1 = y_1 = x_2 = y_2 = 0 \neq 1$

2- $H_1 = \{f : f(0)=0\}$

let $f, g \in H_1$: $f(0)=0$, $g(0)=0$

$\alpha, \beta \in [-1,1]$

$(\alpha f+\beta g)(0) = (\alpha f)(0) + (\beta g)(0)$

$= \alpha f(0) + \beta g(0)$

$= \alpha . 0 + \beta . 0$

$= 0 + 0$

$= 0$

(ii) $H_2 = \{ f : f(x) \leq 0 \ \forall \ x \in [-1, 1]$

Let $f, g \in H_2$, $f(x) \leq 0$, $g(x) \leq 0$, $\forall x \in [-1, 1]$

$\alpha \cdot f(x) \leq 0 \cdot \alpha$

$\alpha \cdot f(x) \leq 0$

$\beta g(x) \leq 0 \cdot \beta$

$\beta g(x) \leq 0$

$(\alpha f + \beta g)_{(x)} = (\alpha f)(x) + (\beta g)(x)$

$= \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)$

$\leq 0 + 0$

≤ 0

(iii) $H_3 = \{ f : f(0) = 1 \}$ H.W

5

linear Transform ٤٤ ~~الثالثة~~ المحاضرة الرابعة

$$L(F) \longrightarrow L'(F)$$

F is field حقل

$\alpha, \beta \in F$

$F = \mathbb{R}$

عدد

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

$x \in$ vector متجه

$T(x) \in F$ عدد

1.14

Ex: $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$T((x_1, x_2, x_3)) = (x_1, x_2) \quad \forall x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$$

T is linear transform

let $x \in \mathbb{R}^3 : x = (x_1, x_2, x_3) \Rightarrow T(x) = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$x_1, x_2 \in \mathbb{R} = F$

$y \in \mathbb{R}^3 : y = (y_1, y_2, y_3)$

$\Rightarrow T(y) = (y_1, y_2)$

$y_1, y_2 \in \mathbb{R} = F$

$$T(\alpha x + \beta y) = T(\alpha(x_1, x_2, x_3) + \beta(y_1, y_2, y_3))$$

$$= T((\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3) + (\beta y_1, \beta y_2, \beta y_3))$$

$$= T(\underbrace{\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3}_{\in \mathbb{R}^3})$$

$$= (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2)$$

$$= (\alpha x_1, \alpha x_2) + (\beta y_1, \beta y_2)$$

$$= \alpha(x_1, x_2) + \beta(y_1, y_2)$$

$$= \alpha T(x) + \beta T(y)$$

EX: 1.15 $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, T is linear:

(1) $T_1(x_1, x_2) = (a x_1, a x_2)$

$$T(\alpha X + \beta Y) \stackrel{?}{=} \alpha T(X) + \beta T(Y)$$

let $X \in \mathbb{R}^2 : X = (x_1, x_2)$

$Y \in \mathbb{R}^2 : Y = (y_1, y_2)$

$$\Longrightarrow \alpha X = (\alpha x_1, \alpha x_2)$$

$$\beta Y = (\beta y_1, \beta y_2)$$

$$\alpha X + \beta Y = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2)$$

$$T(\alpha X + \beta Y) = T(\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2)$$

$$T_1(\alpha X + \beta Y) = (a \cdot (\alpha x_1 + \beta y_1), a \cdot (\alpha x_2 + \beta y_2))$$

$$= (a \cdot \alpha x_1 + a \cdot \beta y_1, a \alpha x_2 + a \cdot \beta y_2)$$

$$= (a \cdot \alpha x_1, a \alpha x_2) + (a \beta y_1, a \beta y_2)$$

$$= \alpha (a \cdot x_1, a x_2) + \beta (a y_1, a y_2)$$

$$= \alpha T_1(X) + \beta T_1(Y)$$