الفصل الرابع

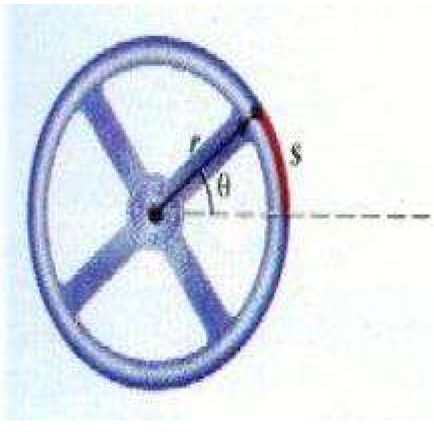
الحركة الدائرية والحركة الدورانية

Circular Motion & Rotational Motion

إذا تحرك جسم على مسار دائري نقول بأن حركته دائرية. مثال ذلك حركة جسم مربوط في خيط ويدور حول حامله، وحركة سيارة على منعطف دائري. ومن أهم الظواهر في الطبيعة هي الحركات الدورانية مثل حركة الارض حول الشمس والقمر حول الارض والالكترونات حول النواة في الذرة، وغيرها.

4-1 الازاحة الزاوية θ

لوصف حركة جسم في مسار دائري او دوران عجلة حول محور الدوران يجب أن يختار أحداثي لقياس زاوية الدوران (θ)، هناك ثلاث طرق لقياس الزاوية (θ) بالدرجات (deg) وكلنا يعلم أن الدائرة الكاملة الواحدة تكافئ °360. كذلك يمكن قياس الزاوية بالدورات (rev) فالدائرة الواحدة تكافئ دورة واحدة وبذلك نرى أن: °1 rev=360 ، والطريقة الثالثة هي أن تقاس الزاوية بالقياس نصف قطري، أو الزاوية نصف قطرية ويمكن تعريف الزاوية نصف قطرية بالاستعانه بالشكل (٤-١) كما يأتي:



شكل ٤-١

عندما تدور العجلة زاوية θ تتحرك أي نقطة على حافتها مسافة قدرها s حول المركز وتعريف الزاوية θ مقدرة بالزاوية النصف قطرية بالنسبة بين s ونصف قطر العجلة r :

$$\theta\ (rad) = \frac{\text{طول القوس}}{\text{نق}} = \frac{s}{r}$$

نلاحظ ان الدورة الكاملة تناظر s=2πr ، وهذا يعني θ (rad) = 2πr/r = 2π.

*** $1\ rev = 360^\circ$

$1\ rad = 180/\pi\ degree \approx 57.3^\circ$

$$2\pi\ rad = 360^\circ => 1^\circ = \frac{\pi}{180}\ rad$$

مثال 4-1

حول الزاوية °70 الى زوايا نصف قطرية ودورات.

وحول الزاوية 0.210 rad الى درجات ودورات.

الحل:

$$70^\circ = 70\ (\deg\ )\left(\frac{2\pi}{360^\circ}\right) = 1.22\ rad$$

$$70^\circ = 70\ (\deg\ )\ \left(\frac{1\ rev}{360^\circ}\right) = 0.194\ rev$$

$$0.210\ rad = \frac{0.210}{2\pi} \times 360^\circ = 0.0334 \times 360^\circ = 12.0^\circ$$

$$0.210\ rad = \frac{0.210}{2\pi} \times 1 = 0.0334\ rev$$

4-2 السرعة الزاوية Angular velocity ω

تعرف السرعة الزاوية هي الزاوية التي يدورها الجسم في وحدة الزمن. وتعطى السرعة الزاوية المتوسطة بالعلاقة الاتية:

$$\text{السرعة الزاوية المتوسطة} = \frac{\text{الإزاحة الزاوية}}{\text{الزمن}} => \ \overline{\omega} = \frac{\theta}{t}$$

والواحدات النموذجية للسرعة الزاوية ω هي الزاوية النصف قطرية لكل ثانية (rad/sec) (الراديان/ثانية)، والدرجات لكل ثانية (deg/sec) ، والدورات لكل دقيقة (.rev/min) .

وتعرف السرعة الزاوية اللحظية ***(Instantaneous Angular velocity)*** بالمعادلة : $\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$

ويمكن الربط بين السرعة الزاوية ω لجسم يدور على دائرة وسرعته الخطية υ بالعلاقة الاتية :

$$\upsilon = r\omega$$

وكذلك يمكن الربط بين الازاحة الزاوية والازاحة الخطية بالعلاقة الاتية:

$$s = r\theta$$

مثال 4-2

تدور العجلة عددا من الدورات مقداره 1800 rev في 1 min، أوجد السرعة الزاوية المتوسطة بالوحدات rad/sec.

الحل:

$$\bar{\omega} = \frac{\theta}{t} = \frac{1800}{60\,sec} = 30\,rev/sec$$

$$30 = \left(30\frac{rev}{\sec}\right)\left(\frac{2\pi\,rad}{rev}\right) = 60\pi\,rad/\sec = \quad 188.5\,rad/sec$$

مثال 4-3

تدور الارض حول نفسها كل *24* ساعة ، ما متوسط سرعتها الزاوية؟

الحل: نلاحظ ان الزاوية المسموحة خلال *24* ساعة هي 360° أو 2π

$$\omega = \frac{\theta}{t} = \frac{2\pi\,rad}{24 \times 3600\,s} = 7.3\ \times 10^{-5}\,rad/sec$$

مثال 4-5

يتحرك جسم على مسار دائري بسرعة زاوية متغيرة بحيث تعطى الزاوية التي يدورها خلال الزمن t بالعلاقة $\theta=-2t+t^2$ (a مالسرعة الزاوية المتوسطة للجسم بين اللحظتين $t_1=0\ s$ و $t_2=3\ s$؟ (b مالسرعة الزاوية اللحظية للجسم عندما $t=0$؟

الحل: لتحديد السرعة الزاوية المتوسطة نحسب الزاوية التي كان التي كان عندها الجسم في اللحظتين المذكورتين:

$$\theta\,(t_1) = -2(0) + (0)^2 = 0\,rad$$

$$\theta\,(t_2) = -2(3) + (3)^2 = -6 + 9 = 3\,rad$$

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{3-0}{3-0} = 1\,rad/sec$$

(b $$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \ -2 + 2t$$

$$\omega\,(0) = -2 + 2(0) = -2\ \text{rad/sec}$$

4-3 *التعجيل الزاوي* *Angular Acceleration* α

هو المعدل الزمني لتغير السرعة الزاوية ، ويعرف التعجيل الزاوي (العجلة الزاوية) بالعلاقة :

$$\text{العجلة الزاوية المتوسطة} = \frac{\text{التغير في السرعة الزاوية}}{\text{الزمن}} => \bar{\alpha} = \frac{\omega_f - \omega_i}{t}$$

وحدات العجلة الزاوية هي وحدات السرعة الزاوية مقسومة على الزمن (rad/sec^2)..

أذا كانت العجلة الزاوية منتظمة (ثابتة) فإن السرعة الزاوية المتوسطة ستكون:

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2}\,(\omega_f - \omega_i)$$

مثال 4-6

تبدأ عجلة في الدوران من السكون وتصل الى سرعة دورانية قدرها 240 rev/sec في 2 min. ماعجلتها الزاوية المتوسطة؟

الحل:

$$\bar{\alpha} = \frac{\omega_f - \omega_i}{t} = \frac{240-0}{2\times 60} = \frac{240}{120} = 2\,rev/sec$$

مثال 4-7

لتعجيل دوار نابذ من السكون الى 2×10^4 دورة في الدقيقة يتطلب 5 دقائق، جد معدل تعجيله الزاوي؟

الحل: $\omega_i = 0$

$$\omega_f = (2000)\left(\frac{2\pi}{60}\right) = 2100\,rad/sec$$

$$\bar{\alpha} = \frac{\omega_f - \omega_i}{t} = \frac{2100-0}{5\times 60} = 7\,rad/sec^2$$

- لكل جسم يدور على مسار دائري نصف قطره r بسرعة ثابتة υ تسارع مركزي قيمته υ^2/r **ويتجه نحو مركز الدائرة**.

تتميز كل حركة دائرية بالزمن اللازم للجسم للقيام بدورة واحدة كاملة على محيط الدائرة يسمى الدور (Period) ويرمز له بالرمز T ويساوي حاصل قسمة المسافة المقطوعة $2\pi r$ على سرعة الجسم υ، أي ان :

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

كما يسمى عدد الدورات التي يدورها الجسم في ثانية الواحدة بالتردد frequency ويرمز له بالرمز f ووحدته هي 1/sec أو هرتز (Hz).

$$f = \frac{1}{T} = \frac{v}{2\pi r}$$

مثال 4-8

يدور القمر حول الارض في مسار دائري تقريبا مرة كل 29.5 يوما. ما سرعة القمر وتسارعه مع العلم أن المسافة بين الارض والقمر هي 385000 km؟

الحل:

المسافة التي يقطعها القمر في دورة واحدة

$$s = \theta\, r = 2\pi \times 385 \times 10^3 \times 10^3 = 2417.8 \times 10^6\, m$$

$$\approx 2.4 \times 10^9\, m$$

وزمن دورة كاملة

$$T = 29.5 \times 24 \times 3600 = 2548800\, s \cong 2.5 \times 10^6\, s$$

$$v = \frac{s}{T} = \frac{2.4 \times 10^9}{2.5 \times 10^6} = 0.96 \times 10^3 = 9.6 \times 10^2\, m/sec$$

ونحسب التسارع المركزي :

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{(9.6 \times 10^2)^2}{385 \times 10^6} = 2.4 \times 10^{-3}\, m/sec^2$$

4-2 معادلات الحركة الزاوية ذات التعجيل المنتظم

أن كل معادلات الحركة ذات التعجيل الزاوية المنتظم ستكون على نفس صورة نظيراتها في حالة الحركة ذات التعجيل المنتظم وهي كالاتي:

$$\theta = \overline{\omega}\, t$$

$$\omega_f = \omega_i + at$$

$$\overline{\omega} = \frac{1}{2}\,(\omega_f - \omega_i)$$

$$\theta = \omega_i t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2a\,\theta$$

مثال 4-9

تدور عجلة روليت بمعدل 3 rev/sec وتتهاوى الى السكون خلال 18 sec ما قيمة تقاصرها (عجلتها السالبة) ؟ وكم دورة تدورها العجلة أثناء وصولها الى السكون؟

الحل:

$$\bar{\alpha} = \frac{\omega_f - \omega_i}{t} = \frac{0-3}{18} = -0.167\, rev/sec^2$$

$$\theta = \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\theta = (3)(18) + \frac{1}{2}\,(-0.167)(18)^2 = 27\, rev$$

مثال 4-10

يدور حجر الطاحون بتسارع زاوي ثابت بدءا من السكون زاوية 120° خلال 5 ثواني ، جد السرعة الزاوية المتوسطة للحجر وسرعته الزاوية اللحظية عندما t =5 sec وتسارعه الزاوي المتوسط

الحل:-

$$\omega_{av} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{120^{\circ}}{5\ s} = \frac{120\ (\pi/180)}{5\ sec} = \frac{2\pi}{15}\ rad/sec$$

نحسب السرعة الزاوية اللحظية بالاستفاد من كون التسارع الزاوي ثابت حيث ترتبط السرعة الزاوية المتوسطة في هذه الحالة بالسرعتين اللحظيتين ω_1 و ω_2 في اللحظتين t_1 و t_2 :

$$\omega_{av} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \rightarrow\gg \frac{2\pi}{15} = \frac{0 + \omega_2}{2}$$

$$\omega_2 = \frac{4\pi}{15}\ rad/sec$$

ولحساب التسارع المتوسط

$$\alpha_{av} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{4\pi/15 - 0}{5 - 0} = \frac{4\pi}{15 \times 5} = \frac{4\pi}{75}\ rad/sec^2$$

مثال 4-11

تدور حلقة بتسارع ثابت $3\ rad/sec^2$ وزاوية $120\ rad$ خلال اربع ثواني. ما السرعة الزاوية الابتدائية للحلقة وكم تستغرق للوصول لهذه السرعة إذا بدأت من السكون؟

الحل:-

$$\theta = \omega_i t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$120 = \omega_i (4) + \frac{1}{2}\ (3)(4)^2$$

$$\omega_i = \frac{120 - 24}{4} = 24\ rad/sec$$

$$\omega_f = \omega_i + at$$

$$t = \frac{\omega_f - \omega_i}{a} => \frac{24 - 0}{3} = 8\ sec$$