وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

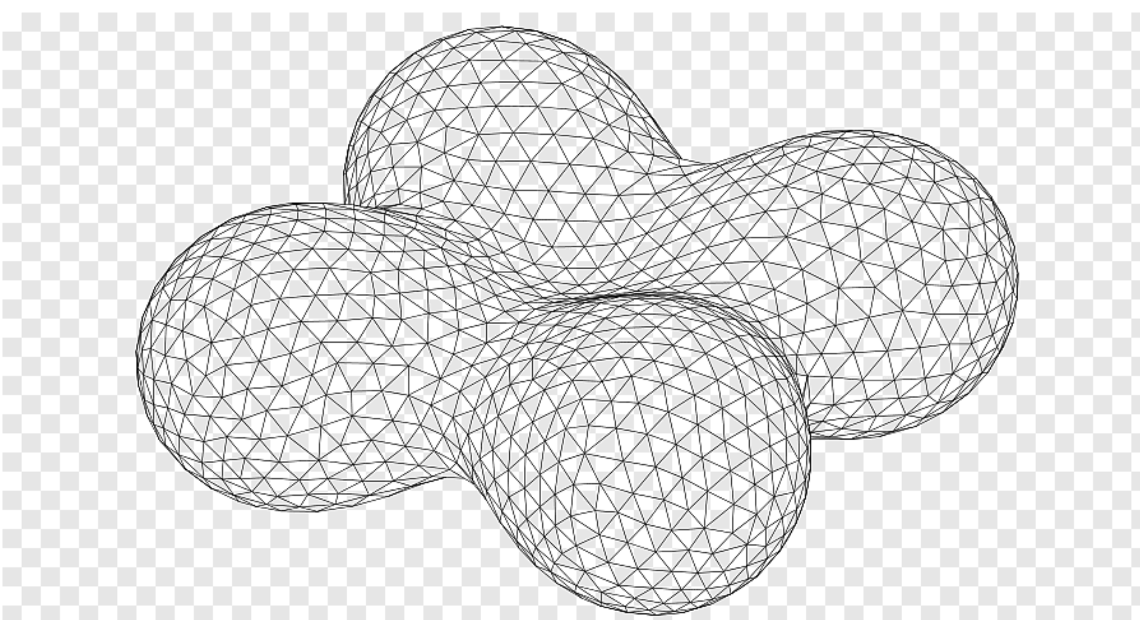
جامعة ديالى /كلية التربية المقداد

المعادلات التفاضلية الجزئية

المرحلة الثالثة / قسم الرياضيات

2021/2020

م.م. سجى باسم محمد



المعادلات التفاضلية الجزئية (م. ت. ج)

Partial Differential Equations (P.d.Es)

درسنا سابقا المعادلات التفاضلية الاعتيادية، في هذا المقرر سندرس المعادلات التفاضلية الجزئية، وان هذه المعادلات تتضمن الاشتقاقات الجزئية حيث ان مرتبة المعادلة الجزئية (order) هي اعلى مشتقة موجودة فيها.

اما درجتها (degree) فهي أس اعلى مشتقة فيها شرط ان يكون ذلك عدد صحيح موجب.

ويمكن تعريف المعادلة التفاضلية الجزئية بانها المعادلة التي تحتوي على متغير معتمد (dependent) واحد، واكثر من متغير مستقل (اثنان واكثر)، والمشتقات الجزئية للمتغير المعتمد بالنسبة لجميع المتغيرات المستقلة او بعضها.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y}$$

حيث F يمثل متغير معتمد.

x و y هما متغيرين مستقلين.

ملاحظة:

* عندما تكون درجة المعادلة تساوي واحد فهذا يعني ان المعادلة التفاضلية الجزئية هي معادلة خطية.

* اما عندما تكون درجة المعادلة اكبر من واحد فهذا يعني انها معدلة تفاضلية غير خطية.

* تكون المعادلة التفاضلية الجزئية غير خطية اذا كان المتغير المعتمد في المعادلة التفاضلية ليس من الدرجة الاولى و مضروب في المشتقات الجزئية.

* تكون المعادلة التفاضلية الجزئية متجانسة اذا كان $R(x,y)=0$.

وتكون غير متجانسة اذا كان $R(x,y)\neq 0$.

* تكون المعادلة التفاضلية الجزئية ذات معاملات ثابتة اذا كان جميع دوال المعادلة رقم (1) دوال ثابتة مثل رقم (3،2،1...) (ثابت).

وتكون ذات معاملات متغيرة اذا كانت واحدة على الاقل من هذه الدوال غير ثابتة.

الصيغة العامة للمعادلة التفاضلية الجزئية من الرتبة الثانية في المتغير المعتمد u والمتغيرين المستقلين x,y تكون بالشكل التالي:

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = R(x,y) \qquad \ldots\ldots.(1)$$

ملاحظة:-

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial xy} = s, \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} = t$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = Z_x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = Z_y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = Z_{xx}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial xy} = Z_{xy}, \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} = Z_{yy}$$

هذه الرموز ستعتمد خلال هذا المقرر .. حيث ان z هو المتغير المعتمد في حين ان (x,y) هما المتغيران المستقلان وبالإمكان التعبير عن العلاقة بين هذه المتغيرات رياضيا بالشكل:

$$z = f(x,y)$$

Ex:- order and degree

	order	degree	
1) $(u_x)^2 + u_y = 5$	1	2	غير خطية
2) $(u_{xx})^2 + u_{xxy} = 0$	3	1	خطية
3) $u_{xx} + u_y = e^{x-y}$	2	1	خطية
4) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$	2	1	خطية
5) $\frac{\partial^2 u^2}{\partial t^2} = u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$	2	2	غير خطية

مما سبق يمكن تصنيف المعادلة التفاضلية الجزئية الى 5 انواع وكالاتي

1) رتبة المعادلة التفاضلية الجزئية.
2) درجة المعادلة التفاضلية الجزئية.
3) عدد المتغيرات: هو عدد المتغيرات المستقلة في المعادلة التفاضلية الجزئية.
4) الخطية: المعادلة التفاضلية الجزئية هي اما تكون خطية او غير خطية ، فتكون خطية وذلك بتحقيق الشرطين:
   أ- جميع المشتقات الجزئية من الدرجة الاولى وغير مضروبة ببعضها.
   ب- المتغير المعتمد من الدرجة الاولى وغير مضروب بالمشتقة.
5) متجانسة او غير متجانسة.

مثال1:- أختبر المعادلات التفاضلية الجزئية خطية أم غير خطية؟

1) $e^{x+y}u_x + secx\, u_y - u = 0$
2) $yu_x + xu_y = u^3$
3) $sinx\, u_x + xu_y = e^{x+y}$
4) $u\, u_{xy} + u_x = e^{x-y}$
5) $u_{yy} - uu_{xxx} + e^{-y} = 0$
6) $u_{xx} = (u_{xxxx})^2$
7) $u\dfrac{\partial u}{\partial x} = x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y$

مثال2: أختبر المعادلات التفاضلية الجزئية متجانسة أم غير متجانسة وهل هي ذات معاملات متغيرة ام ذات معاملات ثابتة؟ وهل هي خطية ام غير خطية؟

1) $u_{xx} + 2u_{xy} = 0$
2) $x^2u_{xx} - y^3u_{yy} + u_x = 0$
3) $u_{xx} - 2u_{xy} = x + 3y$
4) $x^2u_{xx} - y^3u_{yy} + u_x = sinx$
5) $u\dfrac{\partial u}{\partial x} = x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y$

تصنيف المعادلات التفاضلية الجزئية من الرتبة الثانية

تصنف الى ثلاث انواع

$B^2 - 4AC \quad > 0$ elliptic P.D.E. المعادلة من النوع الزائدي

$= 0$ Parabolic P.D.E. المعادلة من النوع المكافئ

< 0 Hyperbolic P.D.E. المعادلة من النوع الناقص

المعادلة العامة

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} = R(x,y)$$

مثال:- بين نوع المعادلات التفاضلية التالية:

1) $u_{xx} = u_{yy}$

نقارن بالمعادلة العامة

$$u_{xx} - u_{yy} = 0$$

$$B^2 - 4AC = 0 - 4(1)(-1) = 4 \quad > 0$$

اذا المعادلة من النوع الزائدي

2) $2u_{xx} = u_x$

نقارن بالمعادلة العامة

$$2u_{xx} - u_x = 0$$

$$B^2 - 4AC = 0 - 4(2)(0) = 0$$

اذا المعادلة من النوع المكافئ

3) $u_{xx} + u_{yy} = u_x$

4) $3u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} + su_x - 7u_y + 3u = 5$

حل المعادلات التفاضلية الجزئية (Solution of P.D.Es)

هي تلك الدالة او المتطابقة بين المتغير المعتمد والمتغيرات المستقلة وتكون خالية من المشتقات الجزئية وتحقق المعادلة التفاضلية الجزئية ويكون الحل على انواع

1- الحل العام (General solution):- هو حل المعادلة التفاضلية الجزئية ويحتوي على عدد من الدوال الاختيارية المستقلة بقدر رتبة المعادلة التفاضلية.

2- الحل الخاص (Particular solution):- هو حل للمعادلة التفاضلية الجزئية ويمكن الحصول عليه من الحل العام باختيار خاص بالدوال الاختيارية.

أو هو علاقة بين المتغير المعتمد والمتغير المستقل يتضمن دوال خاصة بدل الدوال الاختيارية

3- الحل المنفرد (singular solution):- هو حل المعادلة التفاضلية الجزئية ولا يمكن الحصول عليه من الحل العام باختيار خاص من الدوال الاختيارية.

4- الحل التام (الكامل) (Complete solution) :- هو حل ايضا للمعادلة التفاضلية الجزئية يحتوي على عدد من الثوابت الاختيارية ولا يحتوي على دوال اختيارية.

وهو علاقة بين المتغير المعتمد والمتغير المستقل يتضمن ثابت التكامل (قد يكون ثابت او اكثر حسب رتبة المعادلة).

<u>تكوين المعادلات التفاضلية</u>

المعادلات التفاضلية الجزئية يمكن تكوينها بواسطة حذف الثوابت او حذف الدوال من العلاقات التي تشمل ثلاث او اكثر من المتغيرات.

1) حذف الثوابت (Elimination of arbitrary constant)

دعنا نأخذ الدالة:

$$f(x, y, z, a, b)$$

حيث (a,b) مقادير ثابتة، يتوجب علينا حذف الثوابت (a,b) من اجل تكوين معادلة تفاضلية.

يتم التخلص من الثوابت بإجراء عملية التفاضل.. وبالتالي نحصل على معادلة تفاضلية جزئية وبالشكل

$$\Phi(x, y, z, p, q)$$

حيث ان المعادلة اعلاه هو حل تام لمعادلة تفاضلية من المرتبة الاولى.

- اذا كان عدد الثوابت المحذوفة يساوي عدد المتغيرات المستقلة، فأن المعادلة التفاضلية التي نحصل عليها بعد حذف الثوابت ستكون من المرتبة الاولى.
- اما اذا كان عدد الثوابت المحذوفة اكثر من عدد المتغيرات المستقلة، فان المعادلة التفاضلية الناتجة ستكون من المرتبة الثانية او اعلى.

مثال 4:- جد معادلة تفاضلية جزئية بعد حذف الثوابت (a,b) من المعادلة التالية:

$$z = (x^2 + a)(y^2 + b)$$

الحل // نفاضل جزئيا بالنسبة لـ (x) و (y) على التوالي سنحصل على:

$$z_x = 2x(y^2 + b)$$

$$z_y = 2y(x^2 + a)$$

نفرض ان $z_x = p$ و $z_y = q$

$$\text{p} = 2x(y^2 + b) => y^2 + b = \frac{p}{2x}$$

$$\text{q} = 2y(x^2 + b) => \ x^2 + a = \frac{q}{2y}$$

نعوض في المعادلة الاولى (المعادلة المعطى بالسؤال)

$$z = \frac{q}{2y}\frac{p}{2x} => pq = 4xyz$$

مثال 5:- احذف الثوابت الاختيارية من العلاقة الدالية حيث (z) المتغير التابع (المعتمد) و (x , y) المتغيران المستقلان.

$$z = Ax^2 + Ay + C$$

الحل // نلاحظ ان عدد الثوابت هما (A, C) ويساوي عدد المتغيرات المستقلة.

نشتق المعادلة بالنسبة لـ x و y

$$z_x = 2Ax$$

$$z_y = A$$

نعوض المعادلة 2 في 1

$$z_x = 2xz_y$$

معادلة تفاضلية من الرتبة الاولى

$$\frac{\partial z}{\partial x} - 2x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

مثال 6:- احذف الثوابت الاختيارية التالية لتكوين معادلة جزئية حيث ان (z) متغير تابع و (x , y) متغيران مستقلان

$$z = (x-a)^2 + (y-b)^2$$

الحل // عدد الثوابت = عدد المتغيرات المستقلة

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2(x-a) => (x-a) = \frac{1\partial z}{2\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2(y-b) => (y-b) = \frac{1\partial z}{2\partial y}$$

نعوض في المعادلة الاصلية (بالسؤال)

$$z = [\frac{1\partial z}{2\partial x}]^2 + [\frac{1\partial z}{2\partial y}]^2$$

$$4z = [\frac{\partial z}{\partial x}]^2 + [\frac{\partial z}{\partial y}]^2$$

مثال 7:- كون معادلة تفاضلية جزئية بعد حذف الثوابت الاختيارية من العلاقة الدالية التالية وفيها *(z)* متغير معتمد و (x , y) متغيران مستقلان

$$z = Ax + By + C$$

الحل // نلاحظ ان عدد الثوابت ثلاثة (A,B,C) وعدد المتغيرات المستقلة اثنان

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A \quad , \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = B \qquad \ldots\ldots\ldots(2)$$

نعوض بالمعادلة الاصلية (بالسؤال)

$$z = x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} + C$$

∵ الثابت (C) *بقى في المعادلة*، ∴ لابد من الاشتقاق مرة ثانية للمعادلة رقم (2):

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \ ; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial xy} = 0$$

∴ هناك ثلاث معادلات من الرتبة الثانية يكون حلها السؤال اعلاه.

مثال 8:- جد المعادلة التفاضلية الجزئية من العلاقات التالية :

1. $z = Ax^2 + By^2$

2. $z = axe^y + \frac{1}{2}a^2e^{2y} + b$

مثال 9:- جد المعادلة التفاضلية الجزئية بعد حذف الثوابت (a,b) من العلاقة الدالية:

1. $\ln(az - 1) = x + ay + b$
2. $z = f(x + ay) + g(x - ay)$
3. $z = ax^2 + by^2 + ab$
4. $z = xy + y\sqrt{x^2 + a^2} + b$
5. $z = axy + b$
6. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
7. $z = ax + by + cxy$

حل المعادلات التفاضلية الجزئية (Solution of P.D.Es)

هي تلك الدالة او المتطابقة بين المتغير المعتمد والمتغيرات المستقلة وتكون خالية من المشتقات الجزئية وتحقق المعادلة التفاضلية الجزئية ويكون الحل على انواع

1- الحل العام (General solution):- هو حل المعادلة التفاضلية الجزئية ويحتوي على عدد من الدوال الاختيارية المستقلة بقدر رتبة المعادلة التفاضلية.

2- الحل الخاص (Particular solution):- هو حل للمعادلة التفاضلية الجزئية ويمكن الحصول عليه من الحل العام باختيار خاص بالدوال الاختيارية.

أو هو علاقة بين المتغير المعتمد والمتغير المستقل يتضمن دوال خاصة بدل الدوال الاختيارية

3- الحل المنفرد (singular solution):- هو حل المعادلة التفاضلية الجزئية ولا يمكن الحصول عليه من الحل العام باختيار خاص من الدوال الاختيارية.

4- الحل التام (الكامل) (Complete solution) :- هو حل ايضا للمعادلة التفاضلية الجزئية يحتوي على عدد من الثوابت الاختيارية ولا يحتوي على دوال اختيارية.

وهو علاقة بين المتغير المعتمد والمتغير المستقل يتضمن ثابت التكامل (قد يكون ثابت او اكثر حسب رتبة المعادلة).

<u>تكوين المعادلات التفاضلية</u>

المعادلات التفاضلية الجزئية يمكن تكوينها بواسطة حذف الثوابت او حذف الدوال من العلاقات التي تشمل ثلاث او اكثر من المتغيرات.

1) حذف الثوابت (Elimination of arbitrary constant)

دعنا نأخذ الدالة:

$$f(x, y, z, a, b)$$

حيث (a,b) مقادير ثابتة، يتوجب علينا حذف الثوابت (a,b) من اجل تكوين معادلة تفاضلية.

يتم التخلص من الثوابت بإجراء عملية التفاضل.. وبالتالي نحصل على معادلة تفاضلية جزئية وبالشكل

$$\Phi(x, y, z, p, q)$$

حيث ان المعادلة اعلاه هو حل تام لمعادلة تفاضلية من المرتبة الاولى.

- اذا كان عدد الثوابت المحذوفة يساوي عدد المتغيرات المستقلة، فأن المعادلة التفاضلية التي نحصل عليها بعد حذف الثوابت ستكون من المرتبة الاولى.
- اما اذا كان عدد الثوابت المحذوفة اكثر من عدد المتغيرات المستقلة، فان المعادلة التفاضلية الناتجة ستكون من المرتبة الثانية او اعلى.

مثال 4:- جد معادلة تفاضلية جزئية بعد حذف الثوابت (a,b) من المعادلة التالية:

$$z = (x^2 + a)(y^2 + b)$$

الحل // نفاضل جزئيا بالنسبة لـ (x) و (y) على التوالي سنحصل على:

$$z_x = 2x(y^2 + b)$$

$$z_y = 2y(x^2 + a)$$

نفرض ان $z_x = p$ و $z_y = q$

$$\text{p} = 2x(y^2 + b) => y^2 + b = \frac{p}{2x}$$

$$\text{q} = 2y(x^2 + b) => x^2 + a = \frac{q}{2y}$$

نعوض في المعادلة الاولى (المعادلة المعطى بالسؤال)

$$z = \frac{q}{2y}\frac{p}{2x} => pq = 4xyz$$

مثال 5:- احذف الثوابت الاختيارية من العلاقة الدالية حيث (z) المتغير التابع (المعتمد) و (x , y) المتغيران المستقلان.

$$z = Ax^2 + Ay + C$$

الحل // نلاحظ ان عدد الثوابت هما (A, C) ويساوي عدد المتغيرات المستقلة.

نشتق المعادلة بالنسبة لـ x و y

$$z_x = 2Ax$$

$$z_y = A$$

نعوض المعادلة 2 في 1

$$z_x = 2xz_y$$

معادلة تفاضلية من الرتبة الاولى

$$\frac{\partial z}{\partial x} - 2x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

مثال 6:- احذف الثوابت الاختيارية التالية لتكوين معادلة جزئية حيث ان (z) متغير تابع و (x , y) متغيران مستقلان

$$z = (x-a)^2 + (y-b)^2$$

الحل // عدد الثوابت = عدد المتغيرات المستقلة

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2(x-a) => (x-a) = \frac{1\partial z}{2\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2(y-b) => (y-b) = \frac{1\partial z}{2\partial y}$$

نعوض في المعادلة الاصلية (بالسؤال)

$$z = [\frac{1\partial z}{2\partial x}]^2 + [\frac{1\partial z}{2\partial y}]^2$$

$$4z = [\frac{\partial z}{\partial x}]^2 + [\frac{\partial z}{\partial y}]^2$$

مثال 7:- كون معادلة تفاضلية جزئية بعد حذف الثوابت الاختيارية من العلاقة الدالية التالية وفيها *(z)* متغير معتمد و (x , y) متغيران مستقلان

$$z = Ax + By + C$$

الحل // نلاحظ ان عدد الثوابت ثلاثة (A,B,C) وعدد المتغيرات المستقلة اثنان

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A \quad , \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = B \qquad \ldots\ldots\ldots(2)$$

نعوض بالمعادلة الاصلية (بالسؤال)

$$z = x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} + C$$

∵ الثابت (C) *بقى في المعادلة*، ∴لابد من الاشتقاق مرة ثانية للمعادلة رقم (2):

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \;\; ; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial xy} = 0$$

∴ هناك ثلاث معادلات من الرتبة الثانية يكون حلها السؤال اعلاه.

مثال 8:- جد المعادلة التفاضلية الجزئية من العلاقات التالية :

1. $z = Ax^2 + By^2$

الحل// نشتق المعادلة بالنسبة لـ x و y

$$z_x = 2Ax => A = \frac{z_x}{2x}$$

$$z_y = 2By => B = \frac{z_x}{2B}$$

نعوض قيمة A و B في المعادلة

$$z = \frac{1}{2x}x^2 z_x + \frac{1}{2y}y^2 z_y$$

$$z = \frac{1}{2}x\, z_x + \frac{1}{2}yz_y$$

---

2. $z = axe^y + \frac{1}{2}a^2e^{2y} + b \qquad .....(1)$

الحل//

$$z_x = ae^y => a = \frac{z_x}{e^y} \equiv \frac{p}{e^y} \qquad ....(2)$$

$$z_y = axe^y + a^2e^{2y}$$

$$z_{xy} = ae^y => a = \frac{z_{xy}}{e^y} \equiv \frac{s}{e^y} \qquad ....(3)$$

نستخرج قيمة b من المعادلة رقم (1)

$$b = z - axe^y - \frac{1}{2}a^2e^{2y} \qquad ....(4)$$

نعوض معادلة 3 في 4

$$b = z - \frac{s}{e^y} x e^y - \frac{1}{2}(\frac{s}{e^y})^2 e^{2y}$$

$$b = z - sx - \frac{1}{2}\ s^2 \qquad \ldots\ldots(5)$$

نعوض (2) و(5) في المعادلة رقم (1)

$$z = \frac{p}{e^y}\ x\ e^y + \frac{1}{2}(\frac{p}{e^y})^2 e^{2y} + z - sx - \frac{1}{2}\ s^2$$

$$z = p\ x\ + \frac{1}{2}(p)^2 + z - sx - \frac{1}{2}\ s^2$$

$$p\ x\ + \frac{1}{2}(p)^2 - sx - \frac{1}{2}\ s^2 = 0$$

مثال 9:- جد المعادلة التفاضلية الجزئية بعد حذف الثوابت (a,b) من العلاقة الدالية:

1. $\ln(az-1) = x + ay + b$

الحل// نشتق بالنسبة لـ x

$$\frac{(az-1)'}{az-1} = 1 => \frac{az_x}{az-1} = 1 \equiv \left(\frac{1}{az-1}\right) ap = 1 \qquad \ldots\ldots(2)$$

نشتق بالنسبة لـ y

$$\frac{(az-1)'}{az-1} = a => \frac{az_y}{az-1} = a \equiv \left(\frac{1}{az-1}\right) aq = a \qquad \ldots\ldots\ldots(3)$$

بقسمة المعادلة 3 على المعادلة 2 نحصل على التالي

$$a = \frac{q}{p}$$

نعوض بالمعادلة 2

$$\left(\frac{1}{\frac{q}{p}z - 1}\right)\frac{q}{p}p = 1$$

$$q = \frac{q}{p} z - 1$$

$$q + 1 = \frac{q}{p} z$$

$$p(q + 1) = qz$$

----

2. $z = f(x + ay) + g(x - ay)$

الحل// لدينا ثابت واحد فقط هو a

$$z_x = f'(x + ay) + g'(x - ay)$$

$$z_y = af'(x + ay) + ag'(x - ay)$$

$$z_{xx} = f''(x + ay) + g''(x - ay)$$

$$z_{yy} = a^2 f''(x + ay) + a^2 g''(x - ay)$$

$$z_{yy} = a^2 [f''^{(x+ay)} + g''(x - ay)]$$

$$z_{yy} = a^2 z_{xx}$$

----

3. $z = ax^2 + by^2 + ab$

الحل//

$$z_x = 2ax => a = \frac{z_x}{2x} \equiv \frac{p}{2x}$$

$$z_y = 2by => b = \frac{z_y}{2y} \equiv \frac{q}{2y}$$

نعوض في المعادلة الاصلية

$$z = \frac{p}{2x}x^2 + \frac{q}{2y}y^2 + \frac{p}{2x}\frac{q}{2y}$$

نضرب المعادلة بـ 2

$$z = px + qy + \frac{pq}{2xy}$$

$$2xyz = 2px^2y + 2qxy^2 + pq$$

----

4. $z = xy + y\sqrt{x^2 - a^2} + b$

الحل//

$$z_x = y + \frac{2xy}{2\sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$p = y + \frac{xy}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$p - y = \frac{xy}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{xy}{p - y} => x^2 - a^2 = (\frac{xy}{p - y})^2$$

$$a^2 = x^2 - (\frac{xy}{p - y})^2$$

$$a = \sqrt{x^2 - (\frac{xy}{p - y})^2}$$

$$z_y = x + \sqrt{x^2 - a^2}$$

$$\mathrm{q} = x + \sqrt{x^2 - a^2}$$

$$\mathrm{q} - \mathrm{x} = \sqrt{x^2 - a^2}$$

$$(\mathrm{q} - \mathrm{x})^2 = x^2 - a^2$$

$$a^2 = x^2 - \ (\mathrm{q} - \mathrm{x})^2$$

$$a = \sqrt{x^2 - \ (\mathrm{q} - \mathrm{x})^2}$$

نستخرج قيمة b من المعادلة الاولى

$$z = xy + y\sqrt{x^2 - a^2} + b$$

$$b = z - xy - y\sqrt{x^2 - a^2}$$

نعوض قيمة a بالمعادلة اعلاه

$$b = z - xy - y\sqrt{x^2 - x^2 + \ (\mathrm{q} - \mathrm{x})^2}$$

$$b = z - xy - y\sqrt{\ (\mathrm{q} - \mathrm{x})^2}$$

$$b = z - xy - y\ (\mathrm{q} - \mathrm{x})$$

نعوض قيمة a و b في المعادلة الاصلية

$$z = xy + y\sqrt{x^2 - a^2} + b$$

$$z = xy + y\sqrt{x^2 - x^2 + (\frac{xy}{p - y})^2} + z - xy - y\ (\mathrm{q} - \mathrm{x})$$

$$y\sqrt{x^2 - x^2 + (\frac{xy}{p - y})^2} + z - z - xy + xy - y\ (\mathrm{q} - \mathrm{x}) = 0$$

$$y\sqrt{(\frac{xy}{p-y})^2} - y\,(\mathrm{q}-\mathrm{x}) = 0$$

----

5. $z = axy + b$

الحل// نشتق بالنسبة لـ (x) وبالنسبة لـ (y)

$$z_x = ay$$

$$a = \frac{z_x}{y} \equiv \frac{p}{y}$$

$$z_y = ax$$

$$a = \frac{z_y}{x} \equiv \frac{q}{x}$$

$$\frac{p}{y} = \frac{q}{x} => px = qy => px - qy = 0$$

---

6. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

الحل// هنا z متغير معتمد

نشتق المعادلة بالنسبة لـ x

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2z}{c^2} z_x = 0$$

نشتق بالنسبة لـ x مرة ثانية

$$\frac{2}{a^2} + \frac{2}{c^2}[\, zz_{xx} + z_x z_x] = 0$$

$$\frac{2}{a^2}+\frac{2}{c^2}\left[z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right]=0$$

نشتق معادلة السؤال بالنسبة لـ y

$$\frac{2y}{b^2}+\frac{2z}{c^2}z_y=0$$

نشتق بالنسبة لـ y مرة اخرى

$$\frac{2}{b^2}+\frac{2}{c^2}\left[z\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right]=0$$

نشتق معادلة بالنسبة لـ xy

$$0+\frac{2}{c^2}\left[z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial z}{\partial y}\right]=0$$

من هذه المعادلة نحصل على المعادلة المطلوبة :

$$\frac{2}{c^2}\left[z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial z}{\partial y}\right]=0$$

$$2\left[z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial z}{\partial y}\right]=0$$

----

7. $z=ax+by+cxy$

الحل//

$z_x=a+cy$ ……….(2)

$z_y=b+cx$ ………(3)

$z_{xx} = 0$ ………….(4)

$z_{yy} = 0$ …………(5)

$z_{xy} = c$ …………(6)

نعوض (6) في (2)

$$z_x = a + z_{xy}y$$

$a = z_x - z_{xy}y$ …….(7)

نعوض (6) في (3)

$$z_y = b + z_{xy}x$$

$b = z_y - z_{xy}x$ ………(8)

نعوض 6 و7 و8 في 1

$$z = ax + by + cxy$$

$$z = (z_x - z_{xy}y)x + (z_y - z_{xy}x)y + z_{xy}xy$$

$$z = (z_x - z_{xy}y)x + (z_y - z_{xy}x)y + z_{xy}xy$$

$$z = xz_x - z_{xy}yx + yz_y - z_{xy}xy + z_{xy}xy$$

$$z = xz_x - z_{xy}yx + yz_y$$

$$z = xz_x - z_{xy}yx + yz_y$$

$$z = x\mathrm{p} - yxs + yq$$

حل المعادلات التفاضلية الجزئية (Solution of P.D.Es)

هي تلك الدالة او المتطابقة بين المتغير المعتمد والمتغيرات المستقلة وتكون خالية من المشتقات الجزئية وتحقق المعادلة التفاضلية الجزئية ويكون الحل على انواع

1- الحل العام (General solution):- هو حل المعادلة التفاضلية الجزئية ويحتوي على عدد من الدوال الاختيارية المستقلة بقدر رتبة المعادلة التفاضلية.

2- الحل الخاص (Particular solution):- هو حل للمعادلة التفاضلية الجزئية ويمكن الحصول عليه من الحل العام باختيار خاص بالدوال الاختيارية.

أو هو علاقة بين المتغير المعتمد والمتغير المستقل يتضمن دوال خاصة بدل الدوال الاختيارية

3- الحل المنفرد (singular solution):- هو حل المعادلة التفاضلية الجزئية ولا يمكن الحصول عليه من الحل العام باختيار خاص من الدوال الاختيارية.

4- الحل التام (الكامل) (Complete solution) :- هو حل ايضا للمعادلة التفاضلية الجزئية يحتوي على عدد من الثوابت الاختيارية ولا يحتوي على دوال اختيارية.

وهو علاقة بين المتغير المعتمد والمتغير المستقل يتضمن ثابت التكامل (قد يكون ثابت او اكثر حسب رتبة المعادلة).

تكوين المعادلات التفاضلية

المعادلات التفاضلية الجزئية يمكن تكوينها بواسطة حذف الثوابت او حذف الدوال من العلاقات التي تشمل ثلاث او اكثر من المتغيرات.

1) حذف الثوابت (Elimination of arbitrary constant)

دعنا نأخذ الدالة:

$$f(x, y, z, a, b)$$

حيث (a,b) مقادير ثابتة، يتوجب علينا حذف الثوابت (a,b) من اجل تكوين معادلة تفاضلية.

يتم التخلص من الثوابت بإجراء عملية التفاضل.. وبالتالي نحصل على معادلة تفاضلية جزئية وبالشكل

$$\Phi(x, y, z, p, q)$$

حيث ان المعادلة اعلاه هو حل تام لمعادلة تفاضلية من المرتبة الاولى.

- اذا كان عدد الثوابت المحذوفة يساوي عدد المتغيرات المستقلة، فأن المعادلة التفاضلية التي نحصل عليها بعد حذف الثوابت ستكون من المرتبة الاولى.
- اما اذا كان عدد الثوابت المحذوفة اكثر من عدد المتغيرات المستقلة، فان المعادلة التفاضلية الناتجة ستكون من المرتبة الثانية او اعلى.

مثال 4:- جد معادلة تفاضلية جزئية بعد حذف الثوابت (a,b) من المعادلة التالية:

$$z=(x^2+a)(y^2+b)$$

الحل // نفاضل جزئيا بالنسبة لـ (x) و (y) على التوالي سنحصل على:

$$z_x=2x(y^2+b)$$

$$z_y=2y(x^2+a)$$

نفرض ان $z_x=p$ و $z_y=q$

$$\mathrm{p}=2x(y^2+b) => y^2+b=\frac{p}{2x}$$

$$\mathrm{q}=2y(x^2+b) => x^2+a=\frac{q}{2y}$$

نعوض في المعادلة الاولى (المعادلة المعطى بالسؤال)

$$z=\frac{q}{2y}\frac{p}{2x} => pq=4xyz$$

مثال 5:- احذف الثوابت الاختيارية من العلاقة الدالية حيث (z) المتغير التابع (المعتمد) و (x , y) المتغيران المستقلان.

$$z = Ax^2 + Ay + C$$

الحل // نلاحظ ان عدد الثوابت هما (A, C) ويساوي عدد المتغيرات المستقلة.

نشتق المعادلة بالنسبة لـ x و y

$$z_x = 2Ax$$

$$z_y = A$$

نعوض المعادلة 2 في 1

$$z_x = 2xz_y$$

معادلة تفاضلية من الرتبة الاولى

$$\frac{\partial z}{\partial x} - 2x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

مثال 6:- احذف الثوابت الاختيارية التالية لتكوين معادلة جزئية حيث ان (z) متغير تابع و (x , y) متغيران مستقلان

$$z = (x-a)^2 + (y-b)^2$$

الحل // عدد الثوابت = عدد المتغيرات المستقلة

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2(x-a) => (x-a) = \frac{1\partial z}{2\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2(y-b) => (y-b) = \frac{1\partial z}{2\partial y}$$

نعوض في المعادلة الاصلية (بالسؤال)

$$z=[\frac{1\partial z}{2\partial x}]^2+[\frac{1\partial z}{2\partial y}]^2$$

$$4z=[\frac{\partial z}{\partial x}]^2+[\frac{\partial z}{\partial y}]^2$$

مثال 7:- كون معادلة تفاضلية جزئية بعد حذف الثوابت الاختيارية من العلاقة الدالية التالية وفيها *(z)* متغير معتمد و (x , y) متغيران مستقلان

$$z=Ax+By+C$$

الحل // نلاحظ ان عدد الثوابت ثلاثة (A,B,C) وعدد المتغيرات المستقلة اثنان

$$\frac{\partial z}{\partial x}=A \quad , \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=B \qquad \ldots\ldots\ldots(2)$$

نعوض بالمعادلة الاصلية (بالسؤال)

$$z=x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}+C$$

$\because$ الثابت (C) *بقى في المعادلة*، $\therefore$ لابد من الاشتقاق مرة ثانية للمعادلة رقم (2):

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0 \;; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial xy}=0$$

$\therefore$ هناك ثلاث معادلات من الرتبة الثانية يكون حلها السؤال اعلاه.

مثال 8:- جد المعادلة التفاضلية الجزئية من العلاقات التالية :

1. $z = Ax^2 + By^2$

الحل// نشتق المعادلة بالنسبة لـ x وy

$$z_x = 2Ax => A = \frac{z_x}{2x}$$

$$z_y = 2By => B = \frac{z_x}{2B}$$

نعوض قيمة A وB في المعادلة

$$z = \frac{1}{2x}x^2 z_x + \frac{1}{2y}y^2 z_y$$

$$z = \frac{1}{2}x\, z_x + \frac{1}{2}y z_y$$

----

2. $z = axe^y + \frac{1}{2}a^2e^{2y} + b$ …..(1)

الحل//

$$z_x = ae^y => a = \frac{z_x}{e^y} \equiv \frac{p}{e^y} \qquad …….(2)$$

$$z_y = axe^y + a^2e^{2y}$$

$$z_{xy} = ae^y => a = \frac{z_{xy}}{e^y} \equiv \frac{s}{e^y} \qquad ……….(3)$$

نستخرج قيمة b من المعادلة رقم (1)

$$b = z - axe^y - \frac{1}{2}a^2e^{2y} \qquad ………………..(4)$$

نعوض معادلة 3 في 4

$$b = z - \frac{s}{e^y} x e^y - \frac{1}{2}(\frac{s}{e^y})^2 e^{2y}$$

$$b = z - sx - \tfrac{1}{2}\ s^2 \qquad \ldots\ldots(5)$$

نعوض (2) و(5) في المعادلة رقم (1)

$$z = \frac{p}{e^y}\ x\ e^y + \frac{1}{2}(\frac{p}{e^y})^2 e^{2y} + z - sx - \frac{1}{2}\ s^2$$

$$z = p\ x\ + \frac{1}{2}(p)^2 + z - sx - \frac{1}{2}\ s^2$$

$$p\ x\ + \frac{1}{2}(p)^2 - sx - \frac{1}{2}\ s^2 = 0$$

مثال 9:- جد المعادلة التفاضلية الجزئية بعد حذف الثوابت (a,b) من العلاقة الدالية:

1. $\ln(az-1) = x + ay + b$

الحل// نشتق بالنسبة لـ x

$$\frac{(az-1)\prime}{az-1} = 1 => \frac{az_x}{az-1} = 1 \equiv \left(\frac{1}{az-1}\right) ap = 1 \qquad \ldots\ldots(2)$$

نشتق بالنسبة لـ y

$$\frac{(az-1)\prime}{az-1} = a => \frac{az_y}{az-1} = a \equiv \left(\frac{1}{az-1}\right) aq = a \qquad \ldots\ldots\ldots(3)$$

بقسمة المعادلة 3 على المعادلة 2 نحصل على التالي

$$a = \frac{q}{p}$$

نعوض بالمعادلة 2

$$\left(\frac{1}{\frac{q}{p} z - 1}\right)\frac{q}{p} p = 1$$

$$q = \frac{q}{p} z - 1$$

$$q + 1 = \frac{q}{p} z$$

$$p(q + 1) = qz$$

----

2. $z = f(x + ay) + g(x - ay)$

الحل// لدينا ثابت واحد فقط هو a

$$z_x = f'(x + ay) + g'(x - ay)$$

$$z_y = af'(x + ay) + ag'(x - ay)$$

$$z_{xx} = f''(x + ay) + g''(x - ay)$$

$$z_{yy} = a^2 f''(x + ay) + a^2 g''(x - ay)$$

$$z_{yy} = a^2 [f''^{(x+ay)} + g''(x - ay)]$$

$$z_{yy} = a^2 z_{xx}$$

----

3. $z = ax^2 + by^2 + ab$

الحل//

$$z_x = 2ax => a = \frac{z_x}{2x} \equiv \frac{p}{2x}$$

$$z_y = 2by => b = \frac{z_y}{2y} \equiv \frac{q}{2y}$$

نعوض في المعادلة الاصلية

$$z = \frac{p}{2x}x^2 + \frac{q}{2y}y^2 + \frac{p}{2x}\frac{q}{2y}$$

نضرب المعادلة بـ 2

$$z = px + qy + \frac{pq}{2xy}$$

$$2xyz = px + qy + pq$$

----

4. $z = xy + y\sqrt{x^2 - a^2} + b$

الحل//

$$z_x = y + \frac{2xy}{2\sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$p = y + \frac{xy}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$p - y = \frac{xy}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{xy}{p - y} => x^2 - a^2 = (\frac{xy}{p - y})^2$$

$$a^2 = x^2 - (\frac{xy}{p - y})^2$$

$$a = \sqrt{x^2 - (\frac{xy}{p - y})^2}$$

$$z_y = x + \sqrt{x^2 - a^2}$$

$$\mathrm{q} = x + \sqrt{x^2 - a^2}$$

$$\mathrm{q} - \mathrm{x} = \sqrt{x^2 - a^2}$$

$$(\mathrm{q} - \mathrm{x})^2 = x^2 - a^2$$

$$a^2 = x^2 - (\mathrm{q} - \mathrm{x})^2$$

$$a = \sqrt{x^2 - (\mathrm{q} - \mathrm{x})^2}$$

نستخرج قيمة b من المعادلة الاولى

$$z = xy + y\sqrt{x^2 - a^2} + b$$

$$b = z - xy - y\sqrt{x^2 - a^2}$$

نعوض قيمة a بالمعادلة اعلاه

$$b = z - xy - y\sqrt{x^2 - x^2 + (\mathrm{q} - \mathrm{x})^2}$$

$$b = z - xy - y\sqrt{(\mathrm{q} - \mathrm{x})^2}$$

$$b = z - xy - y\,(\mathrm{q} - \mathrm{x})$$

نعوض قيمة a و b في المعادلة الاصلية

$$z = xy + y\sqrt{x^2 - a^2} + b$$

$$z = xy + y\sqrt{x^2 - x^2 + (\frac{xy}{p - y})^2} + z - xy - y\,(\mathrm{q} - \mathrm{x})$$

$$y\sqrt{x^2 - x^2 + (\frac{xy}{p - y})^2} + z - z - xy + xy - y\,(\mathrm{q} - \mathrm{x}) = 0$$

$$y\sqrt{(\frac{xy}{p-y})^2} - y\,(\mathrm{q}-\mathrm{x}) = 0$$

----

5. $z = axy + b$

الحل// نشتق بالنسبة لـ (x) وبالنسبة لـ (y)

$$z_x = ay$$

$$a = \frac{z_x}{y} \equiv \frac{p}{y}$$

$$z_y = ax$$

$$a = \frac{z_y}{x} \equiv \frac{q}{x}$$

$$\frac{p}{y} = \frac{q}{x} => px = qy => px - qy = 0$$

---

6. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

الحل// هنا z متغير معتمد

نشتق المعادلة بالنسبة لـ x

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2z}{c^2} z_x = 0$$

نشتق بالنسبة لـ x مرة ثانية

$$\frac{2}{a^2} + \frac{2}{c^2}[\, z z_{xx} + z_x z_x] = 0$$

$$\frac{2}{a^2}+\frac{2}{c^2}\left[z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right]=0$$

نشتق معادلة السؤال بالنسبة لـ y

$$\frac{2y}{b^2}+\frac{2z}{c^2}z_y=0$$

نشتق بالنسبة لـ y مرة اخرى

$$\frac{2}{b^2}+\frac{2}{c^2}\left[z\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right]=0$$

نشتق معادلة بالنسبة لـ xy

$$0+\frac{2}{c^2}\left[z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial z}{\partial y}\right]=0$$

من هذه المعادلة نحصل على المعادلة المطلوبة :

$$\frac{2}{c^2}\left[z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial z}{\partial y}\right]=0$$

$$2\left[z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial z}{\partial y}\right]=0$$

--- ---

7. $z=ax+by+cxy$

الحل//

$z_x=a+cy$ ....*(2)*

$z_y=b+cx$ ....*(3)*

$z_{xx} = 0$ ………….(4)

$z_{yy} = 0$ …………(5)

$z_{xy} = c$ …………(6)

نعوض (6) في (2)

$$z_x = a + z_{xy}y$$

$a = z_x - z_{xy}y$ …….(7)

نعوض (6) في (3)

$$z_y = b + z_{xy}x$$

$b = z_y - z_{xy}x$ ………(8)

نعوض 6 و7 و8 في 1

$$z = ax + by + cxy$$

$$z = (z_x - z_{xy}y)x + (z_y - z_{xy}x)y + z_{xy}xy$$

$$z = (z_x - z_{xy}y)x + (z_y - z_{xy}x)y + z_{xy}xy$$

$$z = xz_x - z_{xy}yx + yz_y - z_{xy}xy + z_{xy}xy$$

$$z = xz_x - z_{xy}yx + yz_y$$

$$z = xz_x - z_{xy}yx + yz_y$$

$$z = x\mathrm{p} - yxs + yq$$

2) حذف الدوال الاختيارية (Elimination of arbitrary function)

هناك عدة حالات عند تكوين معادلة تفاضلية جزئية بحذف الدوال الاختيارية

الحالة الاولى: اذا كانت المعادلة تحتوي على دالة اختيارية واحدة (غير مشتركة)

مثل p_x او g_y نتبع ما يلي:

1) المعادلة المعطاة في السؤال نسميها المعادلة رقم (1)
2) نشتق المعادلة رقم (1) مرة واحدة ونسميها معادلة (2)

نشتق بحيث الاشتقاق لا يؤثر على الدالة الاختيارية بمعني اذا كانت f(x) نشتق بالنسبة لـ y واذا كانت f(y) نشتق بالنسبة لـ x.

3) من معادلة (2) نحاول نجري عمليات جبرية الغاية منها ان نجد f(x) او f(y) ونسميها معادلة (3).
4) نعوض معادلة (3) في (1) الغاية منها التخلص من الدالة الاختيارية.
5) نجري عمليات حسابية الغاية منها وضع المتغير المعتمد والمشتقات في جهة والمتغيرات المستقلة في جهة اخرى.

مثال 10:- جد معادلة تفاضلية جزئية من المعادلة التالية:

$$u = y^2 f(x) - 3x + 4y \qquad ....(1)$$

الحل// نشتق بالنسبة لـ y

$$u_y = 2yf(x) + 4 \qquad ....(2)$$

$$u_y - 4 = 2yf(x)$$

$$f(x) = \frac{u_y - 4}{2y} \qquad ....(3)$$

نعوض (3) في (1)

$$u = y^2 \frac{u_y - 4}{2y} - 3x + 4y$$

$$u = \frac{1}{2} y(u_y - 4) - 3x + 4y$$

$$u = \frac{1}{2} y u_y - 2y - 3x + 4y$$

$$u = \frac{1}{2} y u_y - 3x + 2y$$

$$2u - y u_y = 4y - 6x$$

الحالة الثانية: اذا كانت تحتوي على دالة اختيارية واحدة مشتركة مثل f(xy) او f(x-y) نتبع ما يلي :

اولا:

1) نشتق المعادلة المعطاة بالسؤال مرة واحدة بالنسبة لـx
2) نعوض بدل $p \equiv \frac{\partial u}{\partial x}$
3) نجري عمليات جبرية الغاية منها جعل الدالة الاختيارية المشتقة في جهة والباقي في جهة اخرى وتسميتها المعادلة (1)

ثانيا:

1) نشتق المعادلة المعطاة بالسؤال مرة واحدة بالنسبة لـy.
2) نعوض بدل $q \equiv \frac{\partial u}{\partial y}$
3) نجري عمليات جبرية الغاية منها جعل الدالة الاختيارية المشتقة في جهة والباقي في جهة اخرى وتسميتها المعادلة (2)

ثالثا:

نعوض معادلة رقم (1) في (2) ثم نجري عمليات حسابية ونحصل على الحل:

مثال 11:- جد معادلة تفاضلية جزئية من المعادلة التالية:

$$z = f(x^2 + y^2)$$

الحل//

$$z_x = f'(x^2 + y^2)2x$$

$$f'(x^2 + y^2) = \frac{p}{2x} \qquad \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$z_y = f'(x^2 + y^2)2y$$

$$f'(x^2 + y^2) = \frac{q}{2y} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$\frac{p}{2x} = \frac{q}{2y}$$

$$py - qx = 0$$

الحالة الثالثة: عندما تحتوي على دالتين اختياريتين غير مشتركة مثل *f(x)* و *g(y)* نتبع ما يلي

اولا وثانيا كما في الحالة الثانية

ثالثا: نشتق المعادلة المعطاة في السؤال مرتين المرة الاولى بالنسبة لـx والمرة الثانية بالنسبة لـy فنحصل على $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ ثم نعوض معادلة (1) و(2) فيها ونجري عمليات جبرية ونحصل على الحل.

مثال 12:- جد معادلة تفاضلية جزئية من المعادلة التالية:

$$u = xf(y) + yg(x)$$

الحل//

$$u_x = f(y) + yg'(x)$$

$$u_x - f(y) = yg'(x)$$

$$g'(x) = \frac{u_x - f(y)}{y} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$u_y = xf'(y) + g(x)$$

$$u_y - g(x) = xf'(y)$$

$$u_y - g(x) = xf'(y)$$

$$f'(y) = \frac{u_y - g(x)}{x} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$u_{xy} = f'(y) + g'(x)$$

$$u_{xy} = \frac{u_y - g(x)}{x} + \frac{u_x - f(y)}{y}$$

نضرب المعادلة اعلاه بـ xy

$$xy\, u_{xy} = y(u_y - g(x)) + x(u_x - f(y))$$

$$xy\, u_{xy} = yu_y - y\, g(x) + xu_x - xf(y)$$

$$xy\, u_{xy} = yu_y + xu_x - [y\, g(x) + xf(y)]$$

$$xy\, u_{xy} = yu_y + xu_x - u$$

الحالة الرابعة: عندما تحتوي على دالتين اختياريتين مشتركة مثل *f(x-y)* و *g(x+y)* نتبع التالي :

1) نجد $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ نسميها المعادلة (1)

2) نجد $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ نسميها المعادلة (2)

3) نعوض المعادلة (1) في (2) والعكس صحيح نحصل على الحل.

مثال 13:- جد معادلة تفاضلية جزئية من المعادلة التالية:

$$z = f(x+ay) + g(x-ay)$$

الحل//

$$z_x = f'(x+ay) + g'(x-ay)$$

$$z_y = af'(x+ay) - ag'(x-ay)$$

$$z_{xx} = f''(x+ay) + g''(x-ay)$$

$$z_{yy} = a^2 f''(x+ay) + a^2 g''(x-ay)$$

$$z_{yy} = a^2[f''^{(x+ay)} + g''(x-ay)]$$

$$z_{yy} = a^2 z_{xx}$$

مثال 14:- جد معادلة تفاضلية جزئية من المعادلة التالية:

$$z = f(x-ct) + g(x-ct)$$

الحل//

$$z_x = f'(x-ct) + g'(x-ct)$$

$$z_t = -cf'(x-ct) - cg'(x-ct)$$

$$z_{xx} = f''(x - ct) + g''(x - ct)$$

$$z_{tt} = c^2 f''(x - ct) + c^2 g''(x - ct)$$

$$z_{tt} = c^2[f''(x - ct) + g''(x - ct)]$$

$$z_{tt} = c^2 z_{xx}$$

$$z_{tt} = c^2 r$$

مثال *15*:- جد معادلة تفاضلية جزئية من المعادلة التالية:

$$z = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

الحل//

$$z_x = f'\left(\frac{y}{x}\right).\left(-\frac{y}{x^2}\right) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$z_y = f'\left(\frac{y}{x}\right).\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(2)$$

$$\frac{z_x}{z_y} = \frac{-\frac{y}{x^2}\ f'\left(\frac{y}{x}\right)}{\frac{1}{x} f'\left(\frac{y}{x}\right)}$$

$$\frac{p}{q} = -\ \frac{y}{x}$$

$$px + qy = 0$$

مثال 16:- جد معادلة تفاضلية جزئية من المعادلة التالية:

$$z = yf(x) + xg(y)$$

الحل//

$$z_x = yf'(x) + g(y)$$

$$f'(x) = \frac{z_x - g(y)}{y} \qquad \dots\dots\dots\dots\dots(1)$$

$$z_y = f(x) + xg'(y)$$

$$g'(y) = \frac{z_y - f(x)}{x} \qquad \dots\dots\dots\dots\dots(2)$$

$$z_{xy} = f'(x) + g'(y)$$

$$z_{xy} = \frac{z_x - g(y)}{y} + \frac{z_y - f(x)}{x}$$

$$xy\, z_{xy} = x[z_x - g(y)] + y[z_y - f(x)]$$

$$xy\, z_{xy} = xz_x - xg(y) + yz_y - yf(x)]$$

$$xy\, z_{xy} = xz_x + yz_y - [xg(y) + yf(x)]$$

$$xy\, z_{xy} - z = xz_x + yz_y$$

مثال 17:- جد المعادلة التفاضلية الجزئية من العلاقة الدالية :

$$z = x^2 + 2f(\frac{1}{y} + lnx)$$

الحل//

مثال 18:- اثبت ان $z = y^2 f(x) - 3x + 4y$ هي حل للمعادلة التفاضلية الجزئية

$$yz_y - 2z = 6x - 4y$$

الحل //

$$z = y^2 f(x) - 3x + 4y \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

نشتق المعادلة (1) بالنسبة لـ y

$$z_y = 2yf(x) + 4$$

نعوض بالمعادلة $yz_y - 2z = 6x - 4y$

$$y[2yf(x) + 4] - 2[y^2 f(x) - 3x + 4y] = 6x - 4y$$

$$2y^2 f(x) + 4y - 2y^2 f(x) + 6x - 8y = 6x - 4y$$

$$6x - 4y = 6x - 4y$$

هذا يعتبر حل تام للمعادلة التفاضلية الجزئية.

مثال 19 :- اثبت ان $u = e^x cosy$ هي حل للمعادلة التفاضلية

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots(1)$$

الحل// نشتق u بالنسبة لـ x مرتين

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x cosy$$

$$u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^x cosy$$

نشتق بالنسبة لـ y مرتين

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^{x} siny$$

$$u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^{x} cosy$$

نعوض في المعادلة (1)

$$e^{x} cosy - e^{x} cosy = 0$$

0=0

مثال 20:- هل ان $z = e^{-t} sinx$ هو حل للمعادلة التفاضلية

$$z_t = z_{xx}$$

الحل// $z = e^{-t} sinx$ ……………….*(1)*

$z_t = z_{xx}$ ……….*(2)*

نشتق معادلة (1) مرة بالنسبة لـ t ومرتين بالنسبة لـx

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -e^{-t} sinx$$

$$u_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -e^{-t} sinx$$

نعوض بالمعادلة رقم (2)

$$-e^{-t} sinx = -e^{-t} sinx$$

مثال 21:- بين ان $u = e^{x+2t}$ هو حل للمعادلة التفاضلية الجزئية

$$4u_{xx} - u_{tt} = 0$$

الحل// $u = e^{x+2t}$ ....(1)

$$4u_{xx} - u_{tt} = 0 \qquad \text{.............(2)}$$

نشتق المعادلة رقم (1) بالنسبة لـ x مرتين وبالنسبة لـ t مرتين

$$u_x = e^{x+2t}$$

$$u_{xx} = e^{x+2t}$$

$$u_t = 2e^{x+2t}$$

$$u_{tt} = 4e^{x+2t}$$

$$4e^{x+2t} - 4e^{x+2t} = 0$$

$$0 = 0$$

مثال 22:- بين ان $z = k\, cos3t\, sin3x$ هو حل للمعادلة التفاضلية الجزئية

$$z_{tt} - z_{xx} = 0$$

الحل//

$$z = k\, cos3t\, sin3x \qquad \text{.............(1)}$$

$$z_{tt} - z_{xx} = 0 \qquad \text{..........(2)}$$

نشتق المعادلة رقم (1) بالنسبة لـ x مرتين وبالنسبة لـ t مرتين

$$z_t = -3k\, sin3t\, sin3x$$

$$z_{tt} = -9k\, cos3t\, sin3x$$

$$z_x = 3k\, cos3t\, cos3x$$

$$z_{xx} = -9k\, cos3t\, sin3x$$

$$-9k\, cos3t\, sin3x + 9k\, cos3t\, sin3x = 0$$

$$0 = 0$$

مثال 23:- اثبت ان $z = \frac{x^3}{3}y + \frac{y^3}{3}x + f(x) + 3x$ هي حل للمعادلة التفاضلية $z_{xy} = x^2 + y^2$

الحل//

$$z = \frac{x^3}{3}y + \frac{y^3}{3}x + f(x) + 3x \qquad ....(1)$$

$$z_{xy} = x^2 + y^2 \qquad ....(2)$$

نشتق معادلة (1) مرتين بالنسبة لـ xy

$$z_x = x^2y + \frac{y^3}{3} + f'(x) + 3$$

$$z_{xy} = x^2 + y^2$$

$$x^2 + y^2 = x^2 + y^2$$

مثال 24:- هل ان $u = (y^2 - x^2)^2$ هو حل للمعادلة التفاضلية $yu_x + xu_y = 1$

الحل//

$$u = (y^2 - x^2)^2 \qquad ....(1)$$

$$yu_x + xu_y = 1 \qquad ....(2)$$

نشتق معادلة 1 بالنسبة لـx وبالنسبة لـy

$$u_x = -4x(y^2 - x^2)$$

$$u_y = 4y(y^2 - x^2)$$

نعوض في معادلة 2

$$-4xy(y^2 - x^2) + 4xy(y^2 - x^2) = 1$$

$$0 \neq 1$$

مثال 25:- بين ان $z = ax + \frac{y}{a}$ هو حل للمعادلة التفاضلية الجزئية $xp^2 - zp + y = 0$ حيث ان $a \in R$

الحل//

$$z = ax + \frac{y}{a} \qquad ....(1)$$

$$xp^2 - zp + y = 0$$

$$x(\frac{\partial z}{\partial x})^2 - z\frac{\partial z}{\partial x} + y = 0 \qquad ... ... (2)$$

نشتق معادلة (1) بالنسبة لـ x

$$z_x = a$$

نعوض في معادلة (2)

$$xa^2 - (ax + \frac{y}{a})a + y = 0$$

$$xa^2 - a^2x - y + y = 0$$

$$0 = 0$$

مثال 26:- هل أن $z = ay + bx^2 - ab$ هو حل للمعادلة التفاضلية الجزئية

$$2zx - px^2 - 2qxy + pq = 0$$

الحل//

$$z = ay + bx^2 - ab \qquad \ldots\ldots(1)$$

$$2zx - px^2 - 2qxy + pq = 0$$

$$2zx - \frac{\partial z}{\partial x}x^2 - 2\frac{\partial z}{\partial y}xy + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \qquad \ldots\ldots(2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2bx \qquad \ldots\ldots\ldots(3)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = a \qquad \ldots\ldots\ldots(4)$$

نعوض معادلة (3) و(4) و(1) في (2)

$$2x(ay + bx^2 - ab) - (2bx)x^2 - 2axy + (2bx)a = 0$$

$$2xay + 2bx^3 - 2xab - 2bx^3 - 2axy + 2xab = 0$$

$$0 = 0$$

----

* المعادلات التفاضلية الجزئية من الرتبة الاولى ودرجات عليا

بعض طرق لحل هذا النوع من المعادلات :

١- حل المعادلات التفاضلية الجزئية بطريقة لاكرانج Lagrange's method

في هذه الطريقة يعطى في السؤال معادلة التفاضلية الجزئية ومن خلالها نوجد الحل العام ، والحل العام يحتوي على الدالة الاختيارية دائماً.

معادلة لاكرانج هي طريقة تحويل المعادلة التفاضلية الجزئية الى اعتيادية لايجاد الحل العام.

يتم ايجاد الحل باستخدام طريقة لاكرانج اذا كانت المعادلة التفاضلية الجزئية من الرتبة الاولى تحتوي على متغير المعتمد z ومتغيرين مستقلين x, y وكما في الصيغة العامة ادناه :-

$$h(x,y,z)\, z_x + k(x,y,z)\, z_y = R(x,y,z)$$

$$hp + kq = R$$

حيث ان h, k, R هي دوال لـ (x,y,z)

وقد وجد لاكرانج الحل العام باستخدام الحل العام باستخدام مجموعة من المعادلات وكالاتي :

$$\frac{dx}{h} = \frac{dy}{k} = \frac{dz}{R}$$

وان هذه المجموعة من المعادلات تمثل ثلاث معادلات تفاضلية اعتيادية اختيارية من الرتبة الاولى اثنتان منها فقط تكون مستقلة ، ومن كل معادلة نحصل على ثابت ليكون a, b

مبرهنة: اذا كان

$$u(x,y,z)=a \quad , \quad v(x,y,z)=b$$

حلين مستقلين للمعادلات التفاضلية الاعتيادية

$$\frac{dx}{h}=\frac{dy}{K}=\frac{dz}{R}$$

فأن

$$u=\psi(v) \quad \text{or} \quad \psi(u,v)=0$$

وهذا حل عام لمعادلة لاكرانج .

ملاحظة:- يجب ان يكون

✓ عدد الثوابت = عدد المتغيرات المستقلة + ١

✓ على الاقل يوجد حل واحد يحتوي على المتغير المعتمد .

مثال 27 :- اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية $xz_x+yz_y=z$

الحل //

* نجد قيمة h,K,R من المعادلة المعطاة بالسؤال وبالاعتماد على الصيغة العامة

$$h=x \quad , \quad K=y \quad , \quad R=z$$

بعدها نكتب القانون العام

$$\frac{dx}{h}=\frac{dy}{K}=\frac{dz}{R}$$

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{R}$$

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y} \quad \text{---} \quad (1)$$

$$\frac{dy}{y}=\frac{dz}{R} \quad \text{----} \quad (2)$$

معادلة (1) و(2) تسمى معادلتا لاكرانج ، تكامل هذه المعادلتين

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y}$$

$$\ln x = \ln y + \ln a$$

$$\ln x - \ln y = \ln a$$

$$\ln \frac{x}{y} = \ln a$$

أخذ (e) للطرفين

$$\frac{x}{y} = a = u$$

وهذا هو الحل العام للمعادلة رقم (1) ، تكامل المعادلة رقم (2)

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dz}{z}$$

$$\ln y = \ln z + \ln b$$

$$\ln y - \ln z = \ln b$$

$$\ln \frac{y}{z} = \ln b$$

$$\frac{y}{z} = b = v$$

وهذا هو الحل العام للمعادلة رقم (2)

اذا فأن الحل للمعادلة التفاضلية الجزئية من الرتبة الاولى هو

$$u = \psi(v)$$

$$\frac{x}{y} = \psi\left(\frac{y}{z}\right)$$

مثال 28 :- اوجد الحل العام للمعادلة

$$x^2 z_x + y^2 z_y = z^2$$

الحل //

$$h = x^2 \quad , \quad k = y^2 \quad , \quad R = z^2$$

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y^2} = \frac{dz}{z^2}$$

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y^2} \quad \cdots (1)$$

$$\frac{dy}{y^2} = \frac{dz}{z^2} \quad \cdots (2)$$

تكامل المعادلتين

المعادلة رقم (1)

$$\int x^{-2} dx = \int y^{-2} dy$$

$$-x^{-1} = -y^{-1} + a \Rightarrow \boxed{a = -x^{-1} + y^{-1}} \equiv u$$

المعادلة رقم (2)

$$\int y^{-2} dy = \int z^{-2} dz$$

$$-y^{-1} = -z^{-1} + b \Rightarrow \boxed{b = -y^{-1} + z^{-1}} \equiv v$$

∴ الحل العام هو

$$u = \psi(v)$$

$$-x^{-1} + y^{-1} = \psi(-y^{-1} + z^{-1})$$

or

$$\psi(u, v) = 0$$

$$\psi(-x^{-1} + y^{-1}, -y^{-1} + z^{-1}) = 0$$

مثال 29 :- اوجد الحل العام للمعادلة

$$2\frac{\partial z}{\partial x} - 3\frac{\partial z}{\partial y} = 2x$$

الحل //

$h=2\ ,\quad K=-3\ ,\quad R=2X$

$$\frac{dx}{2} = \frac{dy}{-3} = \frac{dz}{2X}$$

نأخذ الكسرين الاول والثاني

$$\frac{dx}{2} = \frac{dy}{-3} \quad \ldots (1)$$

نكامل الطرفين

$$\int\frac{dx}{2} = \int\frac{dy}{-3}$$

$$\frac{1}{2}X = -\frac{1}{3}y + a$$

$$u = \boxed{a = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}y}$$

ونأخذ الكسرين الاول والثالث

$$\frac{dx}{2} = \frac{dz}{2X}$$

وبالتكامل

$$\int\frac{dx}{2} = \int\frac{dz}{2X} \Big]^{*2x} \Rightarrow \int x\,dx = \int dz$$

$$\frac{X^2}{2} = dz + b$$

$$\boxed{\frac{X^2}{2} - z = b} = v$$

نعوض في معادلة الحل العام

$$\psi(a,b) \Rightarrow \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}y\ ,\ \frac{X^2}{2} - z\right) = 0$$

$$\text{or}\quad \frac{1}{2} + \frac{1}{3}y = \psi\left(\frac{X^2}{2} - z\right)$$

مثال 30 ج-1 اوجد الحل العام للمعادلة

$$yzp + xzq = -2xy$$

الحل //

$$h = yz \quad , \quad k = xz \quad , \quad R = -2xy$$

$$\frac{dx}{h} = \frac{dy}{k} = \frac{dz}{R}$$

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{-2xy}$$

$$\frac{dx}{y\cancel{z}} = \frac{dy}{x\cancel{z}} \quad --- (1)$$

$$\int x\,dx = \int y\,dy$$

$$\frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2} + a \Rightarrow u = \boxed{a = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}}$$

$$\frac{dx}{\cancel{x}z} = \frac{dz}{-2\cancel{x}y} \quad --- (2)$$

$$\int -2y\,dy = \int z\,dz$$

$$-y^2 = \frac{z^2}{2} + b$$

$$v = \boxed{b = -y^2 - \frac{z^2}{2}}$$

∴ الحل العام هو

$$u(\psi)v$$

$$\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = \psi\left(-y^2 - \frac{z^2}{2}\right)$$

or

$$\psi(u, v) = 0$$

$$\psi\left(\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} \,,\; -y^2 - \frac{z^2}{2}\right) = 0$$

مثال 31 :- أوجد الحل العام للمعادلات الآتية :

① $x z_x + y z_y = z - 1$

② $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} + t \frac{\partial z}{\partial t} = xyt$

③ $(y - z) p + (z - x) q = x - y$

④ $y^2 z p - x^2 z q = x^2 y$

⑤ $x^2 p + y^2 q = xy$

⑥ $y(zq - x) = -xzp$

مثال 32 :- اوجد الحل العام للمعادلة

$$xs - yt = 2x$$

الحل:-

ملاحظة:-

$$r = Z_{xx} = P_x$$

$$t = Z_{yy} = q_y$$

$$s = Z_{xy} = P_y = q_x \equiv \frac{\partial q}{\partial x}$$

الحل //

$$x q_x - y q_y = 2x$$

$$h = x \,, \quad K = -y \,, \quad R = 2x$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y} = \frac{dq}{2x}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y} \quad \text{----} (1)$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dq}{2x} \quad \text{----} (2)$$

نجري عملية التكامل للمعادلة (1)

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{-y}$$

$$\ln x = -\ln y + \ln a$$

$$\ln x + \ln y = \ln a$$

$$\ln(xy) = \ln a$$

$$\boxed{xy = a} \equiv u$$

$$\frac{dx}{\cancel{x}} = \frac{dq}{2\cancel{x}} \quad \text{---} (2)$$

$$\int 2dx = \int dq \Rightarrow 2x = q + b$$

$v \equiv b = 2x - q$

$V = \Psi(u)$

$2x - q = \Psi(xy)$

$q = 2x - \Psi(xy)$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2x - \Psi(xy)$$

تأخذ التكامل

$$\int \frac{dz}{dy} dy = \int (2x - \Psi(xy)) dy$$

$$z = 2xy - \frac{\Psi_1(xy)}{x} + F(x)$$

مثال 33: اوجد الحل العام للمعادلة

$xr = y(s+2)$

ملاحظة مهمة: هناك طريقة اخرى لتكوين المعادلات المساعدة في طريقة لاكرانج وكالاتي

$$\frac{dx}{h} = \frac{dy}{k} = \frac{dz}{R}$$

* $\dfrac{\text{مجموع المقدمات}}{\text{مجموع التوالي}} =$ احد النسب

* $\dfrac{\text{مجموع مقدمات اي نسبتين}}{\text{مجموع توالي اي نسبتين}} =$ النسبة الثالثة

* اذا كان مجموع التوالي = صفر فأن تكامل المقدمات = صفر

مثال 34 :- أوجد الحل العام للمعادلة

$$(x^2+xy)p - (xy+y^2)q = (x-y)z$$

الحل //

$$\frac{dx}{h} = \frac{dy}{k} = \frac{dz}{R}$$

$$\frac{dx}{(x^2+xy)} = \frac{dy}{-(xy+y^2)} = \frac{dz}{(x-y)z}$$

$$\frac{dx}{x(x+y)} = \frac{dy}{-y(x+y)} = \frac{dz}{(x-y)z}$$

$$\frac{dx}{x\cancel{(x+y)}} = \frac{dy}{-y\cancel{(x+y)}} \quad \text{....(1)}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{-y}$$

$$\ln x = -\ln y + \ln a$$

$$\ln xy = \ln a$$

بأخذ e للطرفين

$$u \equiv \boxed{a = xy}$$

$$\frac{dx+dy}{x^2\cancel{+xy}\cancel{-xy}-y^2} = \frac{dz}{(x-y)z} \qquad \cdots (2)$$

نفرق بين مربعين

$$\frac{dx+dy}{x^2-y^2} = \frac{dz}{(x-y)z}$$

$$\frac{dx+dy}{\cancel{(x-y)}(x+y)} = \frac{dz}{\cancel{(x-y)}z}$$

$$\frac{dx+dy}{x+y} = \frac{dz}{z}$$

$$\int \frac{dx+dy}{x+y} = \int \frac{dz}{z}$$

$$\ln(x+y) = \ln z + \ln b$$

$$v = \boxed{b = \frac{x+y}{z}}$$

$$\psi(u, v) = 0$$

$$\psi\left(xy, \frac{x+y}{z}\right) = 0$$

مثال 35: اوجد الحل العام للمعادلة

$$(y+z)p+(x+z)q=x+y$$

$$\frac{dx}{y+z}=\frac{dy}{x+z}=\frac{dz}{x+y}$$

$$\frac{dx+dy+dz}{y+z+x+z+x+y}=\frac{dx-dy}{y+\cancel{z}-x-\cancel{z}}=\frac{dy-dz}{\cancel{x}+z-\cancel{x}-y}$$

$$\frac{dx+dy+dz}{2(x+y+z)}=\frac{dx-dy}{y-x}=\frac{dy-dz}{z-y}$$

$$\frac{dx+dy+dz}{2(x+y+z)}=\frac{dx-dy}{-(x-y)} \quad ---(1)$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{dx+dy+dz}{x+y+z}=-\int\frac{dx-dy}{x-y}$$

$$\frac{1}{2}\ln(x+y+z)=-\ln(x-y)+\ln a$$

$$\ln(x+y+z)+2\ln(x-y)=2\ln a \Rightarrow \ln(x+y+z)+\ln(x-y)^2=\ln a^2$$

$$\ln(x+y+z)(x-y)^2=\ln a^2$$

$$\boxed{a_1=a^2=(x+y+z)(x-y)^2}$$

ثابت

$$\frac{dx-dy}{\cancel{-}(x-y)}=\frac{dy-dz}{\cancel{-}(y-z)} \quad ----(2)$$

$$\int\frac{dx-dy}{x-y}=\frac{dy-dz}{y-z}\Rightarrow \ln(x-y)=\ln(y-z)+\ln b$$

$$\ln\frac{x-y}{y-z}=\ln b \Rightarrow \boxed{b=\frac{x-y}{y-z}}$$

$$u=\psi(v)\Rightarrow (x+y+z)(x-y)^2=\psi\left(\frac{x-y}{y-z}\right)$$

مثال 36: اوجد الحل العام للمعادلة

$$(y-z)p+(x-y)q=z-x$$

$$\frac{dx}{y-z}=\frac{dy}{x-y}=\frac{dz}{z-x}$$

$$\frac{dx+dy+dz}{y-z+x-y+z-x=0} \quad \cdots\cdots (1)$$

$$\int dx+dy+dz=0$$

$$\boxed{x+y+z=a}$$

نضرب النسبة الثانية بـ $\frac{z}{z}$ والنسبة الثالثة بـ $\frac{y}{y}$

$$\frac{dx}{y-z}=\frac{z\,dy}{z(x-y)}=\frac{y\,dz}{y(z-x)}$$

$$\frac{z\,dy+y\,dz}{z(x-y)+y(z-x)}=\frac{dx}{y-z}$$

$$\frac{z\,dy+y\,dz}{zx-\cancel{zy}+\cancel{yz}-yx}=\frac{dx}{y-z}$$

$$\frac{z\,dy+y\,dz}{zx-yx}=\frac{dx}{y-z}$$

$$\frac{z\,dy+y\,dz}{-x\,\cancel{(y-z)}}=\frac{dx}{\cancel{y-z}}$$

$$\int z\,dy+y\,dz=-\int x\,dx$$

$$zy=-\frac{x^2}{2}+b$$

$$b=zy+\frac{x^2}{2}$$

$$u=\Psi(v)$$

$$x+y+z=\Psi\left(zy+\frac{x^2}{2}\right)$$

* طرق حل المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية من الرتبة الاولى

2 - طريقة حل المعادلة التفاضلية بالشكل $f(p, q) = 0$

لحل معادلة بالصيغة $f(p,q)=0$ نفرض أن الحل التام للمعادلة الاصلية هو

$$z = ax + by + c$$

حيث أن :-

$$a = p = \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$b = q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$c = \text{ثابت اختياري}$$

مثال 37 :- حل المعادلة الاتية :- $p^2 + p = q^2$

نرتب المعادلة

$$f(p,q) = p^2 + p - q^2 = 0$$

نضع a بدل p

و b بدل q

$$a^2 + a - b^2 = 0$$

$$b^2 = a^2 + a \Rightarrow b = \mp\sqrt{a^2 + a}$$

نعوض بالحل العام

$$z = ax + by + c$$

$$z = ax \mp \sqrt{a^2 + a}\, y + c$$

مثال 38: حل المعادلة

$$\frac{\partial z}{\partial x} - 3\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^3$$

$$p - 3q = q^3 \Rightarrow p - 3q - q^3 = 0$$

$$f(p,q) = 0 \Rightarrow a - 3b - b^3 = 0 \Rightarrow a = 3b + b^3$$

$z = ax + by + c \leftarrow$ الحل التام

$$z = (3b + b^3)x + by + c$$

3- طريقة حل معادلة تفاضلية جزئية بالصيغة

$$z = px + qy + f(p,q)$$

يكون حل هذه المعادلة بوضع

a بدلاً من p

b بدلاً من q

في المعادلة الاصلية للحصول على الحل التام والذي سيكون

$$z = ax + by + f(a,b)$$

مثال 39: حل المعادلة

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot y = z - 5\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$$

نكتب المعادلة بدلالة p و q

$$xp + qy = z - 5pq$$

ترتيب المعادلة

$$z = xp + qy + 5p - pq$$

$$z = ax + by + \underbrace{5a - ab}_{f(a,b)}$$

مثال ٤/: حل المعادلة

$$px + qy = z - p^3 - q^3$$

$$z = px + qy + p^3 + q^3$$

$$z = ax + by + \underbrace{a^3 + b^3}_{f(a,b)}$$

هو الحل التام.

لإيجاد الحل المنفرد نفرض

$$F = z - ax - by - a^3 - b^3$$

نشتق بالنسبة لـ a, b

$$F_a = -x - 3a^2 = 0 \Rightarrow a^2 = \frac{-x}{3} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{-x}{3}}$$

$$F_b = -y - 3b^2 = 0 \Rrightarrow b^2 = \frac{-y}{3} \Rightarrow b = \sqrt{\frac{-y}{3}}$$

نعوض قيم a و b في الحل التام

الحل المنفرد هو $\Rightarrow$:

$$z = \sqrt{\frac{-x}{3}}\, x + \sqrt{\frac{-y}{3}}\, y + \left(\frac{-x}{3}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{-y}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$$

4- اذا كانت المعادلة بالصيغة

$$F(z, p, q) = 0$$

لايجاد الحل التام لهذه الصيغة

① نفرض

$$p = \frac{dz}{du}$$

$$q = a\frac{dz}{du}$$

$$u = x + ay$$

② عند تعويض p و q بالمعادلة بالصيغة $F(z,p,q)=0$ سوف تتحول الى الصيغة

$$F\left(z, \frac{dz}{du}, a\frac{dz}{du}\right)$$

تصبح معادلة تفاضلية اعتيادية فصل متغيرات

③ الحل العام للمعادلة التفاضلية الاعتيادية هو الحل التام للمعادلة التفاضلية الجزئية بعد تعويض قيمة $u = x + ay$

ex: 1

$$z^2(p^2 + q^2 + 1) = 1$$

درجة ثانية جهلة
ممكن حلها بطريقة جاربت

نفرض

$$p = \frac{dz}{du}$$

$$q = a\frac{dz}{du}$$

$$u = x + ay$$

$$z^2\left[\left(\frac{dz}{du}\right)^2 + a^2\left(\frac{dz}{du}\right)^2 + 1\right] = 1$$

$$z^2\left[\left(\frac{dz}{du}\right)^2(1 + a^2) + 1\right] = 1$$

نقسم على z^2

$$\left(\frac{dz}{du}\right)^2(1 + a^2) = \frac{1}{z^2} - 1$$

نوحد مقامات ونقسم

$$\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = \frac{1 - z^2}{z^2(1 + a^2)}$$

بالجذر

$$\frac{dz}{du} = \sqrt{\frac{1 - z^2}{z^2(1 + a^2)}}$$

$$\frac{dz}{du} = \frac{\sqrt{1-z^2}}{z\sqrt{1+a^2}} \Big] *$$ نفصل متغيرات

$$\int \frac{z\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{1-z^2}}\, dz = \int du$$

ثابتة

$$\sqrt{1+a^2}\,\tfrac{-1}{2}\int -2z\,(1-z^2)^{-\frac{1}{2}}\, dz = \int du$$

$$-\frac{\sqrt{1+a^2}}{\cancel{2}}\;\frac{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{\cancel{2}}} = u + \underbrace{b}_{\text{ثابت تكامل}}$$

$$-\sqrt{1+a^2}\,\sqrt{1-z^2} = \underbrace{(x+ay)+b}_{\text{الحل التام}} \Big]$$ نربع الطرفين

لإيجاد الحل المنفرد

① يجب ان نتخلص من الجذور

$$(1+a^2)(1-z^2) = (x+ay+b)^2$$

② نشتق بالنسبة لـ a مرة وبالنسبة لـ b مرة

$$\underbrace{(1-z^2)}_{\text{يعتبر ثابت}} + a^2(1-z^2) = (x+ay+b)^2$$

$$\frac{\partial F}{\partial a} \Rightarrow 2a(1-z^2) = 2y(x+ay+b) \quad \cdots ①$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} \Rightarrow 0 = 2(x+ay+b) \quad \cdots ②$$

③ نعوض ② في ①

$$2a(1-z^2) = 0 \quad \Big] \div 2a$$

الحل المنفرد في هذه الحالة هو z

$$1-z^2 = 0 \Rightarrow z^2 = 1 \Rightarrow z = \sqrt{1}$$

$= \mp 1$

نأخذ مطلق

$$\therefore z = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$$

الحل المنفرد

ex: (2) $z = p^2 + q^2$

لتكن $p = \frac{dz}{du}$, $q = a\frac{dz}{du}$, $u = x + ay$

$$z = \left(\frac{dz}{du}\right)^2 + a^2\left(\frac{dz}{du}\right)^2$$

$$z = \left(\frac{dz}{du}\right)^2 (1 + a^2)$$ فصل متغيرات

$$\frac{z}{1+a^2} = \left(\frac{dz}{du}\right)^2$$ بالجذر

$$\frac{dz}{du} = \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{1+a^2}}$$ فصل متغيرات

$$\frac{\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{z}}\,dz = du \Rightarrow \sqrt{1+a^2}\int z^{-\frac{1}{2}}\,dz = \int du$$

نتكامل

$\frac{1}{2}$ تحله تصير 2

$$2\sqrt{1+a^2}\,\sqrt{z} = u + b$$ ⟸ الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية

$$2\sqrt{1+a^2}\,\sqrt{z} = x + ay + b$$ ⟸ الحل التام للمعادلة التفاضلية الجزئية

لايجاد الحل المنفرد نتخلص من الجذر

$$4(1+a^2)(z) = (x+ay+b)^2$$

$$4z + 4za^2 = (x+ay+b)^2$$

نشتق بالنسبة لـ a

$$8za = 2y(x+ay+b)^2 \quad \text{---} (1)$$

نشتق بالنسبة لـ b

$$0 = 2(x+ay+b)^2 \quad \text{....} (2)$$

نعوض (2) في (1)

$$8za = 0$$

$$\therefore z = \frac{0}{8a} \Rightarrow \boxed{z = 0}$$

الحل المنفرد

5- اذا كانت المعادلة التفاضلية بصياغة

$$F(x,y,p,q,z)=0$$

قابلة للفصل الى الشكل الاتي

$$F_1(x,p)=F_2(y,q)$$

* ملاحظة: هنا تكون خالية من z ويمكن ان تكون (خطية او غير خطية)

لايجاد حل هذه المعادلة

① نفرض $F_1(x,p)=a$

و

$F_2(y,q)=a$

② ومنه ثم نجد قيمة q و p ونعيدها

③ نعوض بالقانون $\Leftarrow$ $dz=p\,dx+q\,dy$

ex:
$$p^2y(1+x^2)=q\,x^2$$

sol:
$$\frac{p^2(1+x^2)}{x^2}=\frac{q}{y}$$

$$\therefore \frac{q}{y}=a \Rightarrow \boxed{q=ay} \quad \text{و} \ldots ①$$

$$\frac{p^2(1+x^2)}{x^2}=a \Rightarrow p^2=\frac{a x^2}{(1+x^2)} \Rightarrow p=\mp\frac{x\sqrt{a}}{\sqrt{1+x^2}} \ldots ②$$

$$dz=p\,dx+q\,dy \Rightarrow \int dz=\mp\int\frac{x\sqrt{a}}{\sqrt{1+x^2}}dx+\int ay\,dy$$

$$\int dz=\mp\sqrt{a}\,\frac{1}{2}\int 2x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}dx+a\int y\,dy$$

$$z=\mp\frac{\sqrt{a}}{\cancel{2}}\,\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{\cancel{2}}}+a\frac{y^2}{2}+b$$

$$\therefore z=\mp\sqrt{a}\,\sqrt{1+x^2}+a\frac{y^2}{2}+b$$

ex:- $x = \sqrt{p} - \sqrt{q}$

sol:

$$\sqrt{q} = \sqrt{p} - x$$

$$\sqrt{q} = a \Rightarrow \boxed{q = a^2} \quad \ldots (1)$$

$$\sqrt{p} - x = a \Rightarrow \sqrt{p} = a + x$$

$$\therefore p = (a+x)^2 \quad \ldots (2)$$

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

$$dz = (a+x)^2\,dx + a^2\,dy$$

$$\int dz = \int (a+x)^2\,dx + a^2 \int dy$$

$$z = \frac{(a+x)^3}{3} + a^2 y + b$$

H.W.

(1) $\sqrt{p} - 3x - \sqrt{q} = 0$

(2) $yp - x^2 q^2 = x^2 y$