الفصل الخامس

التفاضل والتكامل العددي

NUMERICAL DIFFERENTIATION AND INTEGRATION

5.1 التفاضل العددي Numerical Differentiation :

يتم اللجوء إلى التفاضل العددي عندما يراد إيجاد المشتقة لدوال معقدة والتي يصعب إيجاد قيمة مشتقتها بشكل يسير وكذلك الحال بالنسبة للدوال المعرفة فقط في بيانات مجدولة أو نتائج مختبرية.

إذن التفاضل العددي هو عملية حساب المشتقة للدالة عن طريق القيم المعطاة لتلك الدالة، ويمكن إنجاز ذلك بتمثيل الدالة بإحدى صيغ الاستكمال (التي تم تناولها في الفصل السابق) ومن ثم تفاضل هذه الصيغة بقدر عدد المرات المطلوبة.

إذا كانت قيم الدالة معطاة في نقاط ذات مسافات متساوية عن بعضها فتمثل الدالة بصيغة نيوتن الاستكمالية أما إذا كانت القيم معطاة في نقاط ذات مسافات غير متساوية عن بعضها فيتم تمثيل الدالة بصيغة لاكرانج الاستكمالية .

أولاً- التفاضل العددي باستخدام صيغة نيوتن الأمامية :

صيغة نيوتن الأمامية العامة :

$$y = y_0 + u \cdot \Delta y_0 + \frac{u(u-1)}{2!} \cdot \Delta^2 y_0 + \frac{u(u-1)(u-2)}{3!} \cdot \Delta^3 y_0 + \cdots \quad (1)$$

حيث أن :

$$u = \frac{x - x_0}{h} \quad \cdots\cdots \quad (2)$$

فيكون التفاضل نسبة إلى (x) هكذا :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \quad \cdots\cdots (3)$$

فسيكون لدينا من المعادلة (1) :

$$\frac{dy}{du}=0+1\cdot\Delta y_0+\frac{\Delta^2 y_0}{2}(2u-1)+$$
$$\frac{\Delta^3 y_0}{6}(3u^2-6u+2)+ \quad \cdots\cdots(4)$$

ومن المعادلة (2) :

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{h} \quad \cdots\cdots (5)$$

إذن تصبح المعادلة (3) :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{h}[\Delta y_0+\frac{\Delta^2 y_0}{2}(2u-1)+$$
$$\frac{\Delta^3 y_0}{6}(3u^2-6u+2)+\cdots\cdots] \quad \cdots\cdots(6)$$

بتفاضل المعادلة (6) مرة أخرى نحصل على :

$$\frac{d^2y}{d^2x}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{du}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{du}{dx}$$
$$=\frac{1}{h}\cdot\frac{d}{du}\left\{\frac{1}{h}\left[\Delta y_0+\frac{\Delta^2 y_0}{2}(2u-1)+\frac{\Delta^3 y_0}{6}(3u^2-6u+2)+\cdots\right]\right\}$$
$$=\frac{1}{h^2}\left[0+\Delta^2 y_0+(u-1)\cdot\Delta^3 y_0+\cdots\right]$$
$$=\frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0+(u-1)\cdot\Delta^3 y_0+\cdots\right] \quad \cdots\cdots(7)$$

وبنفس الطريقة يمكن الحصول على المشتقات ذات الرتب العليا. يمكن ملاحظة أن كـــلاً من المشتقتين $y'(x_0)$ و $y''(x_0)$ (عند $u=0,\ x=x_0$) تعرف كما يلي :

$$y'(x_0)=\frac{1}{h}\left[\Delta y_0-\frac{\Delta^2 y_0}{2}+\frac{\Delta^3 y_0}{3}-\frac{\Delta^4 y_0}{4}+\ \cdots\right] \quad \cdots\cdots (8)$$

$$y''(x_0)=\frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0-\Delta^3 y_0+\frac{11}{12}\Delta^4 y_0-\ \cdots\right] \quad \cdots\cdots (9)$$

Ex. 1 :

Given the following table :

x	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
y = f (x)	1.729	1.691	1.505	1.416	1.311

Find $y'(x_0)$, $y''(x_0)$ at $x_0 = 1.5$?

الحل :

جدول الفروقات الأمامية يكون :

x	f (x)	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$
1.0	1.729				
		- 0.038			
1.5	1.691		- 0.148		
		- 0.186		0.245	
2.0	1.505		0.097		- 0.358
		- 0.089		- 0.113	
2.5	1.416		- 0.016		
		- 0.105			
3.0	1.311				

نـــــأخذ الفروقـــــات ($x_0=1.5$) و ($y_0=1.691$) والمتمثلـــــة بـ [$\Delta^3 y_0=-0.113$, $\Delta^2 y_0=0.097$, $\Delta y_0=-0.186$] وحيث أن ($h = 0.5$).

$$y'(1.5) = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_0}{2} + \frac{\Delta^3 y_0}{3} - \frac{\Delta^4 y_0}{4} + \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{0.5}\left[(-0.186) - \left(\frac{0.097}{2}\right) + \frac{1}{3}(-0.1113)\right] = -0.544333$$

$$y''(1.5) = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 y_0 + \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{(0.5)^2}\left[0.097 - (-0.1131)\right] = 0.84$$

ثانياً - التفاضل العددي باستخدام صيغة نيوتن الخلفية :

صيغة نيوتن الخلفية العامة :

$$y = y_{n+1} + u\nabla y_{n+1} + \frac{u(u+1)}{2!}\cdot\nabla^2 y_{n+1} +$$

$$\frac{u(u+1)(u+2)}{3!}\cdot\nabla^3 y_{n+1} + \cdots\cdots(1)$$

وبالتفاضل نسبة الى (u) أولا نحصل على :

$$\frac{dy}{du} = 0 + \nabla y_{n+1} + \frac{2u+1}{2}\cdot\nabla^2 y_{n+1} + \frac{3u^2+6u+2}{6}\cdot\nabla^3 y_{n+1} +$$

$$\frac{2u^3+9u^2+11u+3}{12}\cdot\nabla^4 y_{n+1} + \cdots\cdots(2)$$

وإن : $\frac{du}{dx} = \frac{1}{h}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$= \frac{1}{h}[\nabla y_{n+1} + \frac{2u^2+1}{2}\nabla^2 y_{n+1} +$$

$$\frac{3u^u+6u+2}{6}\nabla^3 y_{n-1} + \cdots\cdots] \quad \cdots\cdots(3)$$

وبتفاضل المعادلة (3) مرة أخرى نحصل على :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \nabla^2 y_{n+1} + (u+1)\cdot\nabla^3 y_{n+1} +$$

$$\frac{6u^3+18u+11}{12}\cdot\nabla^4 y_{n+1} + \cdots\cdots$$

وعند النقطة (x_0) فأنه يكون لدينا $(u = 0)$، فعندئذ تصبح المعادلة (2) ,(3) كما يلي :

$$y'(x_o) = \frac{1}{h}[\nabla y_{n+1} + \frac{1}{2}\nabla^2 y_{n+1} + \frac{1}{3}\nabla^3 y_{n+1} +$$

$$\frac{1}{4}\nabla^4 y_{n+1} + \cdots\cdots] \cdots\cdots(4)$$

$$y''(x_o) = \frac{1}{h^2}[\nabla^2 y_{n+1} + \frac{1}{2}\nabla^3 y_{n+1} +$$

$$\frac{11}{12}\nabla^4 y_{n+1} + \cdots\cdots] \cdots\cdots(5)$$

Ex. 2 :

A rod is rotating in a plane about one of its ends If the following table gives the angle (θ) radians through which the rod has turned for different values of time t seconds, find its angular velocity and angular acceleration when ($t=0.7$) seconds.

t seconds	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
θ radians	0.0	0.12	0.48	1.1	2.0	3.2

الحل :

يكون جدول الفروقات كما في أدناه :

t	θ	$\nabla\theta$	$\nabla^2\theta$	$\nabla^3\theta$
0.0	0.0			
		0.12		
0.2	0.12		0.24	
		0.36		0.02
0.4	0.48		0.26	
		0.62		0.02
0.6	1.10		0.28	
		0.9		0.02
0.8	2.0		0.30	
		1.20		
1.0	3.20			

هنا تكون $t = 7$ ، $t_0=1.0$ ، $h = 0.2$

$$u = \frac{t - t_0}{h} = \frac{0.7 - 1.0}{0.2} = -1.5$$

باستخدام صيغة نيوتن الخلفية الإستكمالية يكون لدينا :

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{t=0.7} = \frac{1}{h}[\nabla\theta_0 + \frac{2u+1}{2}\nabla^2\theta_0 + \frac{3u^2+6u+2}{6}\nabla^3\theta_0]$$

$$= \frac{1}{0.2}[1.20 + (-0.30) + \frac{3(2.25) - 9.00 + 2}{6}(0.02)]$$

$$= 5(1.20 - 0.30 - 0.0008)$$

$$= 4.496 \text{ radian/sec}$$

وكذلك يكون :

$$\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)_{t=0.7}=\frac{1}{h^2}[\nabla^2\theta_o+(u+1)\nabla^3\theta_o]=\frac{1}{(0.2)^2}[0.30+0.5\times 0.02]$$

$$=25(0.29)=7.25 \text{ radian}/\sec^2$$

ثالثاً-التفاضل العددي بطريقة سترلنك Stirling Formula :

الصيغة العددية لمعادلة سترلنك هي :

$$y=y_0+u\left(\frac{\Delta y_0+\Delta y_{-1}}{2}\right)+\frac{u^2}{2!}\Delta^2 y_{-1}+$$

$$\frac{u(u^2-1)}{3!}\left(\frac{\Delta^3 y_{-1}+\Delta^3 y_{-2}}{2}\right)+\cdots(1)$$

حيث : $u=\dfrac{x-x_0}{h}$

وبتفاضل المعادلة (1) نسبة الى (x) نحصل على :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{1}{h}$$

$$\therefore\frac{dy}{dx}=\frac{1}{h}\left[0+\left(\frac{\Delta y_0+\Delta y_{-1}}{2}\right)+\frac{2u}{2!}\Delta^2 y_{-1}+\right.$$

$$\left.\frac{3u^2-1}{3!}\left(\frac{\Delta^3 y_{-1}+\Delta^3 y_{-2}}{4}\right)\right]\quad\cdots\cdots(2)$$

وبتفاضل المعادلة (2) مرة أخرى نحصل على المشتقة الثانية :

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{du}\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{du}{dx}\right)$$

$$=\frac{1}{h^2}\left[0+\Delta^2 y_{-1}+\frac{1}{3!}\cdot 6u\cdot\left(\frac{\Delta^3 y_{-1}+\Delta^3 y_{-2}}{2}\right)+\cdots\right]\cdots(3)$$

العلاقتين (2) و (3) وعندما تكون $x=x_0$, $(u=0)$ تكون هكذا :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = y'(x_0) = \left[\frac{1}{h}\frac{\Delta y_0 + \Delta y_{-1}}{2} - \frac{1}{6}\left(\frac{\Delta^3 y_{-1} + \Delta^3 y_{-2}}{2}\right) + \cdots\right] \cdots (4)$$

$$y''(x_0) = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_{-1} - \frac{1}{12} - \Delta^4 y_{-2} + \frac{1}{90}\Delta^9 y_{-3} + \cdots\right] \cdots (5)$$

__Ex. 3:__

Using Stirling's formula for finite difference, find $y'(1.4)$ and $y''(1.4)$, given the following table :

x	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8
f (x)	2.7183	3.3201	4.0552	4.9530	6.0496

الحل :

x	**f (x)**	**Δ**	**Δ²**	**Δ³**	**Δ⁴**
1.0	2.718				
		0.6018			
1.2	3.3201				
			0.1333		
		0.7351		0.0294	
1.4	4.0522		0.1627		0.0067
		0.8978		0.0361	
1.6	4.9530				
			0.1988		
		1.0966			
1.8	5.0496				

بما أن : $x_0 = 1.4,\ y_0 = 4.0522,\ h = 0.2$

$$y'(1.4) = \frac{1}{0.2}\left[\frac{0.7351 + 0.8978}{2} - \frac{1}{6}\left(\frac{0.0294 + 0.0361}{2}\right)\right] = 4.0549$$

$$y''(1.4) = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_{-1} - \frac{1}{12}\Delta^4 y_{-2}\right]$$

$$= \frac{1}{(0.2)^2}\left[0.1627 - \frac{1}{12}(0.0067)\right] = 4.0535$$

رابعاً-التفاضل العددي باستخدام صيغة لاكرانج الاستكمالية

: Lagrang Interpolation Formula

كثيرا ما نحتاج لإيجاد المشتقة في نقاط غير متساوية المسافات بعضها عن بعض وفي هذه الحالة يتم اللجوء الى متعددة حدود لاكرانج.

على سبيل المثال متعددة حدود لاكرانج من الدرجة الثانية هي :

$$f(x)=\frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})}f(x_{i-1})+\frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})}f(x_i)+$$
$$+\frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)}f(x_{i+1}) \quad \cdots\cdots(1)$$

وبتفاضل العلاقة (1) نحصل على :

$$f'(x)=\frac{2x-x_i-x_{i+1}}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})}f(x_{i-1})+$$
$$\frac{2x-x_{i-1}-x_{i+1}}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})}f(x_i)+\frac{2x-x_{i-1}-x_i}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)}f(x_{i+1})\cdots(2)$$

على الرغم من ظهور صيغة التعقيد في العلاقة (2) إلا أنها تمتلك فوائد متعددة مهمة أولها القابلية على احتساب المشتقة في أي مكان ضمن المدى المحدد بالنقاط الثلاثة. وثانيا ليس بالضرورة أن تكون النقاط متساوية الأبعاد. وثالثا أنها تعطي دقة جيدة جدا.

Ex. 4 :

Find the first derivatives of the function tabulated below, at the point (1.5) :

x	1.2	1.5	1.7
y(x)	0.1823	0.4055	0.5306

الحل :

لكون أن المسافات غير متساوية بين نقاط الجدول لذا يجب استخدام صيغة لاكرانج الاستكمالية لإيجاد المشتقة الأولى وذلك بتطبيق المعادلة (2) :

$$f'(x)=\frac{2x-x_{i}-x_{i+1}}{(x_{i-1}-x_{i})(x_{i-1}-x_{i+1})}f(x_{i-1})+\frac{2x-x_{i-1}-x_{i+1}}{(x_{i}-x_{i-1})(x_{i}-x_{i+1})}f(x_{i})+$$

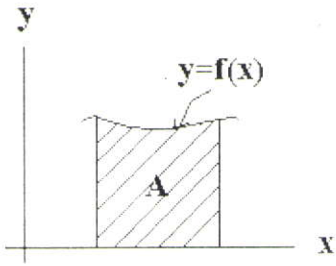
$$\frac{2x-x_{i-1}-x_{i}}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_{i})}f(x_{i+1}) \quad \cdots(2)$$

$$=\frac{2(1.5)-1.5-1.7}{(-0.3)(-0.5)}(0.1823)+\frac{2(1.5)-1.2-1.7}{(0.3)(-0.2)}(0.4055)+$$

$$\frac{2(1.5)-1.2-1.5}{(0.5)(0.2)}(0.5306)=0.6729$$

5.2 التكامل العددي Numerical Integration :

من التطبيقات الشائعة للطرق العددية هو استعمالها في حساب التكامل المحدد أو ما يعبر عن المساحة تحت المنحنيات (شكل 5.1) :



شكل (5.1)

أي أن :

$$I=\int_{a}^{b} f(x)\cdot dx$$

يتم اللجوء الى التكامل العددي عندما تكون هناك صعوبة وأحياناً إستحالة في ايجاد قيمة التكامل للدالة بالطرق التحليلية المعتادة (Analytical Methods) على سبيل المثال :

$$\int e^{-x^2}\,dx,\ \int\frac{e^{x}-e^{-x}}{x}\,dx,\ \int\sqrt{\sin x}\,dx,\ \int\frac{1}{2+\cos x}\,dx$$

أو عندما يكون التكامل معرف بمجموعة قيم بشكل جدول مثل جدول قراءات مختبرية لتجربة معينة وكما هو الحال في الجدول الآتي لبيان سرعة جسم ساقط مع الزمن.

Time الزمن	Velocity السرعة
0.1	2.443
0.2	3.446
0.3	4.004
.	.
.	.
.	.
1.0	10.230
1.2	12.006

فعند حساب المسافة المقطوعة من قبل الجسم يجب حساب تكامل السرعة مع الزمن هكذا:

$$\text{i.e } v = \frac{ds}{dt} \quad \text{or} \quad s = \int v\, dt$$

وهنا نجد أن السرعة معرفة في الجدول أعلاه.

ومن أهم طرق التكامل التي يمكن التطرق اليها هي :

أولاً- قاعدة شبه المنحرف Trapezoidal Rule :

لإيجاد القيمة التقريبية لتكامل الدالة $f(x)$ للمجال a الى b :

$$I = \int_a^b f(x) \cdot dx$$

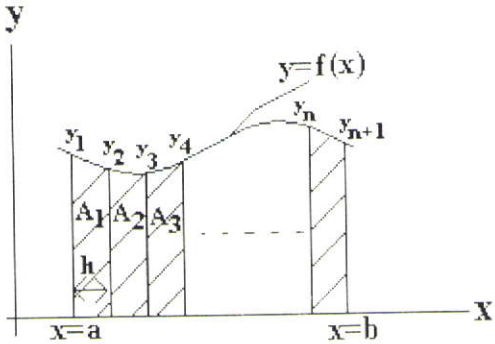
باستخدام قاعدة شبه المنحرف يمكن إتباع الخطوات الآتية :

أ - جزء الفترة بين (b,a) الى (N) من الفترات الجزئية متساوية الأطوال، طول كل منها يساوي h حيث يحسب h هكذا :

$$h = \frac{b-a}{N}$$

والشكل (5.2) يوضح كيفية هذه التجزئة، حيث ينتج منها N من الشرائح تحت المنحني $y = f(x)$. وكل شريحة منها تأخذ شكلاً قريباً من شبه المنحرف، والتي يمكن حساب مساحتها وفقاً لقاعدة شبه المنحرف :

$$A_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) \cdot h$$



شكل (5.2)

ب - لحساب المساحة الكلية التقريبية المحصورة تحت المنحني وبين $x = b, x = a$ فأننا نجد مجموع مساحات الشرائح $A_1, A_2, \ldots, A_n$ وكما يلي :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{Total Area} = A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_n$$

$$= \frac{1}{2}\cdot h\,(y_1 + y_2) + \frac{1}{2}\cdot h\,(y_2 + y_3) + \cdots + \frac{1}{2}\cdot h\,(y_n + y_{n+1})$$

$$\therefore \int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}[y_1 + 2y_2 + 3y_3 + \cdots + 2y_n + y_{n-1}]$$

إن دقة قيمة التكامل تعتمد على عدد الشرائح الناتجة عن تقسيم المساحة تحت المنحني. فكلما زاد عدد الشرائح N (أي صغرت قيمة h) ازدادت قيمة التكامل دقة. وعليه يمكن مضاعفة N بعد كل عملية تكامل في البرنامج عدة مرات حتى يصبح الفرق بين آخر جواب نحصل عليه والجواب الذي يسبقه صغيراً جداً.

__Ex. 5 :__

Evaluate $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ to five decimal places by the trapezoidal rule, where the interval (0, 1) is sub-divided into (6) equal parts :

الحل :

الصيغة العامة للتكامل بقاعدة شبه المنحرف هي :

$$\therefore \int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[y_1 + 2y_2 + 2y_3 + \cdots + 2y_n + y_{n+1}\right]$$

بما أن $N = 6$.

$$\therefore h = \frac{b-a}{N} = \frac{1-0}{6} = \frac{1}{6}$$

فنحصل على الجدول الآتي :

	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
x	0	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	1
y = f(x) = 1/(1+x²)	1	0.9729	0.90	0.8	0.6923	0.5901	0.5

$$\therefore \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1\ 6}{2}\left[1 + 2\{0.9729 + 0.9 + 0.8 + 0.6923 + 0.5901\} + 0.5\right]$$

$$= 0.7842$$

ثانياً- قاعدة سمبسون Simpson Rule :

في هذه القاعدة، نقسم الفترة (b ، a) الى عدد زوجي (N) من الفترات الجزئية المتساوية وطول كل منها يساوي (h) حيث أن : $h = \dfrac{b-a}{N}$

ووفقاً لهذه القاعدة يتم ربط ثلاثة نقاط من الدالة بمتعدد حدودية من الدرجة الثانية (قطع مكافئ Parabola)، ومجموع المساحات تحت منحني متعدد الحدودية تمثل المساحة التقريبية تحت المنحني. إن أبسط اشتقاق لقاعدة سمبسون الثلث شكل (5.3) يكون باستخدام صبغة الفروق الأمامية لنيوتن :

$$f(x) = f(x_0) + u\cdot\Delta f(x_0) + \frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 f(x_0) + \cdots$$

أو :

$$f(x) = y_0 + u\cdot\Delta y_0 + \frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \cdots (1)$$

حيث أن : $u = \dfrac{x - x_0}{h}$ ، وأن h: هو طول الخطوة وهو ثابت.

ونلاحظ من المعادلة (1) بأنها تمثل متعدد حدودي من الدرجة الثانية. وبتكامل (1) نسبة الى x (من x_0 الى x_2) نحصل على :

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_2} \{y_0 + u\cdot\Delta y_0 + \frac{u^2 - u}{2!}\cdot\Delta^2 y_0\}\,dx$$

فنحصل بعد التكامل و التبسيط على :

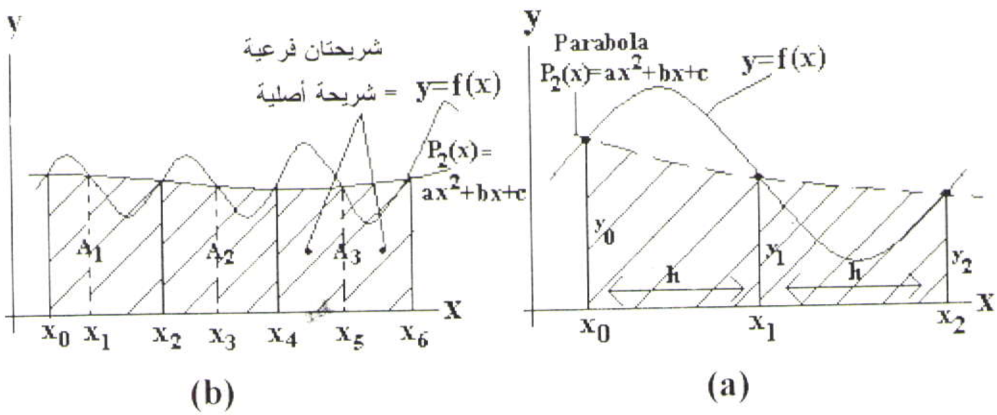
$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[y_0 + 4y_1 + y_2\right]$$

ويكرر نفس هذا التحليل لجميع الشرائح شكل (5.4) فنحصل على الصيغة العامة التالية

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right) + \frac{h}{3}\left(y_2 + 4y_3 + y_4\right) + \cdots +$$

$$\frac{h}{3}\left(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n\right)$$

$$= \frac{h}{3}\left[y_0 + 4\sum_{i=1,3,5,7,\cdots}^{n-1} y_i + 2\sum_{i=2,4,6,\cdots}^{n-2} y_i + y_n\right]$$



شكل (5.3)

Ex. 6 :

Use Simpson's $\frac{1}{3}$ rule for evaluation of $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$, considering 6 strips.

الحل :

نحصل على الفترة الجزئية (h) من :

$$h = \frac{b-a}{N} = \frac{1-0}{6} = \frac{1}{6}$$

وأن قاعدة الثلث لسمبسون تعرف كما يلي :

$$I = \frac{h}{3}\left[y_0 + 4\left(y_1 + y_3 + y_5\right) + 2\left(y_2 + y_4\right) + y_6\right]$$

∴ يمكن احتساب قيم y_6 ...... y_0 ولقيم ($x = 0$ الى $x=1$) كما في الجدول الآتي :

	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
x	0	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	6/6
y=f (x) =1/(1+x²)	1	0.97297	0.9	0.8	0.6923	0.59016	0.5

إذن قيم التكامل عدديا يكون :

$$I = \frac{1/6}{3}[1 + 4(0.97297 + 0.8 + 0.59016) + 2(0.9 + 0.69230) + 0.5] \approx 0.78539$$

ثالثا- قاعدة (3/8) لسمبسون :

إذا كان عدد الشرائح فردي فمن المفضل استخدام قاعدة (3/8) لسمبسون. حيث يتم هنا تقريب الدالة $f(x)$ بمعادلة تكعيبية والمساحة المحتوية على 3 شرائح يمكن أن تحسب بصورة مشابهة لاشتقاق القاعدة السابقة إذ يمكن استخدام صيغة نيوتن الأمامية لغاية الفرق الرابع والتكامل (من x_0 الى x_3).

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_3}\{y_0 + u\cdot\Delta y_0 + \frac{u(u-1)}{2!}\cdot\Delta^2 y_0 + \frac{u(u-1)(u-2)}{3!}\cdot\Delta^3 y_0\}dx$$

حيث أن : $u = \frac{x - x_0}{h}$

وبالتكامل وباستخدام :

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0$$
$$\Delta^2 y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0$$
$$\Delta^3 y_0 = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0$$

وبالتبسيط نحصل على الصيغة النهائية :

$$I_{3/8} = \frac{3h}{8}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3)$$

Ex. 7 :

Use Simpson's (3/8) rule to evaluate $\int_0^1 x^4 \cdot dx$, considering 6 strips.

الحل :

قيمة الفترة الجزئية (h) تحسب هكذا :

$$h = \frac{b - a}{N} = \frac{1 - 0}{6} = \frac{1}{6}$$

يمكن احتساب قيم y (لقيم 0 = x الى 1 = x) كما في الجدول الآتي :

	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
x	0	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	6/6
$y = x^4$	0	0.00077	0.01234	0.06251	0.1975	0.482253	1.0

وبتطبيق قاعدة (3/8) لسمبسون نحصل على :

$$I_{3/8} = \frac{3h}{8}\left[(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3) + (y_3 + 3y_4 + 3y_5 + y_6\right]$$

$$I_{3/8} = \frac{3h}{8}\left[y_0 + 3(y_1 + y_2 + y_4 + y_5) + 2y_3 + y_6\right] = 0.2002243$$

رابعاً- التكامل للنقاط غير متساوية المسافات

Integration With Unequal Segments

لقد اعتمدنا في الصيغ السابقة لاحتساب التكامل العددي خلال مجال معين على أن أجـزاء الفترة متساوية الأبعاد. لكن هناك حالات كثيرة تكون أجزاء الفترة غير متساوية كما هي الحـال

فى قراءات التجارب المختبرية على سبيل المثال. ففي هذه الحالة يمكن اعتماد طريقة شبه المنحرف لكل شريحة ومن ثم جمع النتائج الخاصة بالتكامل للحصول على التكامل الكلي خلال المجال وكما يلي :

$$I = h_1 \frac{f(x_1) + f(x_0)}{2} + h_2 \frac{f(x_2) + f(x_1)}{2} + \cdots +$$

$$h_n \frac{f(x_n) + f(x_{n-1})}{2} \cdots (1)$$

حيث أن : h_i عرض الشريحة. $h_i = h_1, h_2, h_3, \ldots, h_n$

Ex.8 :

Use trapezoidal rule to determine the integral of data in the following table :

[illegible]	0	0.12	0.22	0.32	0.36	0.4	0.44	0.54	0.64	0.70	0.8
[illegible]	0.2	097	052	434	749	560	429	072	819	630	320

الحل :

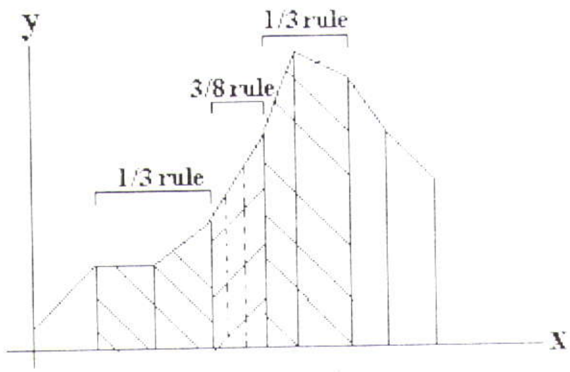
بتطبيق المعادلة (1) على البيانات فى الجدول أعلاه نحصل على :

$$I = 0.12 \frac{1.3097 + 0.2}{2} + 0.10 \frac{1.3052 + 1.3097}{2} + \cdots +$$

$$0.10 \frac{0.232 + 2.363}{2}$$

$$= 0.09058 + 0.13074 + \cdots + 0.12975 = 1.5648$$

يمكن توضيح البيانات المعطاة فى المثال أعلاه كما فى الشكل (5.5).



شكل (5.4)

ومن الجدير ملاحظته هو أن بعـــض الشرائـــح المتجـــاورة تكـــون متســـاوية العـــرض (h= constant) وتبعا لذلك فأنه يمكن أن تحسب باستخدام قاعدة سمبسون وهذا يقود الى نتـــائج أكثر دقة وكما مبين في المثال التالي :

Ex.9 :

Recompute the integral for the data in table in Ex.1 using Simpson's rules.

الحل :

الشريحة الأولى يمكن أن تحسب باستخدام قاعدة شبه المنحرف هكذا :

$$I = 0.12\ \frac{1.3097 + 0.2}{2} = 0.09058$$

لكون أن الشريحتين $(x = 0.12)$ الى $(x = 0.32)$ همـــا ذات مســافات متســـاوية إذن بالإمكان تطبيق قاعدة الثلث لسمبسون هكذا :

$$\therefore h = \frac{b-a}{N} = \frac{0.32 - 0.12}{2} = 0.1$$

$$\therefore I_2 = \frac{h}{3}\left[f(0.12) + 4f(0.22) + f(0.32)\right]$$

$$= \frac{0.1}{3}\left[1.7434 + 4(1.3052) + 1.3097\right] = 0.2758$$

وبما أن الشرائح الثلاث الآخر هي أيضاً متساوية المسافات إذن بالإمكان احتساب التكامل بتطبيق قاعدة (3/8) سمبسون والتي تعطي : $I_3 = 0.27268$

وبنفس الطريقة يمكن احتساب التكامل للشرائح $(x = 0.44)$ الى $(x = 0.46)$ باســتخدام قاعدة (1/3) لسمبسون والتي تعطي : $I_4 = 0.66847$

وأخيرا يمكن احتساب التكامل للشريحتين الأخيرتين الغير متساوية الطول باستخدام طريقة شبه المنحرف والتي تعطي : $I_5 = 0.16634,\ I_6 = 0.12975$

وأن المساحة الكلية هي حاصل جمع المساحات المنفردة هكذا :

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6 = 1.60364$$

خامسا- التكاملات المتعددة Multiple Integrals :

يتم التعامل مع التكاملات المتعددة عدديا عن طريق إيجاد التكامل الداخلي بإحدى الصيـــغ التكاملية السابقة ومن ثم إيجاد التكامل الخارجي كما في التكامل المزدوج أدناه :

$$\iint_A f(x,y)dA = \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx = \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dx\right)dy \cdots (1)$$

حيث المنطقة (A) محصورة بين $x = a$, $x = b$ و $y = c$, $y = d$. حيث يتم تثبيت (x) وتكامل نسبة الى (y) أو العكس. وفي المثال التالي يمكن بيان كيفية إيجاد التكامل المزدوج عدديا.

Ex.10 :

Evaluate the double integral $\int_{1.0}^{3}\int_{0.2}^{0.6} f(x,y)dx\,dy$ and f(x,y) as given in the following table :

y \ x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
0.5	0.165	0.428	0.687	0.942	1.190	1.431
1.0	0.271	0.640	1.003	1.359	1.703	2.035
1.5	0.447	0.990	1.524	2.045	2.549	3.031
2.0	0.738	1.568	2.384	3.177	3.943	4.672
2.5	1.216	2.520	3.800	5.044	6.241	7.379
3.0	2.005	4.090	6.136	8.122	10.030	11.841
3.5	3.306	6.679	9.986	13.196	16.277	19.198

الحل :

المجال المحدد بـ $y = 0.2$, $y = 0.6$ و $x = 1.5$, $x = 3.0$ واجعل الحل بتطبيق قاعدة شبة المنحرف في اتجاه x وقاعدة الثلث لسمبسون باتجاه (y) ونبدأ بتثبيت (y) نحصل على :

$$y = 0.2 : \int_{1.0}^{3.0} f(x,y)\,dx = \int_{1.5}^{3.0} f(x,0.2)\,dx$$

1.

$$= \frac{h}{2}\left(f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4\right)$$

$$= \frac{0.5}{2}\left[0.990 + 2\,(1.568) + 2\,(2.520) + 4.090\right] = 3.3140$$

$$y = 0.3 : \int_{1.5}^{3.0} f(x,0.3)\,dx = \frac{0.5}{2}\left[1.524 + 2\,(2.384) + 2\,(3.800) + 6.136\right] = 5.007$$

وبنفس الطريقة يمكن أن نحصل على :

عند $y = 0.4$ فأن $I = 6.6522$

عند $y = 0.5$ فأن $I = 8.2368$

عند $y = 0.6$ فأن $I = 9.7435$

ولأنه يمكن تجميع هذه التكاملات طبقاً لقاعدة سمبسون فإذن :

$$\int f(x,y)\,dx = \frac{0.1}{3}\left[3.3140 + 4\,(5.0070 + 8.2368) + 2\,(6.6522) + 9.7435\right] = 2.6446$$

سادساً- التكاملات المنفردة Singular Integrals :

يقال أن التكامل منفرد عندما :

أ) إذا كانت الدالة لا نهائية (غير معرفة) عند قيمة أو أكثر من قيم x.

وفي هذه الحالة يمكن إزالة التفرد Singularity بإحدى الطرق التالية :

(i) التعويض Substitution :

Ex. 11 :

Integrate $I = \int_0^1 \frac{\cos x}{x}\,dx$:

الحل :

اجعل $x = t^2$ ، لذلك فأن التكامل أعلاه يصبح :

$$I = \int_0^1 \frac{\cos t^2}{t} \cdot 2t\,dt = 2\int_0^1 \cos t^2 \cdot dt$$

وهذا التكامل غير منفرد.

(ii) مفكوك المتسلسلة Series expansion :

Ex.12 :

Evaluate $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$:

الحل :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\left[1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right]dx$$

$$I = \int_0^1 \left[\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{x^{3/2}}{2} + \frac{x^{7/2}}{4!} - \frac{x^{11/2}}{6!} + \cdots \right] dx$$

وأن :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\ dx = \lim_{s \to 0} \int_s^1 x^{-1/2}\ dx$$

$$= \lim_{s \to 0} \left[\frac{x^{1/2}}{1/2}\right]_s^1 = 2$$

$$\therefore\ I = 2 - \int_0^1 \left(\frac{x^{3/2}}{2} - \frac{x^{7/2}}{4!} + \frac{x^{11/4}}{6!} - \cdots\right) dx$$

وهذا التكامل غير منفرد Non Singular.

(iii) التكامل الجزئي Partial Integration :

__Ex.13 :__

Evaluate $I = \int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\ dx$:

الحل :

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\ dx = \left[\cos x \cdot \frac{x^{1/2}}{1/2}\right]_0^1 - \int_0^1 2\sqrt{x} \cdot (-\sin x)\ dx$$

$$= 2\cos(1) + 2\int_0^1 \sqrt{x} \sin x\ dx$$

وهذا التكامل غير منفرد أيضا.

ب) إذا كانت فترة التكامل غير منتهية :

__Ex.14 :__

Evaluate $I = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{x\,e^{-x} + 1}\ dx$:

__الحل :__

باستخدام التعويض وفرض $t = e^{-x}$, $x = -\ln t$:

$$I = \int_{1}^{0} \frac{t}{(-\ln t)\cdot t^{2}+1} \cdot \frac{-1}{t}\, dt$$

$$= \int_{1}^{0} \frac{dt}{1-t^{2}\ln t}$$

وهذا التكامل غير منفرد.

5.3 تطبيقات حاسبية Computer Applications :

PROBLEM 1

Evaluate the first and second derivative of the function :

$$f(x) = xe^{x}$$

using central difference with a step size H=0.01 ?

الحل :

قائمة البرنامج :

```
10 REM ***Numerical Derivative By Central Difference***
20 DEF FNF(X)=X*EXP (X)
30 X=1.0
40 H=0.01
50 REM ***Compute the first and second derivative***
60 F0=FNF(X)
70 F1=FNF(X+H)
80 F2=FNF(X-H)
90 DF=(F1-F2)/(2*H)
100 DDF=(F1-2.0*F0+F2)/(H^2)
110 PRINT "FOR X=";X;"First derivative=";DF
120 PRINT"Second derivative=";DDF
130 END
```

النتائج :

For (x=1)   First derivative =5.436742
             Second derivative =8.1563

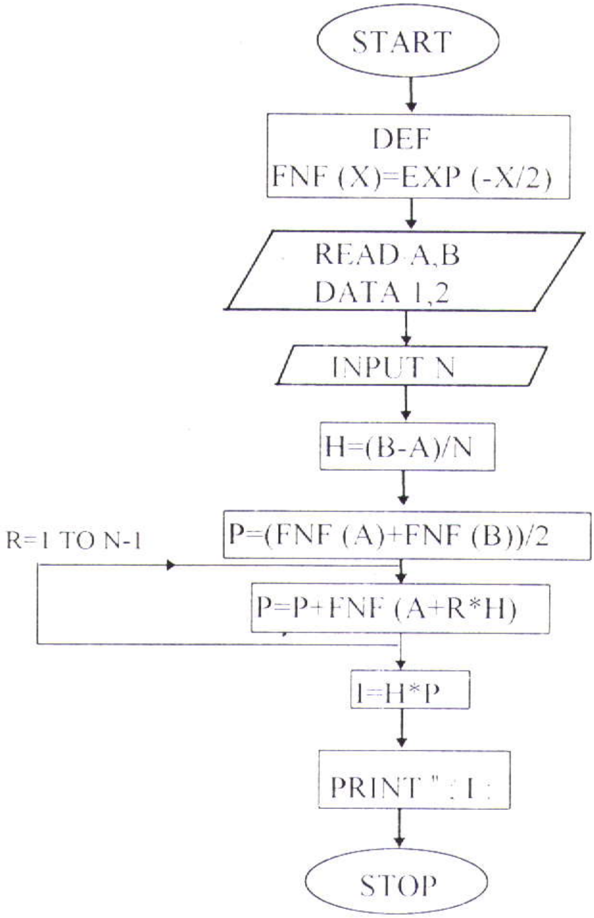
PROBLEM 2 :

Using trapezoidal rule for evaluate :

$$I = \int_{1}^{2} e^{-1/2x} \, dx$$

with 10,20,30 strips respectively

الحل :



قائمة البرنامج :

```
10   REM TRAPEZIOM RULE
20   DEF FNF(X)=EXP(-X/2)
30   DATA 1,2
```

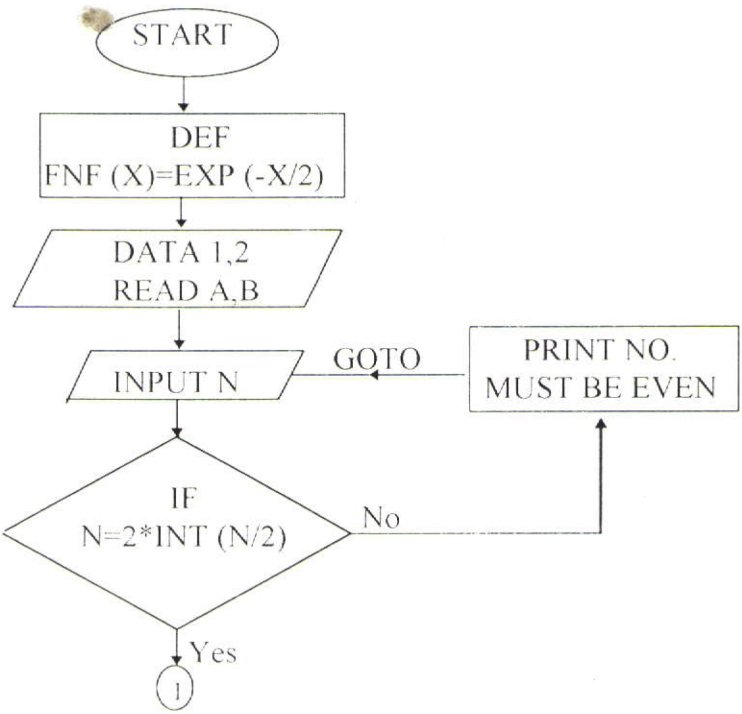
```
40  READ A,B
50  INPUT "Number of strips";N
60  H=(B-A)/N
70  P=(FNF(A)+FNF(B))/2
80  FOR R=1 TO N-1
90  P=P+FNF(A+R*H)
100 NEXT R
110 PRINT "INTEGRAL IS";H*P
```

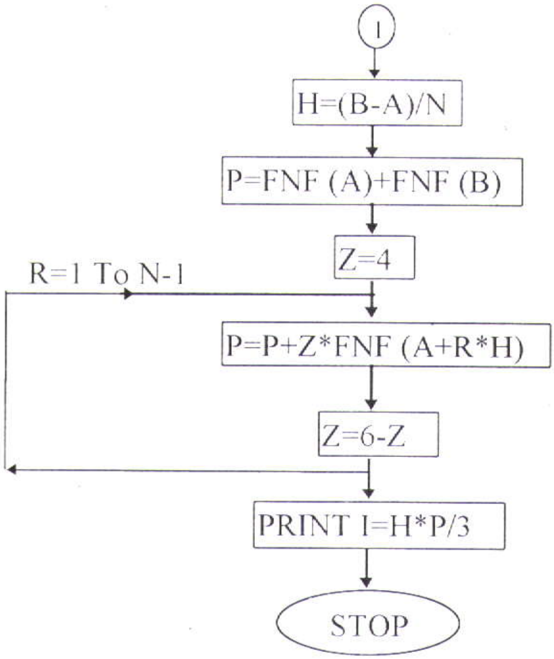
النتائج :

عدد الشرائح (N)	قيمة التكامل
10	0.477302453
20	0.47730243811
30	0.477302437

PROBLEM 3 :

Using Simpson's (1/3) rule with 10,20,30 strips respectively to evaluate $I = \int_{1}^{2} e^{-1.2x}.dx$:





قائمة البرنامج :

```
10  REM SIMPSON'S RULE
20  DEF FNF(X)=EXP(-X/2)
30  DATA 1,2
40  READ A,B
50  INPUT "Number of strips";N
60  IF N=2*INT(N/2)THEN GOTO 100
70  PRINT "Number must be even"
80  GOTO 50
100 H=(B-A)/N
110 P=FNF(A)+FNF(B):Z=4
120 FOR R=1 TO N-1
130 P=P+Z*FNF(A+R*H)
140 Z=6-4
150 NEXT R
160 PRINT " INTEGRALS " ; H*P/3
```

النتائج :

عدد الشرائح (N)	قيمة التكامل
10	0.477301453
20	0.47702438
30	0.4773025

تمارين الفصل الخامس

Q_1) The following values of (x) and (y) are given. Find the best value of $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ and also $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ when (x=6.5) ?

x	5.0	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0
y	3.2188	3.4096	3.5836	3.7436	3.8918	4.0298	4.1588

Q_2) From the following data :

x	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25
y	0.000	0.10017	0.20134	0.30452	0.41072	0.52110

Evaluate $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ at (x=0.00) ?

Q_3) Given the following table :

x	0	1	2	3	4
y	6.9897	7.4036	7.7815	8.7815	8.4510

find y'(2) and y''(2) using Stirling's formula ?

Q₄) A slider in a machine moves along a fixed straight rod its distance x (cm) along the rod is given below, for various values of time t (sec). Find :

(i) The velocity and acceleration of the slider when (t=0.3 sec).

(ii) The distance (x) at time (t=0.55 sec).

Note : for solution take up to fourth difference.

t	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
x	30.13	31.62	32.87	33.64	33.95	33.81	33.24

Q₅) Derive the formula for numerical differentiation suitable for tabular values of (x). Use it to find $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, at (x=1.2) from the table below :

x	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2
y	2.1783	3.3201	4.0552	4.9530	6.0496	7.3891	9.0250

Q₆) From the following table, find (x), correct to two decimal places, for which (y) is maximum and find this value of (y)?

x	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6
y	0.9320	0.9636	0.9855	0.9975	0.9996

Q₇) The acceleration (a), of a rocket at time (t), measured from launching, is given by the table :

t (sec)	0	10	20	30	40	50	60	70
a (m/sec^2)	30	31.7	33.6	35.7	38.0	40.7	43.7	47.1

Find the rocket's velocity and height at (t=70 sec).

Note : take 3rd difference for solution.

Q₈) Tabulate values of (y=-cos 2x) for $x = 0\left(\frac{\pi}{8}\right)\frac{\pi}{2}$ and find :

(i) $y'(0), y''(0), y'\left(\frac{\pi}{2}\right), y'\left(\frac{\pi}{3}\right)$ numerically.

(ii) $\int_0^{\pi/2} y \cdot dx$ using Simpson's (1/3) rule.

Correct to (4D) ?

Q₉) Use the trapezoidal rule of integration to determine the value of the following integrals :

$$\textbf{(a)} \int_0^4 (2 - x^2) \cdot dx \; ; \quad \text{with } (h = 1)$$

$$\textbf{(b)} \int_0^1 x\, e^x \cdot dx \; ; \quad \text{with } (h = 0.1)$$

$$\textbf{(c)} \int_1^2 x \ln x \cdot dx \; ; \quad \text{with } (h = 0.1)$$

Q₁₀) Use Simpson's (1/3) rule to evaluate the following integrals, Assume (h=1) ?

$$\textbf{(a)} \int_1^3 x^2 \cdot dx \qquad \textbf{(b)} \int_1^5 (x^3 + x^2 - 5) \cdot dx$$

$$\textbf{(c)} \int_0^2 x \sin x \cdot dx \qquad \textbf{(d)} \int_1^5 \frac{x}{\sin x} \cdot dx$$

Q₁₁) Using Simpson's ($3/8^{th}$) rule, evaluate $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ taking (6) strips ?

Q₁₂) A tank is discharging water through an orifice at a depth (x) meter below the surface of water whose area (A) m^2. The following are the values of the corresponding values of (A) ?

A	1.257	1.39	1.52	1.65	1.809	1.962	2.123	2.295	2.462	2.650	2.827
x	1.50	1.65	1.80	1.95	2.10	2.25	2.40	2.55	2.70	2.85	3.00

Using the formula :

$$(0.018)\,T = \int_{1.5}^{3.0} \frac{A}{\sqrt{x}} \cdot dx$$

Calculate (T), the time in second for the level of water to drop from (3.0 m) to (1.5 m) above the orifice ?

Q13) By Simpson's rule, find the value of $\left(\ln \frac{3}{2}\right)$ approximately by dividing the interval into (10) equal internals ?

Q14) Approximate $\left(\int_{0}^{\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx\right)$ by Simpson's rule with seven ordinates ?

Q15) Evaluate these integrals :

(i) $\int_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ **(ii)** $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ **(iii)** $\int_{0}^{\infty} \frac{x\, dx}{e^{x}+1}$

Q16) Evaluate : $\int_{0.1}^{0.7} \int_{-0.2}^{0.6} e^{x} \sin y \cdot dy\, dx$

(i) Using the Trapezoidal rule in both direction, $\Delta x = \Delta y = 0.1$
(ii) Using Simpson's (1/3) rule in both direction, $\Delta x = \Delta y = 0.1$

Q17) Evaluate the following integrals using the multiple rule of integration take ($\Delta x = \Delta y = 1$) :

(i) $I = \int_{0}^{3} \int_{0}^{2} xy\, dx\, dy$ **(ii)** $I = \int_{0}^{1} \int_{0}^{2} y \cdot e^{x}\, dx\, dy$

(iii) $I = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} e^{xy}\, dx\, dy$