رياضيات عامة

مفهوم الدالة ومنحناها

مفهوم الدالة ومنحناها

٤

اسم الوحدة: مفهوم الدالة ومنحناها

الجدارة: معرفة مفهوم الدالة وأنواعها وبعض الدوال العددية المشهورة والقدرة على تمثيل منحنياتها.

الأهداف: بعد دراسة هذه الوحدة يكون للمتدرب القدرة على معرفة:

- الدوال من غيرها وتحديد مجالها ومداها
- بعض الدوال الجبرية المشهورة.
- الدوال المثلثية الأساسية.
- الدوال الأسية واللوغاريتمية.
- تمثيل منحنيات الدوال.

مستوى الأداء المطلوب: أن يصل المتدرب إلى إتقان هذه الوحدة بنسبة ٨٠٪ .

الوقت المتوقع للتدريب: ثمان ساعات.

مفهوم الدالة ومنحناها

استخدمت الدوال منذ القدم ولكنها لم تدرس كمفهوم رياضي إلا حديثا.
ومن تطبيقاتها: الدوال العددية المشهورة التي تدخل في كثير من القوانين التجريبية، وكذلك الدوال الخاصة بالبرمجة في الحاسوب.

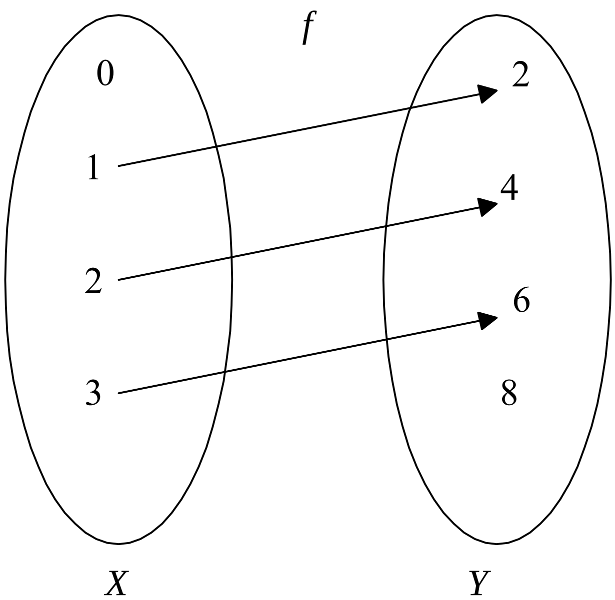
١. تعريف الدالة:

تعريف١: تكون علاقة f من مجموعة X إلى مجموعة Y دالة إذا كان كل عنصر من X في علاقة مع عنصر واحد على الأكثر من Y ، أي أنه من أجل أي عنصرين x_1 و x_2 من X هما في علاقة مع عنصرين من Y يكون:

$$x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

حيث أن $f(x)$ يمثل العنصر الذي هو في علاقة مع x .
نسمي المجموعة X مجموعة المنطلق والمجموعة Y مجموعة الوصول والعنصر $y = f(x)$ صورة x بواسطة الدالة f والعنصر x أصل $y = f(x)$ بواسطة الدالة f ونقول أن $f(x)$ غير معرفة في Y إذا كان x ليس في علاقة مع أي عنصر من Y أي أن $f(x)$ غير موجود في Y .
نرمز لهذه الدالة بالرمز: $f : X \to Y$
تجدر الإشارة إلى أن كل عنصر من مجموعة المنطلق له صورة واحدة على الأكثر، بينما قد يكون هناك عنصر من مجموعة الوصول له عدة أصول.

مثال١: لتكن لدينا المجموعتان التاليتان:
$X = \{0,1,2,3\}$ و $Y = \{2,4,6,8\}$ والعلاقة f
من X إلى Y بحيث:
$f(1) = 2,\ f(2) = 4,\ f(3) = 6$
العلاقة f دالة لأن كل عنصر من X في علاقة مع عنصر واحد على الأكثر من Y .
يمكن تمثيل هذه الدالة بالمخطط السهمي التالي:



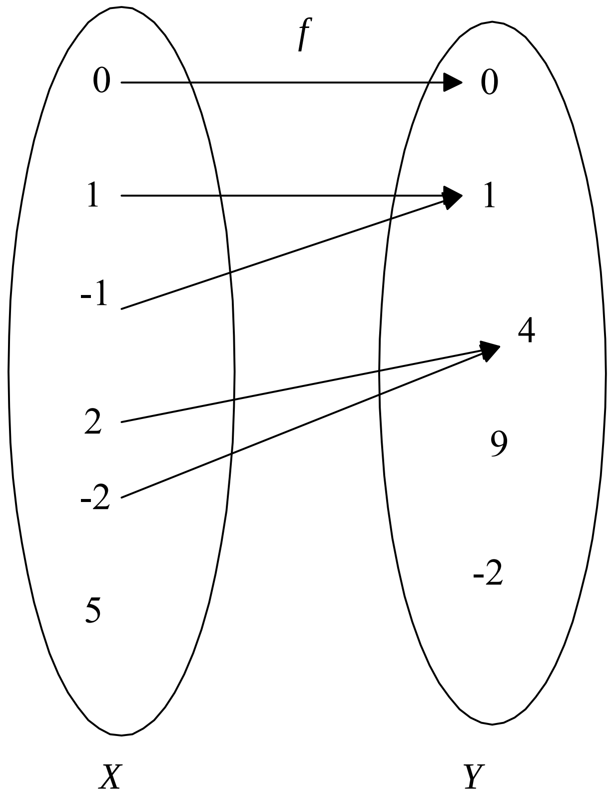
كما يمكن تعريف هذه الدالة كالتالي:
$f : X \to Y$ حيث: $f(x) = 2x$

مثال ٢: لتكن لدينا المجموعتان التاليتان: $X=\{0,1,-1,2,-2,5\}$ و $Y=\{0,1,4,9,-2\}$ والعلاقة f من X إلى Y بحيث:

$$f(0)=0,\ f(1)=f(-1)=1,\ f(2)=f(-2)=4$$

العلاقة f دالة لأن كل عنصر من X في علاقة مع عنصر واحد على الأكثر من Y :
العناصر 0 و 1 و 1− و 2 و 2− في علاقة مع عنصر واحد فقط من Y بينما العنصر 5 ليس في علاقة مع أي عنصر من Y أي أن $f(5)$ غير معرفة في Y .

يمكن تمثيل هذه الدالة بالمخطط السهمي التالي:



كما يمكن تعريف هذه الدالة كالتالي:

$$f: X \to Y$$

حيث: $f(x)=x^2$

ويمكن في هذه الحالة أن نبين بأن f هي دالة باستخدام العلاقة الموجودة في التعريف ١:

$$x_1=x_2 \Rightarrow (x_1)^2=(x_2)^2 \Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$$

مثال ٣: لتكن لدينا المجموعتان التاليتان: *Cities* وهي مجموعة مدن العالم، و *Countries* وهي مجموعة بلدان العالم والعلاقة f من *Cities* إلى *Countries* بحيث: x هو عاصمة $f(x)$.

العلاقة f دالة لأن كل عنصر x من *Cities* وهو مدينة من المدن في علاقة مع عنصر واحد على الأكثر من *Countries*

إذا كان x عاصمة من العواصم فهو في علاقة مع بلده الموافق، وإذا كان x ليس عاصمة فهو ليس في علاقة مع أي عنصر من *Countries* . مثلا:

$$f(Riyadh)=Saudi\ Arabia$$
$$f(Algiers)=Algeria$$
$$f(Cairo)=Egypt$$
$$f(London)=United\ Kingdom$$

بينما $f(Abha)$ ليست معرفة في *Countries* لأن *Abha* ليست عاصمة دولة.

مثال٤: لتكن لدينا المجموعتان السابقتان: $Cities$ و $Countries$ والعلاقة g من $Cities$ إلى $Countries$ بحيث: $g(x)$ هو البلد الذي توجد فيه المدينة x .

العلاقة g دالة لأن كل عنصر x من $Cities$ وهو مدينة من المدن في علاقة مع عنصر واحد على الأكثر من $Countries$. مثلا:

$$g(Riyadh) = Saudi\ Arabia$$
$$g(\mathrm{Alg}iers) = \mathrm{Alg}eria$$
$$g(Cairo) = Egypt$$
$$g(London) = United\ Kingdom$$
$$g(Abha) = Saudi\ Arabia$$

مثال٥: لتكن لدينا المجموعتان السابقتان $Countries$ و والعلاقة f من $Countries$ إلى $Cities$ بحيث: $f(x)$ هو مدينة من البلد x .

هذه العلاقة ليست دالة لأنه مثلا: البلد $Saudi\ Arabia$ في علاقة مع أكثر من مدينة.واحدة.

تعريف٢: مجال الدالة f (أو مجموعة تعريفها) هو مجموعة العناصر الموجودة في مجموعة المنطلق والتي لها صورة بواسطة الدالة، ومدى الدالة f هو مجموعة العناصر الموجودة في مجموعة الوصول والتي لها أصول بواسطة الدالة.

يرمز لمجال الدالة f بالرمز D_f ولمداها بالرمز R_f .

مثال٦: حدد مجال الدوال المعرفة في الأمثلة ١ إلى ٤ ومداها.

الحل:

$$1)\ D_f = \{1,2,3\}, \qquad R_f = \{2,4,6\}$$
$$2)\ D_f = \{0,1,-1,2,-2\}, \qquad R_f = \{0,1,4\}$$

٣) لو نعتبر مجموعة العواصم $Capitals$ فيكون:

$$D_f = Capitals \qquad R_f = Countries$$
$$4)\ D_g = Cities \qquad R_g = Countries$$

مثال٧: لتكن لدينا مجموعة الأعداد الطبيعية N والعلاقة f من N إلى N بحيث: $f(x) = 2x$.

١) بين أن f دالة. ٢) حدد مجال f ومداها. ٣) احسب $f(5)$ و $f(14)$.

الحل:

١) f دالة لأن:

$$x_1 = x_2 \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

٢) كل عدد طبيعي له صورة بواسطة f إذن: $D_f = \mathrm{N}$

بينما الأعداد الزوجية فقط هي التي لها أصول في N : $R_f = \{2,4,6,8,10,\cdots\}$

٣) $f(5) = 2\times 5 = 10$ و $f(14) = 2\times 14 = 28$.

مثال ٨: لتكن لدينا مجموعة الأعداد الحقيقية R والعلاقة g من R إلى R بحيث: $f(x) = 2x$.

١) بين بأن g دالة. ٢) حدد مجال g ومداها. ٣) احسب $g(2.5)$ و $g(5)$.

الحل:

١) g دالة لأن:

$$x_1 = x_2 \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow g(x_1) = g(x_2)$$

٢) كل عدد حقيقي له صورة بواسطة g إذن: $D_g = \mathrm{R}$

وكذلك كل الأعداد الحقيقية لها أصول في R إذن: $R_g = \mathrm{R}$ لأن: $y = 2\times\dfrac{y}{2} = 2\left(\dfrac{y}{2}\right) = g\left(\dfrac{y}{2}\right)$

مثلا: $3 = g(1.5)$ و $0.6 = g(0.3)$.

٣) $g(2.5) = 2\times 2.5 = 5$ و $g(5) = 2\times 5 = 10$.

تعريف ٣: تكون دالتان f و g متساويتين إذا تحقق ما يلي:

$$1)\ D_f = D_g$$

$$2)\ x\in D_f \Rightarrow f(x) = g(x)$$

نرمز لذلك بالرمز: $f = g$.

مثال ٩: هل الدالتان f و g المعرفتان في المثالين ٣ و ٤ على الترتيب متساويتان؟

الحل:

باستخدام نتائج الفقرتين ٣ و ٤ من المثال ٦ فإن: $f \neq g$ لأن مجاليهما غير متساويين:

$$D_f = Capitals \neq D_g = Cities$$

مثال ١٠: هل الدالتان f و g المعرفتان في المثالين ٧ و ٨ على الترتيب متساويتان؟

الحل:

باستخدام نتائج المثالين ٧ و ٨ فإن: $f \neq g$ لأن مجاليهما غير متساويين:

$$D_f = \mathrm{N} \neq D_g = \mathrm{R}$$

مثال ١١: لتكن لدينا الدالة التالية:

$$g{:}\mathrm{N} \to \mathrm{N}$$

حيث : $g(x)=x^2$

ونعتبر الدالة f المعرفة في المثال ٧. هل $f=g$ ؟

الحل:

رغم أن الشرط الأول للتساوي (تعريف ٣) متحقق وهو : $D_f = \mathrm{N} = D_g$

لاكن الشرط الثاني غير متحقق: مثلا $3 \in D_f = \mathrm{N}$ لكن $f(3)=2\times 3=6 \neq g(3)=3^2=9$

ومنه فإن: $f \neq g$.

٢. الدوال العددية :

تعريف ٤: الدوال العددية هي الدوال التي تكون مجموعة وصولها مجموعة عددية.

مثال ١٢: كل الدوال التالية هي دوال عددية.

$$1)\ f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=x+1$$
$$2)\ f:\mathrm{N}\to\mathrm{N},\ f(x)=x+1$$
$$3)\ f:\mathrm{N}\to\mathrm{N},\ f(x)=\sqrt{x}$$
$$4)\ f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=\sqrt{x}$$

تعريف ٥: نقول عن دالة إنها:

١) فردية إذا كان: $f(-x)=-f(x)$ أو $f(-x)+f(x)=0$ من أجل أي $x\in D_f$ و $-x\in D_f$.

٢) زوجية إذا كان: $f(-x)=f(x)$ أو $f(-x)-f(x)=0$ من أجل أي $x\in D_f$ و $-x\in D_f$.

مثال ١٣: هل الدوال المعرفة في المثال السابق فردية أم زوجية أم غير ذلك؟

الحل:

1) الدالة $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ حيث $f(x)=x+1$ ليست فردية ولا زوجية لأن:

$$f(-x)+f(x)=(-x)+1+x+1=2\neq 0$$
$$f(-x)-f(x)=(-x)+1-(x+1)=-x+1-x-1=-2x\neq 0$$

الدالة $g:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ حيث $g(x)=x^2$ زوجية لأن:

$$g(-x)-g(x)=(-x)^2-x^2=x^2-x^2=0$$

2) الدالة $f:\mathrm{N}\to\mathrm{N}$ حيث $f(x)=x+1$ ليست فردية ولا زوجية لأنه إذا كان $x\in D_f=\mathrm{N}$ فإن $-x\notin D_f$.

الدالة $g:\mathrm{N}\to\mathrm{N}$ حيث $g(x)=x^2$ ليست فردية ولا زوجية لسبب مماثل للسبب السابق.

3) الدالة $f:\mathrm{N}\to\mathrm{N}$ حيث $f(x)=\sqrt{x}$ ليست فردية ولا زوجية لأنه إذا كان $x\in D_f=\mathrm{N}$ فإن $-x\notin D_f$.

4) الدالة $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ حيث $f(x)=\sqrt{x}$ ليست فردية ولا زوجية لأن مجالها لا يحتوي على الأعداد السالبة (السبب السابق).

٣. منحنى الدالة:

يمكن تمثيل الدوال العددية التي يكون مجالها مجموعة عددية فيما يسمى بالمستوى الديكارتي وذلك بإتباع الخطوات التالية:

١) إنشاء جدول لقيم x (المعرفة) مرتبة من أصغرها إلى أكبرها وقيم $y=f(x)$ الموافقة لها.

٢) رسم النقاط (x,y) الناتجة في المستوى الديكارتي.

٣) وصل النقاط بعضها ببعض حسب ترتيبها بقطع مستقيمة إذا كانت القيم الموافقة للعنصر x لها صورة.

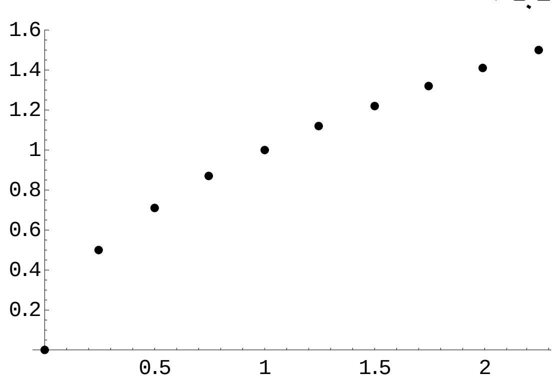
مثال ١٤: مثل الدالة التالية: $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ حيث $f(x)=\sqrt{x}$.

الحل:

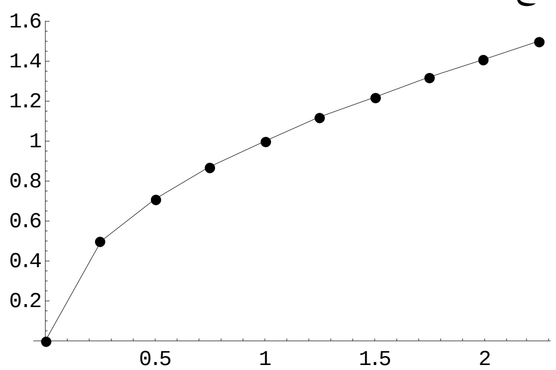
الخطوة الأولى: إنشاء جدول القيم:

x	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25
$y=\sqrt{x}$	0.00	0.50	0.71	0.87	1.00	1.12	1.22	1.32	1.41	1.50

الخطوة الثانية: رسم النقاط الناتجة:



الخطوة الثالثة: وصل النقاط بقطع مستقيمة:



تجدر الإشارة إلى أنه كلما كان جدول القيم أكثر دقة وأكثر قيما كلما كان التمثيل أدق..
وهذا التمثيل يعطي لنا جزءا مما يسمى منحنى الدالة.

٤. دوال خاصة

١,٤ الدوال الجبرية:

تعريف ٥: الدوال الجبرية هي الدوال التي يمكن تعريفها باستخدام كثيرات الحدود وعمليات الجمع والطرح والضرب والقسمة (المطولة).

وهي نوعان: كثيرات الحدود وهي التي نستخدم فيها الجمع والطرح والضرب فقط، والدوال الكسرية وهي التي نستخدم فيها العمليات السابقة والقسمة أيضا.

ومن الدوال الجبرية: الدالة الثابتة والدالة الخطية والدالة التربيعية والدالة الكسرية.

1) **الدالة الثابتة:** وهي من الشكل: $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ حيث $y=f(x)=a$ و a عدد حقيقي ثابت.

ومن خواصها:

١) $D_f=\mathrm{R}$ أي أنها معرفة لكل عدد حقيقي.

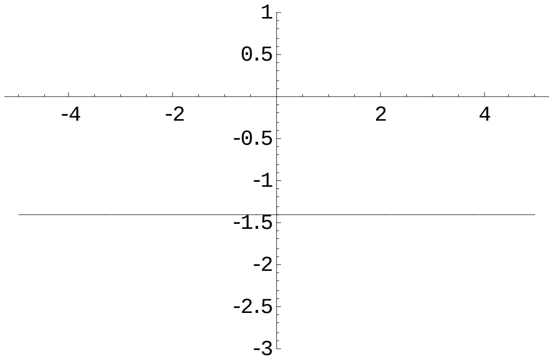
٢) $R_f=\{a\}$ أي أنها تقبل قيمة واحدة فقط.

٣) $f(-x)=f(x)$ أي أنها زوجية.

٤) يمكن تمثيلها بخط مستقيم يوازي محور السينات.

مثال ١٥: مثّل الدالة التالية: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ حيث $f(x)=-\sqrt{2}$.

الحل:



2)**الدالة الخطية:** وهي من الشكل: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ حيث $y=f(x)=a\,x+b$ و a,b عددان حقيقيان ثابتان و $a\neq 0$ أي أنها كثير حدود من الدرجة الأولى.

ومن خواصها:

١) $D_f=\mathbb{R}$ أي أنها معرفة لكل عدد حقيقي.

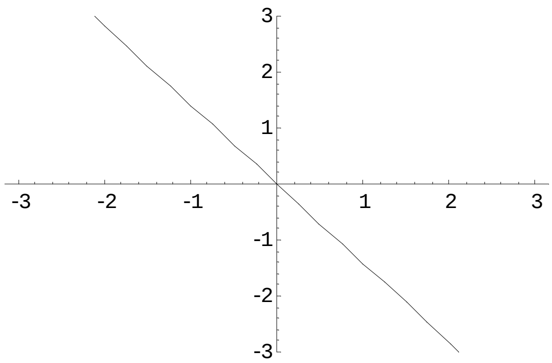
٢) $R_f=\mathbb{R}$ أي أنها تقبل كل القيم الحقيقية..

٣) ليست فردية ولا زوجية.

٤) يمكن تمثيلها بخط مستقيم مائل يمر من نقطة المبدأ إذا كانت $b=0$ و بخط مستقيم مائل يمر من النقطة $(0,b)$ إذا كانت $b\neq 0$.

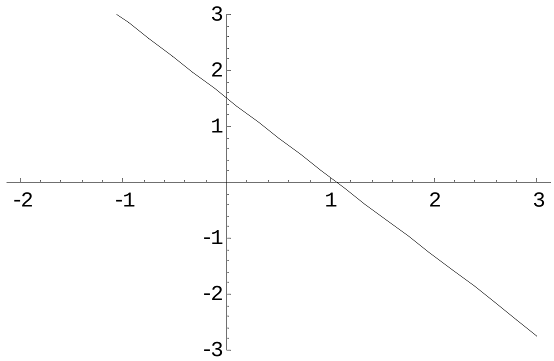
مثال ١٦: مثّل الدالة التالية: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ حيث $f(x)=-\sqrt{2}\,x$.

الحل:



مثال ١٧: مثّل الدالة التالية: $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ حيث $f(x)=-\sqrt{2}\,x+1.5$.

الحل:



4) **الدالة التربيعية:** وهي من الشكل: $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ حيث $y=f(x)=a\,x^2+b\,x+c$ و $a\neq 0$ و b و c أعداد حقيقية ثابتة أي أنها كثير حدود من الدرجة الثانية.

ومن خواصها:

١) $D_f=\mathrm{R}$ أي أنها معرفة لكل عدد حقيقي.

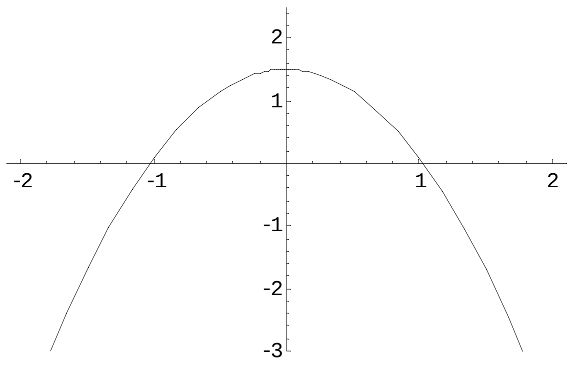
٢) $R_f\neq\mathrm{R}$ أي أنها لا تقبل كل القيم الحقيقية..

٣) ليست فردية ولا زوجية ولكنها زوجية إذا كان $b=0$.

٤) يمكن تمثيلها بقطع مخروطي زائد يمر من نقطة المبدأ إذا كان $b=c=0$.

مثال ١٨: مثّل الدالة التالية: $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ حيث $f(x)=-\sqrt{2}\,x^2+1.5$.

الحل:



4) **الدالة الكسرية :** وهي عبارة عن كسر بسطه ومقامه كثيرات حدود.

وسنأخذ كمثال لها الدالة: $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ حيث $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$

ومن خواصها :

١) $D_f=\mathrm{R}-\{1\}$ أي أنها ليست معرفة لكل عدد حقيقي.

٢) $R_f=\mathrm{R}-\{2\}$ أي أنها لا تقبل كل القيم الحقيقية..

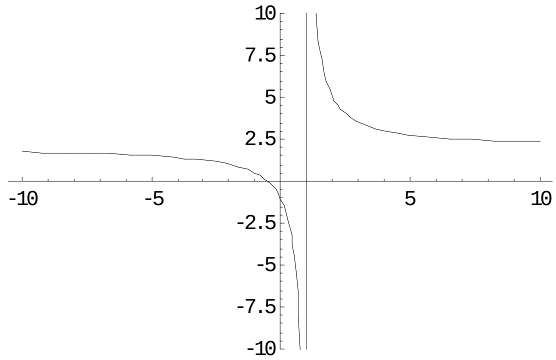
٣) ليست فردية ولا زوجية.

٤) يمكن تمثيلها بقطع مخروطي مكافئ لا يمر من نقطة المبدأ.

مثــال ١٩: مثّــل الدالــة التاليــة: $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ حيــث

. $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$

الحل:



٢,٤ الدوال غير الجبرية :

أما الدوال غير الجبرية فمنها : الدوال المثلثية والدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية.

وسنتطرق إلى دراسة الدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية في الوحدة الخامسة

١,٢,٤الدوال المثلثية

تعريف ٦ : الدوال المثلثية هي الدوال التي تكون معرّفة على الزوايا. ونقيس الزوايا بوحدة الراديان (الوحدة القياسية) أو بالدرجات (التي رمزها $^\circ$) وعلاقة التحويل بين هاتين الوحدتين هي: $\pi=180^\circ$

ومن الدوال المثلثية : دالة الجيب ودالة جيب التمام ودالة الظل ودالة قاطع التمام ودالة القاطع.

تعريف ٧ : نقول عن دالة $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ إنها دورية ذات دور $p>0$ إذا كان: $f(x+p)=f(x)$ من أجل أي عدد حقيقي $x\in D_f$ (و p أصغر ما يمكن)، أي أن قيم الدالة تتكرر بشكل منتظم

.**تعريف ٧ :** إذا كان لدينا مثلث قائم الزاوية وكان x مقياس أحد زاويتيه غير القائمتين فإن:

$\sin x$ هو حاصل قسمة طول الضلع المقابل للزاوية غير الوتر على طول الوتر،

و $\cos x$ هو حاصل قسمة طول الضلع المجاور للزاوية غير الوتر على طول الوتر.

و $\tan x$ هو حاصل قسمة طول الضلع المقابل للزاوية على طول الضلع المجاور للزاوية غير الوتر

و $\cot x$ هو حاصل قسمة طول الضلع المجاور للزاوية غير الوتر على طول الضلع المقابل للزاوية

1) **دالة الجيب:** ويرمز لها بالرمز: $\sin$ وهي من الشكل: $\sin : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ حيث $y = \sin x$. معممة لمقياس أية زاوية.

ومن خواصها:

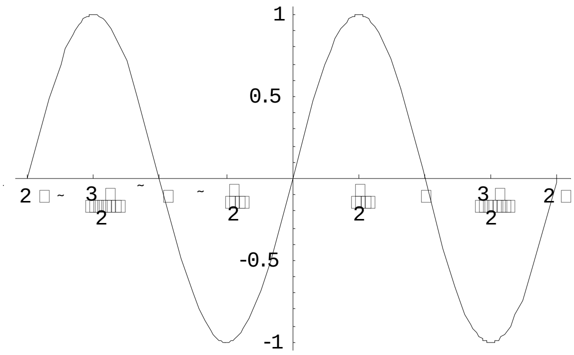
١) $D_f = \mathrm{R}$ أي أنها معرفة لكل عدد حقيقي.

٢) $R_f = [-1,1]$ أي أنها لا تقبل كل القيم الحقيقية ولكن: $-1 \le \sin x \le 1$

٣) $\sin(-x) = -\sin x$ أي أنها فردية.

٤) $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ أي أنها دورية ذات دور 2π .

٥) يمكن تمثيلها بموجة تمر من نقطة المبدأ كما هو موضح بالرسم التالي:



2) **دالة جيب التمام:** ويرمز لها بالرمز: $\cos$ وهي من الشكل: $\cos : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ حيث $y = \cos x$. معممة لمقياس أية زاوية..

ومن خواصها:

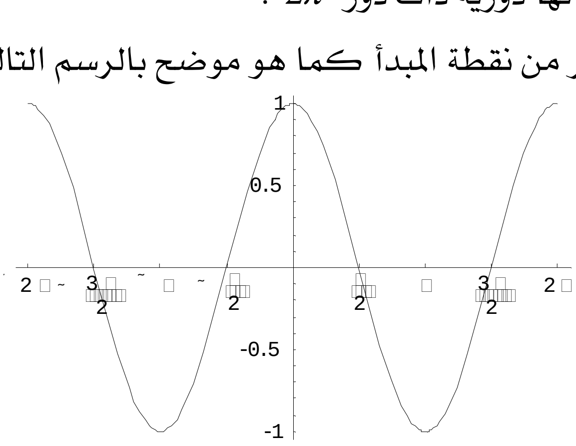
١) $D_f = \mathrm{R}$ أي أنها معرفة لكل عدد حقيقي.

٢) $R_f = [-1,1]$ أي أنها لا تقبل كل القيم الحقيقية ولكن: $-1 \le \cos x \le 1$.

٣) $\cos(-x) = \cos x$ أي أنها زوجية.

٤) $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ أي أنها دورية ذات دور 2π .

٥) يمكن تمثيلها بموجة لا تمر من نقطة المبدأ كما هو موضح بالرسم التالي.



3) **دالة الظل:** ويرمز لها بالرمز: $\tan$ وهي من الشكل: $\tan : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ حيث $y = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ . .

ومن خواصها:

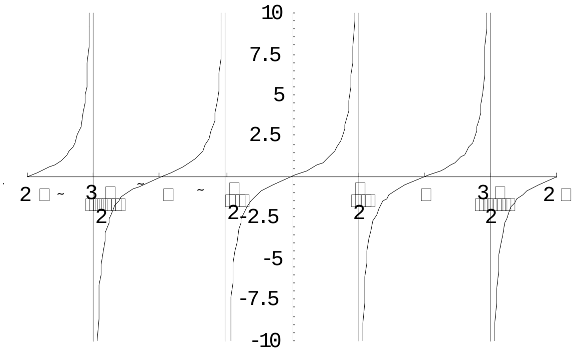
١) $D_f = \mathrm{R} - \{\cdots, -\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \cdots\}$ أي أنها ليست معرفة لكل عدد حقيقي.

٢) $R_f = \mathrm{R}$ أي أنها تقبل كل القيم الحقيقية.

٣) $\tan(-x) = -\tan x$ أي أنها فردية.

٤) $\tan(x+\pi) = \tan x$ أي أنها دورية ذات دور π .

٥) يمكن تمثيلها ب"موجة" تمر من نقطة المبدأ كما هو موضح بالرسم التالي.



4) **دالة ظل التمام:** ويرمز لها بالرمز: $\cot$ وهي من الشكل: $\cot : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ حيث $y = \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$.

ومن خواصها:

١) $D_f = \mathrm{R} - \{\cdots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \cdots\}$ أي أنها ليست معرفة لكل عدد حقيقي.

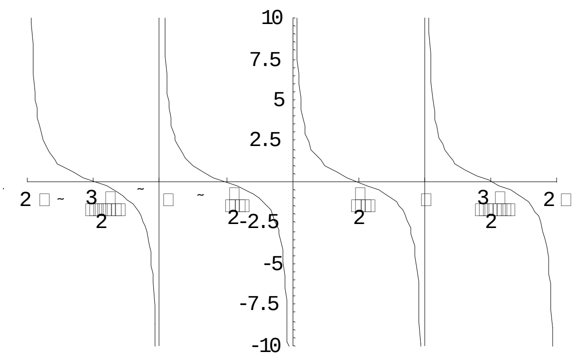
٢) $R_f = \mathrm{R}$ أي أنها تقبل كل القيم الحقيقية.

٣) $\cot(-x) = -\cot x$ أي أنها فردية.

٤) $\tan(x+\pi) = \tan x$ أي أنها دورية ذات دور π .

٥) $\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$.

٦) يمكن تمثيلها ب"موجة" تمر من نقطة المبدأ كما هو موضح بالرسم التالي.



تمارين

تمرين ١: بين أن كلا من العلاقات التالية دوال:

$$1)\ f:\mathrm{N}\to\mathrm{N},\ f(x)=x^3,\qquad 2)\ f:\mathrm{N}\to\mathrm{N},\ f(x)=\sqrt[3]{x},$$

$$3)\ f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=x^3+1,\qquad 4)\ f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=\sqrt[3]{x}-1$$

تمرين ٢: حدد مجال كل دالة من التمرين ١ ومداها:

تمرين ٤: هل كل مما يلي دالة فردية أم زوجية أم غير ذلك؟

$$1)\ f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=\sin 2x\qquad 2)\ f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=\frac{1}{x}$$

$$3)\ f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=\cos x+\sin 3x\qquad 4)\ f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=|x|.$$

تمرين ٥: مثل كلا من الدوال التالية:

$$1)\ f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=\sin 2x\qquad 2)\ f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=\frac{1}{x}$$

$$3)\ f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=\sin 3x+\cos 2x\qquad 4)\ f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=|x|$$

تمرين ٦: بين أن الدوال التالية دورية وحدد دورها:

$$1)\ \sin 2x,\qquad 2)\ \cos\frac{1}{4}x,\qquad 3)\ \sin 2x-\cos\frac{1}{4}x,\qquad 4)\ \tan x+2\cos 3x.$$

تمرين ٧: ما هو وجه الشبه بين دالتي الجيب وجيب التمام ووجه الفرق بينهما؟

تمرين ٨: ما هو وجه الشبه بين دالتي الظل وظل التمام ووجه الفرق بينهما؟