وزارة التعليم العالي والبحث العلمي   كليـة التربية المقــداد

جامعــة ديالــى   قسـم الرياضــيات

عنوان البحث

مشروع تخرج مقدم

الى مجلس قسم الرياضيات، وهو جزء من متطلبات نيل شهادة البكالوريوس في الرياضيات من قِبل الطلبة:

اسم الطالب الاول. رسول شمران كردي

اسم الطالب الثاني. زينب محمود شكر

بـ إشراف :-

م.م ساجد وليد عمران

1443 هـ   2022 م

شكر وتقدير

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على خاتم الانبياء والمرسلين في مثل هذه اللحظات يتوقف اليراع قبل ان يخط الحروف ليجمعها في كلمات تتبعثر الاحرف وعبثا ان نحاول تجميعها سطورا سطورا كثيرة تمر في الخيال ولا يبقى لنا في نهاية المطاف إلا قليلا عن الذكريات وصور تجمعنا برفاق كانوا الى جانبنا فواجب علينا شكرهم ونحن نخطوا خطواتنا الاولى في غمار الحياة ونخص بجزيل الشكر والتقدير كل من اشعل شمعة في دروب علمنا والى من وقف على المنابر واعطى من حصيلة فكره لينير دربنا الى اساتذتنا الكرام ونتوجه بالشكر والتقدير الى الذي تفضل بأشرافه على هذا البحث فجازه الله عنا كل خير فله منا كل التقدير والاحترام.

الإهــداء

إلى
كل من جعل مخافة الله
اساس عمله
وكلُ من سهر الليالي
وطلب العلم لوصول
الاعالي..
أهدي هذا الجهد
المتواضع .

الآية

بسم الله الرحمن الرحيم

۝ اللَّهُ نُورُ السَّمَاوَاتِ وَالْأَرْضِ ۚ مَثَلُ
نُورِهِ كَمِشْكَاةٍ فِيهَا مِصْبَاحٌ ۖ الْمِصْبَاحُ فِي
زُجَاجَةٍ ۖ الزُّجَاجَةُ كَأَنَّهَا كَوْكَبٌ دُرِّيٌّ

سورة النور آية ٣٥

الملخـص :

يتلخص موضوع البحث في استخدام البرنـامج الرياضـي ذو التقنيـة العاليـة (Matlab) في ايجاد مجموعة الحلول للمعادلات. الخطية وباستخدام **طريقة التحليل المثلثي**

في الجزء النظري تم .التطرق الى توضيح هذه **الطريقة** رياضيا دون استخدام البرمجة بواسطة أمثلة أعدت لهذا الغرض . حيث تمثلت طريقة كاوس بتحويل مصفوفة المعاملات الى مصفوفة نصف مثلثيه. والتي فيها تكون العناصر تحت القطر الرئيسي تساوي أصفار ومن ثم يطبق قانون التعويض المتراجع لغرض حساب مجموعة الحلول .
أما طريقة (كاوس - جوردن) ففرقها عن الطريقة الاولى يتمثل بتحويل مصفوفة المعاملات الى مصفوفة جميع عناصرها أصفار عدا قطرها الرئيسي ومن ثم تحسب منها مجموعة الحلول بقسمة النواتج على عناصر القطر المرادفة لها . وهناك تشابه أيضا بين طريقة كاوس وطريقة التحليل المثلثي من حيث تطبيق قانون التعويض المتراجع ، لكن لهذه الطريقة نظام خاص باستخدام المصفوفات .
وفي الجزء العملي تم بناء برامج خاصة لإيجاد مجموعة الحلول للنظام المشروح في الجزء النظري ، وذلك لغرض تبيان كيفية استخدام البرنـامج في حل المعادلات ، وبعد مقارنة النتائج وجدت مطابقة للعملي ، مما يثبت كفاءة هذا النظام في الحلول الرياضية .

هـدف البحـث :

توضـيح كيفيـة اسـتخدام برنــامج (Matlab) فـي حسـاب أو ايجـاد الجـذور الحقيقيـة والخيالية لنظـام معـادلات خطيـة مختلفـة، وتطبيق الشـرح النظـري عمليـا من خـلال بنـاء البـرامج الخاصـة بهـا ، وحسـاب النتـائج نظريـا وعمليـا لمقارنـة الحلـول . من خلا ل استخدام **طريقة التحليل المثلثي**

مشكلة البحث :

يستغرق الطـالب كثيرا من الوقت في ايجاد حل لنظـام معـادلات خطيـة ، والسبب ربمـا يتخلص في ضعف المعلومـات الرياضـية المتوفرة لديـه من المراحل الدراسية السـابقة . وقد يستمر بالحل دون أن يجد مخرجا خاصة اذا كان عدد المعادلات أكثر من ثلاثة ، لذا و باستخدام الحاسوب الالي في مجالين ، الأول توضيح الطرق الممكن استخدامها في ايجاد الحلول عن طريق العديد من البرمجيات ، والثـاني عن طريق احد البرامج التـي تقوم بحل هذه المعادلات باستخدام لغة برمجية خاصة بها ، ومن هذه البرامج ، برنـامج (Matlab) الذي يوفر لنـا العديد من الطرق العددية لاستخدامها في ايجـاد. جذور اي معادلة خطية مهما كانت عالية الدرجة .

الفصل الاول

الجزء النظري

طريقة التحليل المثلثي (Triangular Factorization) :

تعتبر هذه الطريقة من احدى الطرق المرغوبة في ايجاد مجموعة حلول نظام معين للمعادلات الخطية ، ففي طريقة (كاوس) كانت الفكرة تحويل مصفوفة المعاملات الى مصفوفة مثلثيه ، ومن ثم نستخرج الحلول باستخدام قانون التعويض المتراجع . اما هذه الطريقة فهي تستخدم المصفوفات فقط لتحويل مصفوفة المعاملات الى مصفوفة مثلثيه

دون حساب عنصر معين والضرب بصف معين وتكرار العملية مرات عديدة ، لكن قانون التعويض المتراجع هنا يستخدم ايضا ، ولأجل توضيح هذه الطريقة سنحاول شرحها بشكل مختصر وكما يلي :

لنأخذ نفس منظومة المعادلات المشرحة سابقا :

$$2X_1 + 3X_2 - X_3 = 5$$
$$4X_1 + 4X_2 - 3X_3 = 3$$
$$-2X_1 + 3X_2 - X_3 = 1$$

لان لدينا المصفوفة المسماة بالقطرية والتي تكون جميع عناصرها اصفار عدا عناصر قطرها فهي تساوي واحد ، أي انها مصفوفة مربعة ، وعليه ولهذا المثال ستكون المصفوفة القطرية المناسبة كما يلي ولنطلق عليها اسم (L_1) :

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

والمصفوفة الخاصة بالمعاملات والنواتج (A) هي كما يلي :

$$A = \left.\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right.$$

الان وحسب طريقة (كاوس) نحتاج الى تصفير العنصرين (a_{31} , a_{21}) وهما العددان (-٢ ،٤) على التوالي ، فكنا نحتاج العددين :

$((-a_{21} / a_{11}) = -2 \quad , \quad (-a_{31} / a_{11}) = 1)$

للضرب ، لكن وفي هذه الطريقة نضع العددين في محلهما لكن في المصفوفة القطرية (L_1) ونضرب المصفوفة الناتجة بالمصفوفة (A) أعلاه ستنتج لدينا المصفوفة التي نتجت . في طريقة كاوس بعد عمليات الضرب والجمع المذكورة فيها ، وكما يلي :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 6 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

المصفوفات Matrix: عبارة عن مجموعة من الاعداد الحقيقية او المعقدة او منهما معا مرتبة على شكل صفوف واعمدة بشكل مستطيل

المصفوفة التي تمتلك m من الصفوف و n من الاعمدة تدعى من درجة m x n وتكتب بالشكل

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

فمثلا المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 5 \\ \sqrt{3} & 2+i & 4 \end{bmatrix}$ هي مصفوفة من الدرجة 2×3

اذاكانت

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & \sqrt{2} \\ \ln 4 & 2 & e^3 \end{bmatrix}$$

$$a_{11} = 1, a_{12} = -3, a_{13} = \sqrt{2}, a_{21} = \ln 4, a_{22} = 2, a_{23} = e^3$$

جمع وطرح المصفوفات: لجمع او طرح. مصفوفتين او اكثر فإننا نجمع او نطرح العناصر المتناظرة وفي هذه الحالة يجب ان تكو المصفوفات من الدرجة ذاتها فمثلا

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -3 & 4 \\ -6 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+(-5) & -2+1 \\ 0+(-3) & 1+4 \\ 4+(-6) & 3+(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -3 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-(-2) \\ 2-1 \\ 3-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ضرب المصفوفة بثابت: اذا ضُربت بثابت معين **c** فان جميع عناصرها تُضرب بهذا الثابت فمثلا

$$2\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times 3 & 2\times(-2) \\ 2\times 0 & 2\times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ضرب مصفوفتين: يمكن ضرب مصفوفتين اذا كان عدد الاعمدة في الاولى يساوي عدد الصفوف في الثانية فاذا كانت المصفوفة A

من الدرجة. m×n والمصفوفة.B من الدرجة.n×r فان المصفوفة **C=A.B تكون من الدرجة** m×r ويمكن التعبير عن حاصل ضرب المصفوفتين Aو B كما يلي:

$$C_{ij} = \sum_{K=1}^{n} a_{ik}.b_{kj}$$

حيث. عنصر في المصفوفة C و i=1,2,3,...,m and j=1,2,3,...,r

ان عملية ضرب مصفوفتين ليست أبدالية اي انه ليس من الضروري ان يكون. A.B=B.A

مثال (1) جد. B.Aو A.B(ان امكن) اذا كان

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & -\sqrt{2} & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & \sqrt{2} \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

A.B= $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & -\sqrt{2} & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & \sqrt{2} \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 2\times 3 + 0\times(-2) + 1 + 4 & 2\times(-1) + 0\times\sqrt{2} + 1\times(-3) \\ -4\times 3 + (-\sqrt{2})\times(-2) + 5\times 4 & -4\times(-1) + (-\sqrt{2})\times\sqrt{2} + 5\times(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -5 \\ 8+2\sqrt{2} & -13 \end{bmatrix}$$

B.A= $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & \sqrt{2} \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & -\sqrt{2} & 5 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 3\times 2 + (-1)\times(-4) & 3\times 0 + (-1)\times(-\sqrt{2}) & 3\times 1 + (-1)\times 5 \\ (-2)\times 2 + \sqrt{2}\times(-4) & (-2)\times 0 + \sqrt{2} + (-\sqrt{2}) & (-2)\times 1 + \sqrt{2}\times 5 \\ 4\times 2 + (-3)\times(-4) & 4\times 0 + (-3)\times(-\sqrt{2}) & 4\times 1 + (-3)\times 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 10 & \sqrt{2} & -2 \\ -4-4\sqrt{2} & -2 & -2+5\sqrt{2} \\ 20 & 3\sqrt{2} & -11 \end{bmatrix}$$

مبدلة المصفوفة. Transpse of a Matrix :

اذا كانت لدينا مصفوفة A من الدرجة. m×n فان مبدلة.A تكون من الدرجة.n×mويرمز لها برمز. **A^T** ويمكن الحصول عليها بأبدال الصفوف بالاعمدة فمثلا اذا كانت لدينا

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 6 & 3 & -9 \end{bmatrix} \rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \\ -3 & -9 \end{bmatrix}$$

المصفوفات خاصة Special matrices

المصفوفة المربعة. Square matrix :

هي المصفوفة من الدرجة. اي تتساوى فيها عدد الصفوف مع الاعمدة كالمصفوفة

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 9 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

المصفوفة القطرية. Diagonal Matrix :

وهي مصفوفة مربعة جميع عناصرها اصفار ماعدا عناصر القطر الرئيسي كالمصفوفة

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

المصفوفة التافهة Null matrix :

وهي مصفوفة مربعة جميع عناصرها اصفار

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ ونكتب A=0

* اذا كان. A.B=0 فليس من الضروري ان تكون احدى المصفوفتين صفرا فمثلا اذا كانت

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 6 & 3 & -9 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 4 & -6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A.B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 6 & 3 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 4 & -6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+4-6 & 18-6-12 \\ 6+12-18 & 54-18-36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

مصفوفة الوحدة. Unit matrix :

وهي مصفوفة مربعة جميع عناصرها اصفار ماعدا عناصر القطر الرئيسي فانها تساوي 1 ونرمز لهذا بالرمز I

$$I4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},, \quad I3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},, \quad I2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

*ان .حاصل ضرب مصفوفة الوحدة باي مصفوفة اخرى من نفس الدرجة يساوي المصفوفة نفسها اي.

A.I=I.A=A

المحددة للمصفوفة المربعة. Determinant of Square Matrix :

اذا كانت. مصفوفة مربعة فأنها تمتلك محددة ونرمز لهذا بالرمز. Det(A) او .|A| وتحسب كما يلي

*اذا كانت. من درجة 2×2 و. $A = \begin{bmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{bmatrix}$ فان. $\det(\mathrm{A}) = \mathrm{a11} \times \mathrm{a22} - \mathrm{a21} \times \mathrm{a12}$

**اذا كانت. من الدرجة 3×3 و. $A=\begin{bmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{bmatrix}$

$$\det A = a11\begin{bmatrix} a22 & a23 \\ a32 & a33 \end{bmatrix} - a12\begin{bmatrix} a21 & a23 \\ a31 & a33 \end{bmatrix} - a13\begin{bmatrix} a21 & a22 \\ a31 & a32 \end{bmatrix}$$

$$= a11(a22\times a33 - a23\times a32) - a12(a21\times a33 - a31\times a23)$$
$$+a13(a21\times a32 - a31\times a22)$$

ويمكن حسابها بطريقة اخرى وكما يلي.

$$A=\begin{bmatrix} a11 & a12 & a13| & a11 & a12 \\ a21 & a22 & a23| & a21 & a22 \\ a31 & a32 & a33| & a31 & a32 \end{bmatrix}$$

$$\det A = (\,a11\times a22\times a33) + (a12\times a23\times a31) + (a13\times a21\times a32)$$
$$-(a13\times a22\times a31) - (a11\times a23\times a32) - (a12\times a21\times a33)$$

مصفوفة مثلثية سفلى. Lower triagubr matrix :

هي مصفوفة جميع عناصرها الواقعة فوق القطر الرئيسي اصفار $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

مصفوفة مثلثية. عليا upper triagubr matrix :

هي مصفوفة جميع عناصرها الواقعة. تحت القطر الرئيسي. اصفار. $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

ملاحظات

- **اذا كانت المصفوفة مكونة من عمود واحد تسمى (متجه عمودي)**

$$V=\begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \end{bmatrix}$$

- **اذا كانت المصفوفة مكونة من صف واحد تسمى (متجه صفي او افقي)**

$$\boldsymbol{w} = [\mathbf{1} \quad \mathbf{2} \quad \mathbf{3} \quad \mathbf{4}]$$

الفصل الثاني

طريقة الاحليل المثلثيtriangular Dccomposition :

في طريقة كأوس للحذف لحل المنظومة الخطية:

$$AX=b. \qquad (11)$$

من مربعة الى مثلثية ثم اجرينا عملية التعويض Aحولنا المصفوفة
التراجعي لإيجاد الحل،ولو فرضنا بعد فترة زمنية

ثم تغيير متجه الجهة اليمنى فقط فأننا نحتاج الى اجراء نفس العمليات
Bوالمتجه. Aالتي اجريت سابقا على المصفوفة.

ولأننا لم نحتفظ بهذا الاجراءات فأننا سنضطر الى اعادتها حتى على
وقد يتكرر ذألك اكثر من مرة ولأجل خزن هذا الاجراء نعرض ، Aالمصفوفة.
طريقة التحليل المثلثي.

في هذه الطريقة نحلل مصفوفة المعاملات. الي حاصل ضرب مصفوفتين
مثلثين سفلية وعلوية فتصبح المعادلة (11) بالصورة:

$$Lux=b. \qquad (12)$$

الى المثلثية العليا Uتشير الى المصفوفة المثلثية السفلى، Lحيث
مع التركيز على ان LUولذألك يطلق على هذه الطريقة اسم طريقة.
تكون عناصر القطر لاحدي المصفوفتين هي الوحدة

بصورة مصفوفات تكون المعادلة (12) بالشكل:

(13)

الفكرة هي ان نستفيد من الصورة المثلثية للمصفوفات فهي تسهل عملية ايجاد الحل كما راينا في طريقة كأوس للحذف وعليه نضع

$Y=Ux.$ (14)

فتصبح المعادلة (12)

$LY=b.$ (15)

نحل بالنسبة الى yوعودة الى المعادلة.(14) حيث:

$Ux=y.$

ونحلها بالنسبة الى. Xوكون. Yمعلومة بهذا نكون قد اجرينا عملية التعويض مباشرة في المعادلة(15) وعملية تعويض تراجعي في المعادلة(14)

لنصع Uو. L نعم الحلقة المفقودة هي كيفية الحصول على عناصر. امامنا صورة المصفوفات للمعادلة

LU=A. (16)

الخطة العامة هي ان نجد عمود من. Lثم صف من. Uبالتبادل وابتداءا من العمود الاول والصف الاول

فلإيجاد عناصر العمود الاول من. .Lنضرب صفوف. Lبالعمود الاول من. U ،فينتج.

ثم نجد عناصر الصف الاول من. Uبضرب الصف الاول من. Lبأعمدة. Uبدءا من العمود الثاني فينتج،

ولأجل ايجاد عناصر العمود الثاني من. Lنضرب صفوف. L(بدءا من الصف الثاني)بالعمود الثاني من. Uفينتج،

اما لإيجاد عناصر الصف الثاني من. Uفأننا نضرب الصف الثاني من. L بأعمدة. Uبدءا من العمود الثالث فيكون

$L_{21}u_{13}+l_{22}u_{23}=a_{23}. \rightarrow u_{23}.=(a_{23}-l_{21}u_{13})/l_{22}$

$L_{21}u_{14}+l_{22}u_{24}=a_{24}. \rightarrow u_{24}.=(a_{24}-l_{21}u_{14})/l_{22}$

:

$L_{21}u_{1n}+l_{22}u_{2n}=a_{2n}. \rightarrow u_{2n}.=(a_{2n}-l_{21}u_{1n}))/l_{22}$

بصورة عامة فان:

$U_{2j}.=(a_{2j}-l_{21}u_{1j})/l_{22}. \quad , \quad j=3,\ldots,n.$ (21)

وعلى نفس المنوال نستخرج عناصر كلا المصفوفتين. Lو. Uوفيما يلي خوارزمية التحليل المثلثي. LUالمصفوفة Aبحجم n×n

: LUخوارزمية التحليل المثلثي.

1-لكل. I =1,…,n

2- l(I,1)=a(I,1).   انتهى i

3-لكل. J =1,…,n

4-.U(1,j)=a(1,j)/(1,1)l

5-لكل. J=2,…,n

6-لكل I =j,…,n

7- K =1,…,j-1

8-   S1=S1+l(I,k)*u(k,j)   انتهى. K

9-L(I,j)=a(I,j)-s   انتهى i

10- u(j,j)=1.

11-لكل. I=j+1,…,n

12-لكل K=1,…,j-1

13- S2+S2+l(j,k)*u(k,j)   انتهى k

14-u(j,i)=(a(j,i)-S2)/l(I,j)   انتهى   .I, انتهى .j.

مثال. 5:[8]

$$\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x1\\ x2\\ x3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12\\ 11\\ 2\end{bmatrix}$$

نقوم بتحليل مصفوفة المعاملات Aفنجد

$l11 = 3, l21 = 1, l31 = 2,$

$u12 = -\frac{1}{3}, u13 = \frac{2}{3},$

$l22 = 2 - (1)\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{7}{3}, l32 = -2 - (2)\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{4}{3},$

$$u23 = \frac{3-(1)\left(\frac{2}{3}\right)}{\frac{7}{3}} = 1, l33 = -1 - 2\left(\frac{2}{3}\right) - \left(-\frac{4}{3}\right)(1) = -1$$

اذن يكون

$$L = \begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 1 & \frac{7}{3} & 0\\ 2 & -\frac{4}{3} & -1\end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

وبصورة مدمجة يكون

$$L, U = \begin{bmatrix}3 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ 1 & \frac{7}{3} & 1\\ 2 & -\frac{4}{3} & -1\end{bmatrix}$$

اما الحل فاولا نضع

Ly=b

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{7}{3} & 0 \\ 2 & -\frac{4}{3} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y1 \\ y2 \\ y3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 11 \\ 2 \end{bmatrix}$$

وبالتعويض المباشر نجد ان $y1 = 4, y2 = 3\,, y3 = 2$

الان نحل y=Ux بالنسبة الى. x: اي

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

وبالتعويض التراجعي ينتج $x1 = 3, x2 = 1, x3 = 2$

الصورة السابقة للتحليل تسمى طريقة دولتل (Doolittle) وهناك صورة اخرى هي ان تكون عناصر قطر المصفوفة Uهي عناصر الوحدة فتكون A=LU بالشكل

(23)

وتدعى هذه الصورة بطريقة كراوت(Crout)

ان عملية الارتكاز الجزئي في طريق LUيمكن ان تجري لكنها اكثر تعقيدا مما يمكن عليه في طريقة كاوس للحذف

مثال 5:

لتكن، $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

الخطة العامة المعتمدة هي انه بعد ايجاد اي عمود من عمود L نقوم بتبديل الصفوف للمصفوفتين L,A وذالك اعتمادا على العنصر الموجود في القطر الرئيسي للمصفوفة L اي نضع العنصر الاكبر في العمود الجديد كعنصر قطري في L

نسجل ترتيب المصفوفة في المتجه T=(1,2,3)

وهذا يمثل الترتيب الاصلي يكون العمود الاول من Lهو:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(باعتماد اسلوب دولتل)لذا نحتاج ان نبادل الصفين الاول مع الثالث فيصبح المتجه Tبالشكل (1,2,3)= Tونجد الصف الاول من Uوهو [1،0،1/3] ثم نجد العمود الثاني من Lوهو:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

اذن نحتاج ان نبادل الصفين الثاني مع الثالث في كل من L,Aفيصبح $T = (3,1,2)$ هي

ونجد الصف الثاني من Uوهو $[0 \; 1 \; \frac{1}{2}]$ واخيرا نحسب $_{33}$افيكون 1/3-،اذن تكون الصورة النهائية حيث $T = (3,1,2)$ هي:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A = LU = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

اذا كان $b^T = [5 \ -1 \ -2]$ حيث. A_x=b, فاننا نرتب عناصر Bبحسب الترتيل المعطى في Tفيكون $b^T = [-2 \ 5 \ -1]$ وتحل المنظومة كما في السابق بتعويض تقدمي ثم بتعويض تراجعي

Ux=y , .Ly=b

ويعطي $X^T = [-1,2,1]$

وحدانية التحليل المثلثي uniqueness of LU decomposition

يمكن ان يكون هناك اكثر من زوج من المصفوفات المثلثية(علوية سفلية)تكون تحليلا للمصفوفة. الا انه يوجد زوج واحد(من كل من صيغتي دولتي او كراوت) يكون فيه احدى المصفوفتين ذات قطر واحدي (اي عناصر قطرها الوحدة الوحدة)

نفرض ان كل من LU,LU تحليل مثلثي المصفوفة Aبحيث ان اما كل من U, Uلها قطر واحدي او ان كل من L,Lلها قطر واحدي

LU=A=LU

ومنها فان

$$L^{-1}2L1U1U^{-1}2 = L^{-1}2L2U2U^{-1}1$$

او

. $L^{-1}2L1 = U2U^{-1}1$ (.24)

وحيث ان معكوس مصفوفة مثلثية هوة مصفوفة مثلثية من نفس النوع وان حاصل ضرب مصفوفتين مثلثتين من نفس النوم هوة مصفوفة مثلثية من نفس النوع فان الجه اليسار في (24)هي مصفوفة مثلثية سفلية وجهة اليمين هي مصفوفة مثلثية علوية

وهذا لايمكن الا اذا كانت المصفوفتين اليمين واليسار هي مصفوفات قطرية متساوية، D

الان نفرض ان المصفوفتان L1,L2لهما اقطار واحدية واضح ان:

L1=L2=D

ان العناصر القطرية المصفوفة. L_2 لابد ان تكون هي نفسها العناصر القطرية لمصفوفة. D وهي بالتاكيد مساوية للعناصر القطرية للمصفوفة. L_1

.: D هي مصفوفة الوحدة

$U_1 = U_2$, $L_2 = L_1$:.

العلاقة بين طريقة كاوس للحذف والتحليل المثلثي LU

اذا دققنا النظر فيما يحدث المصفوفة. عند تصفير العناصر تحت القطرية طريقة كاوس للحذف نجد مايلي،عند تصفير العمود الاول نستخدم مصفوفة لوحدة ذات عمود اول يحمل عوامل الضرب المستخدمة في التصفير

وبصورة تفصيلية

$$Ln-1\ Ln-2 \dots L1A = A^{n-1} \qquad (29)$$

واضح ان A^{n-1} هي المصفوفة المثلثية العلوية الناتجة عن تصفير المثلث السفلي للمصفوفة A

وبوضع

$L_{n-1}L_{n-2} \dots L_1 = L^{-}$

و. $A^{(n-1)}=U$

فان. (29) تصبح

$L^{-} A=U.$,

يعني ان. $(L^{-})^{-1}U= A$

فاذا وضعنا $(L^{-})^{-1} =L.$

فان $A =LU$.

ان المصفوفة Lهي مصفوفة مثلثية سفلية ذالك. لان

$L=(L^{-})^{-1}$

$=(L_{n-1}\ L_{n-2} \dots L_1)^{-1}$

$=L_1^{-1}\ L_2^{-1} \dots L_{n-1}^{-1}$

وبما ان معكوس مصفوفة سفلية وحاصل ضرب مصفوفتين مثلثية سفلية،هي مثلثية سفلية فان Lتكون مثلثية سفلية.

```
S=0;

For i=n-1: -1:1

   For j-i+1:n

      S=s+a(I,j)*x(j);

    End

    X(i)-a(i,n+1)-s/a(i,i);

     S=0;

End

X'

% answer -

%n=3

%x=

%6.9500000000000

%2.5000000000

%0.1500000000
```

```
% LU Decomposition (factorization) : triangularization
```

الاستنتاج $AX = b$ يمكن ايجاد الحل العددي لاي نظام خطي من الشكل
. - بطريقة التحليل المثلثي وذلك بالاسلوب المتبع في هذا البحث
٢ - الى مصفوفة A يمكن ايجاد اكثر من طريقة لايجاد التحليل لمصفوفة المعاملات
مثلثية عليا و دنيا (L,U)
٣ - مقارنة بالطرق العددية الاخرى المستخدمة في حل النظام الخطي تعتبر طريقة التحليل المثلثي طريقة مطولة لايجاد الحل العددي رياضيا

لتوصيات

١.يوصي الباحثان بان يكون هناك توسع اكثر في دراسة طريقة التحليل المثلثي من حيث تضمين امثلة تحل بالطريقة الذكورة.

٢.التوسع بالبحث عن انواع طرق التحليل المثلثي من حيث الاسلوب المتبع لايجاد L,U

٣.اذا كانت هناك طرق عددية اخرى متاحة لحل النظام الخطي من الشكل $AX=b$ يفضل استخدامها بدلا من طريقة التحليل لانه حسب ما ذكرنا انه طريقة التحليل المثلثي طريقة مطولة مقارنة بباقي الطرق العددية.

٤.اغناء طلبة الرياضيات بالمفاهيم الاساسية التي يحتاجونها لحل الانظمة الخطية عدديا باستخدام الماتلاب.

وبهذا أختم بحثي المتواضع عن ايجاد حل العددي باستخدام طريقة التحليل المثلثي فقد تطرقت في الفصل الأول عن التحليل المثلي والمصفوفة و انواعها وتعريفها وفي الفصل الثاني عن طريقة التحليل المثلثي و وحدانية التحليل المثلثي ، ونود أن نشكر الأستاذ الطيب والخلوق أستاذ ساجد وليد على أشرافه على بحثي هذا، والشكر أيضا ل الكادر التدريسي في كلية التربية المقداد ، وآمل أن اكون ببحثي هذا قد شكلت صورة واضحة عن هذا المفهوم الواسع ...

في الختام لا يسعنا الا أن نسأل

الله عز وجل تحقيق الفائدة من هذا

البحث ونتمنى أنه لقي استحسانكم.

المراجع

- سعد المريمي (1993)، مبادئ التحليل العددي، الدار العربية للنشر.
- علي محمد إبراهيم ومحمد ماهر علي النجار (1992)، التحليل العددي، منشورات دار الفاتح، (مترجم).
- علي محمد صادق سيفي وابتسام كمال الدين (1986)، مبادئ التحليل العددي ، جامعة بغداد.

- Ahlberg, J.H., E.N. Nilson, and J.L. Walsh (1967); The Theory of Splines and their Applications, Academic Press, New York.
- Atkinson, K.E. (1989); An Intoduction to Numerical Analysis, John Wiley & Sons, Inc .
- Bittinger, M.L., and Beecher, J.A., (2006) ; Introductory and Intermediate Algebra, 3rd addition, Addison Wesley.
- Burden, R.L. and J.D. Faires (1985); Numerical Analysis, Prindle, Weber & Schmidt.
- Gerald, C.F. (1978); Applied Numerical Analysis, Addison Wesley .
- Kadhum, N.I. Ph.D. (1988); The Spline Approach to the Numerical Solution of Parabolic Partial Differential Equations .
- Kolman, B. (1982); Elementary Linear Algebra, Macmillan Publishing Co., Inc.
- Sauer, T. (2006); Numerical Analysis, Addison Wesley.
- Shanker Rao, G. (2007); mathematical methods, I.K, International Publishing House Pvt. Ltd.
- Smith, G.D. (1965); Numerical Solution of Partial Differeatial Equations, Oxford, London .

- Swokowski, E.W. (1991); Calculus, Prindle, Weber & Schmidt .
- Taylor, A.E. and W.R. Mann, (1972); Advanced Calculus, John wiley & Sons, Inc .
- Vedamurthy, V.N., and Iyengar, N.Ch.S.N. (2006); Numerical Methods, VIKAS Publishing House PVT LTS.