وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة ديالــــى

كلية التربية المقداد

قسم الرياضيات

الطرق العددية لإيجاد حل النظام الخطي

بحث تخرج مقدم الى مجلس كلية التربية المقداد / وهو جزء من متطلبات نيل شهادة البكالوريوس في الرياضيات

إعداد الطلبتان

منار فراس خميس   هبة حافظ يوسف

بإشراف

م.م. ساجد وليد عمران

١٤٤٣هـ   ٢٠٢٢م

بسم الله الرحمن الرحيم

قُلْ هَلْ يَسْتَوِي الَّذِينَ يَعْلَمُونَ وَالَّذِينَ لا يَعْلَمُونَ إِنَّمَا يَتَذَكَّرُ أُولُو الأَلْبَابِ

صدق الله العظيم

سورة الزمر الآية : (٩)

الإهداء

إلى . . . . من منحني السمع والبصر وتمام الخلقة

إلى . . . من منحني العقل والقلب والضمير

إلى . . . ربنا ورب كل شيء

اهدي هذا البحث بداية خالصة لأني توكلت على الله (جل وعلا)

إلى . . . من كلله الله بالهيبة والوقار . . . إلى من علمني العطاء دون انتظار . . . والدي العزيز

إلى ملاكي في الحياة . . . إلى الحب والأمان . . . إلى . . . التفاني والحنان . . . . أمي الغالية

إلى . . . من برفقتهم سعدت . . . . إخوتي الأعزاء

إلى مشرف بحثي . . . . م.م. ساجد وليد عمران

اهدي هذا الجهد المتواضع

والله ولي التوفيق

شكر و تقدير

الحمد لله الذي وهب الليل مظلما بقدرته وجاء بالنهار مبصرا برحمته . . . . .

تقدم بأسمى آيات الشكر والامتنان والتقدير والمحبة الى الذين حملوا اقدس رسالة بالحياة ، الى الذين مهدوا لنا طريق العلم والمعرفة الى جميع اساتذتنا الافاضل أساتذة قسم الرياضيات

كن عالما . . . فان لم تستطع فكن متعلما ، فان لم تستطع فاحب العلماء ، فان لم تستطع فلا تبغضهم

واخص بالشكر والتقدير الأستاذ الفاضل

(م.م. ساجد وليد عمران)

لما قدمه لي من تشجيع لإنجاز هذا البحث

المحتويات

الملخص

يتناول هذا البحث موضوع ايجاد الحل العددي لنظام من المعادلات الخطية باستخدام طريقتين عدديتين وهي طريقة كاوس للحذف (Guess elimination method) وطريقة كاوس للحذف والارتكاز الجزئي (Guess elimination with partial pivoting) وقد استخدمنا نظام (MATLAB) لايجاد الحلول العددية لنظام من المعادلات الخطية باستخدام الطرق العددية اعلاه حيث يتصف نظام ال(MATLAB) بالدقة والسرعة العالية وبذلك يساعد على اختراق الوقت بشكل كبير

Abstract

This research deals with study of numerical situation of system of linear equation by using two methods (Guess elimination method) and (Guess elimination with partial pivoting method)

The numerical stations of this equation had been found by using MATLAB which has ability approaches to the solution in high speed and accuracy and less possible time.

المقدمة

كثيراً ما تتحول المشكلة الرياضية من المعادلات الخطية من مجهولين او اكثر كالتي تنتج من حل المعادلات الجزئية او مسائل القيم الذاتية وفي هذا البحث سوف يتم دراسة بعض الطرائق لحل نظام nX_n من المعادلات الخطية في الصورة:

$$aA_{11}X_1 + a_{11}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n = b_1$$
$$aA_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2n}X_n = b_2$$
$$aA_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + \cdots + a_{nn}X_n = b_n$$

والذي يمكن كتابة على شكل $AX = b$ بشرط ان مصفوفة المعادلات A تكون غير شاذة اي ان $A \neq 0$ علماً ان النظام $AX = b$ يسمى نظام متجانس اذا كانت $b = 0$ ويسمى غير متجانس اذا كانت $b \neq 0$

وبعدها يتم استخدام نظام البرمجة (MATLAB) لإيجاد الحلول بالطرق العددية المعينة .

الفصل الاول: المفاهيم الاساسية

في هذا الفصل سوف نتعرف على كيفية حل انظمة المعادلات الخطية من الشكل

$$a_{11}X_1 + a_{11}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n = b_1$$

$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2n}X_n = b_2 \qquad (1.1)$$

$$a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + \cdots + a_{nn}X_n = b_n$$

وعلى كيفية انشاء النظام الخطي $AX = b$ من هذه المعادلات وكذلك دراسة بعض الخصائص المصفوفة من المعادلات A ومتى يكون النظام حل وحيد او اكثر من حل ومت يكون ليس للنظام حل

١-١ حلول انظمة المعادلات الخطية

ليكن لدينا نظام من المعادلات الخطية بهذا الشكل

$$a_{11}X_1 + a_{11}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n = b_1$$

$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2n}X_n = b_2$$

$$a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + \cdots + a_{nn}X_n = b_n$$

بالنسبة للمجاهيل $i = 1,2, \dots \dots, n, x_i$ حيث ان a_{ij} و b_i من اجل $i, j =$ $1,2, \dots \dots, n$ اعداد حقيقية

لانظمة المعادلات الخطية (١-١) علاقة بالكثير من التطبيقات العلمية والطبيعية والهندسية وكذلك لها علاقة ببعض المسائل في التحليل العددي حيث انها تنشأ اثناء حل المعادلات التفاضلية العادية والجزئية

هناك بعض العمليات الحسابية المسموح بها والتي لا تؤثر على حل النظام الخطي (١-١) فأنه يمكن التلخيص بهذه العمليات التالية:

١- تبديل معادلتين كل مكان الاخرى، ترمز لهذه العملية بالرمز $E_1 \leftrightarrow E_j$

٢- ضرب المعادلة E_1 بالعدد $y \neq 0$ ووضع المعادلة الناتجة محل المعادلة E_1، نرمز لهذه العملية بالرمز $yE_1 \to E_1$

٣- ضرب المعادلة E_1 بالعدد $y \neq 0$ واضافة ذلك المعادلة E_1 ووضع الناتج محل المعادلة E_1 بالرمز لهذه العملية $E_j + E_1 \to E_j$

نظرية (**١-١**)

اذا تم الحصول على نظام خطي من نظام خطي اخر باستخدام العمليات السابقة فأن هذين النظامين يكونان متساويان

مثال١

الانظمة الخطية التالية متساوية

$$x_1 + x_2 = 1 \quad (1,2)$$

$$x_1 - x_2 = 1 \quad (1,3)$$

و $$2x_1 + 2x_2 = 2 \quad (1,4)$$

و $$x_1 - x_2 = 1$$

$$x_1 + x_2 = 1$$

$$-2x_2 = 0$$

من الواضح ان الحل للنظام الخطي $(1,4)$ هو $x_1 = 1$ و $x_2 = 0$ والذي هو حل للنظامين الخطيين $(1,2)$ و $(1,3)$ وحيث ان النظام الخطي الاخير يتم الحصول عليه من

النظامين الاخرين فان هذا يدل على ان اجراء العمليات الحسابية المذكورة سابقاً على النظام الخطي (١-١) لم يغير من قيمة الحل

في الواقع بعض الطرائق وهي تحويل النظام الخطي من شكله العام (١-١) الى اشكال مساوية يسهل حلها يطلق على هذه الطرائق اسم الطرائق المباشرة نذكر منها كاوس للحذف وكَاوس جوردن والتي يتم استخدامها لايجاد حل (فعلي) للنظام الخطي متأثراً بأخطاء التدوير

ويمكن استخدام المصفوفات كأداة فعالة لتمثيل انظمة المعادلات الخطية وعليه ذلك فانه كبداية مناسبة لدراسة الانظمة الخطية فأننا سوف نتطرق على بعض التعاريف والنظريات الاساسية في علم المصفوفات

١-٢ المصفوفة الجبرية

تعريف $(1,1)$

المصفوفة A هي عبارة عن ترتيب مستطيل من الاعداد تكون مرتبة على شكل مصفوفة اعمدة

تعريف $(2,1)$

اذا كانت المصفوفة A تحتوي على m صف و n عمود فأنه يقال ان المصفوفة A من النوع $m \times n$ ويرمز لها بالرمز $Am * n$ اذا كانت $m = n$ فان المصفوفة تكون مربعة اذا كانت A مصفوفة فان عادة تستخدم الرموز a_{ij} , $(A)_{ij}$, $A_{(ij)}$ للاشارة الى عناصر المصفوفة عند تقاطع الصف i مع العمود j، عادة تكتب المصفوفة A من النوع $m \times n$ بالشكل

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

مثال $(2,1)$

١- اذا كانت $y = 2 \ \ , \ \ A = 2\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

$$yA = 2\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -4 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$

٢- لتكن $B = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 4 & 2 & 10 \end{bmatrix} \ , \ A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

فأن: $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 4 & 2 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 9 & -1 \\ 6 & 3 & 15 \end{bmatrix}$

٣- عين المصفوفات المتساوية فيما يلي:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \ , \ B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \ , \ A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

بما ان $a_{ij} = b_{ij}$ لكل $i, j = 1,2,3$ فان $A = B$ ولكن $A \neq C$ ولذلك لان $a_{23} \neq c_{23}$

٤- $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \ , \ A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

فأن حاصل الضرب $C = AB$ يكون

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ -5 & 5 \end{bmatrix}$$

هناك مصفوفات اصلة سوف تحتاج لها اثناء استخدام الطرائق المباشرة والتكرارية لحل نظام خطي $(1,1)$ كما موضح فيما يلي:

تعريف $(3,1)$

١- يقال ان المصفوفة U من النوع $n \times n$ مصفوفة مثلثية عليا اذا كان $u_{ij} = 0$ لكل $i > j$ اي ان عناصر المصفوفة والتي تقع تحت القطر تكون اصفار

٢- تسمى المصفوفة L من النوع $n \times n$ مصفوفة مثلثية دنيا اذا كان $i,j = 0$ عندما $i < j$ هذا يعني ان كل عناصر المصفوفة تقع فوق القطر مساوية للصفر

٣- المصفوفة القطرية $D = (dij) = 0$ من النوع $n \times n$ هي المصفوفة التي عناصرها تحقق $dij = 0$ لكل $i \neq j$ اذا كانت $dij = 1$ من اجل $i = 1,2,3,\dots,n$ فأن المصفوفة القطرية في هذه الحالة تسمى مصفوفة احادية ويرمز لها بالرمز $1n$ المصفوفة احادية الخاصية التالية: $1nA = A_I$

وسوف نقوم في هذا البحث بحل النظام المعادلات الخطية من شكل (١-١) باستخدام الطرائق العددية طريقة كاوس للحذف وطريقة كاوس للحذف والارتكاز الجزئي

الفصل الثاني: حلول انظمة المعادلات الخطية

اولاً: طريقة كاوس للحذف

الفكرة الرئيسية لطريقة كاوس للحذف لحل النظام الخطي هي تستخدم بعض العمليات المسموح بها لكتابة بالشكل المثلثي المساوي:

حيث ان $Ax = b$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

مصفوفة مثلثية عليا ومتجهي العمود

$$x = \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix} \qquad b = \begin{matrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{matrix}$$

والذي يمكن حله بسهولة استخدام التعويض الخلفي

$$[A:b] = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \dots \dots \dots & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ 0 & a_{22} \dots \dots \dots & a_{2n} & \vdots & b_2 \end{matrix}$$
$$\begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \cdots & a_{33} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n3} \end{bmatrix} \vdots \begin{bmatrix} a_{3n} & \cdots & \vdots\, b_3 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nn} & \cdots & \vdots\, b_n \end{bmatrix}$$

وهكذا فان بعد انجاز المرحلة $(k-1)$ نكون حصلنا على

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \dots \dots \dots & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ 0 & a_{22} \dots \dots \dots & a_{2n} & \vdots & b_2 \end{matrix}$$
$$[A:b] = \begin{bmatrix} \vdots & \cdots 0 \\ 0 & \cdots 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{kk} \\ a_{nk} \end{matrix} \begin{bmatrix} a_{3n} & \cdots & \vdots\, b_3 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nn} & \cdots & \vdots\, b_n \end{bmatrix}$$

اذا كان عنصر الارتكاز $a_{kk}^{(k)}$ لا يساوي الصفر فأن يمكن انجاز العمليات الحسابية $\left(E_{j-m}\,jkEk\right) = E_j$ حيث ان $m_{jk} = \frac{a}{a_{kk}}$، من اجل $j = k+1, k+2, \ldots, n$ لحذف X_k من المعادلات E_j من اجل $j = k+1, k+2,2, \ldots, n$، اما اذا كان $a_{kk}^{(k)} = 0$ فانه لا يمكن اجراء العمليات الحسابية، وذلك لعدم التمكن من حساب m_{jk} والاسلوب المتبع في هذه الحالة هو البحث عن عنصر في العمود k يقع تحت القطر ولا يساوي الصفر اذا كان $a_{kk}^{(k)} \neq 0$، حيث $k+1 \leq p \leq n$ فأننا ننجز تغيير مواقع الصفين $(Ek \leftrightarrow Ep)$ ومن ثم نتابع الحذف كما سبق.

اما اذا كان $a_{pk}^{(k)} = 0$ لكل $p = k+1, k+2,2, \ldots, n$ فان هذا يعني انه لا يوجد وحيد لهذا النظام الخطي وتتوقف العمليات الحسابية اذا تمت جميع العمليات بنجاح فان المصفوفة الموسعة تأخذ الشكل:

$$
\begin{array}{llll}
a_{11} & a_{12} \ldots\ldots\ldots & a_{1n} \vdots & b_1 \\
0 & a_{22} \ldots\ldots\ldots & a_{2n} \vdots & b_2
\end{array}
$$

$$
[A:b] = \begin{bmatrix} \vdots & \cdots 0 \\ 0 & \cdots 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{kk} \\ a_{nk} \end{matrix} \begin{bmatrix} a_{3n} & \cdots & \vdots\, b_3 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nn} & \cdots & \vdots\, b_n \end{bmatrix}
$$

والتي تمثل نظام المعادلات الخطية

$$
\begin{array}{lll}
a_{11}x_1 + a_{12}x_{12} + \cdots \ldots\ldots & + a_1 n \times n & = b_1 \\
\quad a_{22}x_2 + \cdots \ldots\ldots & + a_{11} n \times n & = b_2 \\
\qquad \vdots & \qquad \vdots & \ \vdots \\
\qquad a_{nn} & \qquad x_n & = b_n
\end{array}
$$

المساوي للنظام الخطي الاصلي يمكن استخدام التعويض الخلفي لايجاد الحل $x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$، نشير هنا الى اننا لم نكتب الرموز الدالة على تغيير العناصر a_{ij} لعدم الحاجة لها

اخيراً نذكر $a_{nn}^{(n)} = 0$ فان هذا يعني ان طريقة الحذف قد تمت ولكن لا يوجد للنظام الخطي حل وحيد

خوارزمية طريقة كاوس للحذف:

نستخدم هذه الخوارزمية طريقة الحذف الكاوسي والتعويض الخلفي لحل النظام الخطي $A_x = \mathrm{b}$ اذا اعطينا عدد المجاهيل n عناصر المصفوفة A والمتجه b فان الخوارزمية تحسب الحل x للنظام الخطي

الخطوة ١: من اجل $k = 1,2, \dots, n-1$ اعمل الخطوات 2 الى 4

الخطوة ٢: ابحث على اصغر عدد موجب L وبحيث ان $m_{jk} \neq 0$ و $k \leq 1 \leq n$ اذا لم يوجد عدد صحيح يحقق ذلك فاطبع (لا يوجد حل وحيد) قف

الخطوة ٣: اذا كان $k \neq 1$ فبدل مواضع الصفين $1, k$ كل مكان الاخر

الخطوة ٤: من اجل $i = k+1, k+2, \dots, n$ اعمل الخطوات 5 الى 9

الخطوة ٥: احسب $m_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}$

الخطوة ٦: ضع $a_{jk} = 0$

الخطوة ٧: احسب $b_i = b_i - m_{ik} b_k$

الخطوة ٨: من اجل $j = k+1, k+2, \dots, n$ احسب $a_{ik} = a_{ij} - m_{ik} a_{kj}$

الخطوة ٩: اذا كان $a_{nn} = 0$ فاطبع (لا يوجد حل وحيد) قف

الخطوة ١٠: احسب $x_n = \frac{nb}{a_{nn}}$

الخطوة ١١: من اجل $i = n-1, n-2,$

احسب $m_{ik} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - I_j^n = i + 1 a_{ij} x_j\right]$

الخطوة ١٢: اطبع الحل x

يوضح المثاليين التاليين خطي انه في حالة فشل الخوارزمية $(2,1)$ يكون هناك احتمالين الاول منهما هو وجود عدد لا نهائي من الحلول للنظام الخطي المراد حله، اما الاحتمال الثاني فهو عدم وجود حل على الاطلاق، وفي كلتا الحالتين تكون مصفوفة المعاملات للنظام الخطي شاذة، اي لا يوجد حل وحيد كما اسلفنا

مثال/ $(\mathbf{2,2})$ اعتبر النظام الخطي

$$x_1 + x_2 - x_3 = 1$$

$$2x_1 - 2x_2 + x_3 = 3$$

$$3x_1 - x_2 = 4$$

والذي مصفوفته الموسعة هي:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1: & 1 \\ 0 & -4 & 1: & 3 \\ 0 & 0 & 0: & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1: & 1 \\ 0 & -4 & 3: & 1 \\ 0 & 0 & 3: & 1 \end{bmatrix}$$

والمصفوفة الاخيرة تمثل النظام الخطي المثلثي

$$x_1 - x_2 - x_3 = 1$$

$$-4x_2 + x_3 = 1$$

$$0 = 0$$

وهذا يعني انه لدينا معادلتين بثلاث مجاهيل من المعادلة الثانية نحصل على $x_2 = 1/4[1 - 3x_3]$

وبما ان لا يمكن حساب قيمة معينة ل x_3 وانها يمكن ان نأخذ اي قيمة بين $-\infty$ و $+\infty$ فانه يوجد عدد لا نهائي من الحلول للنظام الخطي

مثال/ $(2,3)$ اعتبر النظام الخطي

$$x_1 + x_2 - x_3 = 1$$
$$2x_1 - 2x_2 + x_3 = 3$$
$$3x_1 - x_2 = 5$$

وبايجاز العمليات الحسابية المتعلقة بالحذف الكاوسي حصلنا على النظام الخطي المثلثي

$$x_1 + x_2 - x_3 = 1$$
$$-4x_2 + x_3 = 1$$
$$0 = 1$$

والذي منه يتضح ان المعادلة الثالثة غير منطقية في مثل هذه الحالات لا يوجد لدينا اي حل للنظام الخطي

مثال/ استخدم طريقة كاوس للحذف:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$
$$x_1 + 2x_3 = 1$$
$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2$$

الحل: اولاً نكتب نظام المعادلات بصيغة $Ax = B$ حيث ان:

A: هي مصفوفة المعاملات في النظام الخطي

x: مصفوفة المجاهيل

B: مصفوفة الثوابت

اي انه نظام المعادلات الخطية يكتب بالصيغة التالية:

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\1 & 0 & 2\\2 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

والان باستخدام المصفوفة التي تكتب بالصيغة التالية: $[A:B]$ اي انه

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\1 & 0 & 2\\2 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}\begin{matrix}r_1\\r_2\\r_3\end{matrix}$$

والان نستخدم العمليات السطرية على المصفوفة الموسعة لكي يتم تحويلها الى مصفوفة مثلثية عليا

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\1 & 0 & 2\\2 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}\begin{matrix}r_1\\r_2\\r_3\end{matrix}\qquad r_3-2r_2-r_3$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\1 & 0 & 2\\0 & -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}\qquad r_2=r_1-r_2$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\0 & 2 & -1\\0 & -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\-1\\0\end{bmatrix}\begin{matrix}r_1\\r_2\\r_3\end{matrix}\qquad r_3-2r_3+r_2$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\0 & 2 & -1\\0 & 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\-1\\-1\end{bmatrix}$$

والان من السطر الاخير بالمصفوفة العليا المتبعة نحصل على:

$$3x_3=-1\Rightarrow x_3=\frac{-1}{3}$$

والان من السطر الثاني نعوض x_3

$$2x_2-x_3=-1$$

$$2x_2 + \frac{1}{3} = -1$$

$$2x_2 = -1 - \frac{1}{3}$$

$$2x_2 = -\frac{4}{3} \;] \div 2$$

$$x_2 = -\frac{4}{6}$$

$$x_2 = -\frac{2}{3}$$

والان نعوض قيمة x_2, x_3 ونحصل على قيمة x_1

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$

$$x_1 + 2\left(-\frac{2}{3}\right) - \frac{1}{3} = 0$$

$$x_1 = \frac{1}{3} + \frac{4}{3}$$

$$x_1 = \frac{5}{3}$$

الحل النهائي للنظام الخطي المعطى باستخدام طريقة كاوس للحذف

$$x_1 = \frac{5}{3}$$

$$x_2 = \frac{-2}{3}$$

$$x_3 = \frac{-1}{3}$$

ثانياً: طريقة الحذف الكاوسي مع الارتكاز

لقد ذكرنا في البند السابق انه اذا كان عنصر الارتكاز $a_{kk}^{(k)}$ مساوياً للصفر لابد من تغيير مواقع الصفين $E \to E$ وذلك اذا كان $a_{kk}^{(k)}$ حيث $k + 1 \leq 1 \leq n$ مناقشتنا السابقة كانت ترتكز على الحقيقة ان العمليات الحسابية لحل النظام الخطي $(2,1)$ قد نفذت

باستخدام اعداد ذات ارقام عشرية غير منتهية ولكن من الناحية التطبيقية عادة نستخدم الامثلة التي توضح فشل الخوارزمية $(1,2)$ وذلك بسبب سيطرة التدوير على الحسابات المثال التالي يوضح احد هذه الحالات

مثال: $(3-2)$

المتجه $x = 10,\ 1$ هو الحل الوحيد للنظام الخطي:

$$\begin{bmatrix} 0.0003 & 1.566 \\ 0.3454 & -2.436 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.569 \\ 1.018 \end{bmatrix}$$

الان اذا استخدمنا اعداد ذات اربعة ارقام عشرية معنوية لتنفيذ طريقة كاوس للحذف والتعويض الخلفي لحل النظام فان يكون لدينا

$$m = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{0.3454}{0.0003} = 1151$$

وبانجاز العملية $(E - m_{21}E_1)$ نحصل على

$$\begin{bmatrix} 0.0003 & 1.566 \\ 0.3454 & -1804 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.569 \\ -1.018 \end{bmatrix}$$

ومنه نجد

$$x_2 = \frac{-1805}{-1804} = 1.151$$

و

$$x_1 = \frac{1}{0.0003}[1.569 - (1.566)(1.001)] = 3.333$$

وبالتالي هناك فرق كبير بين الحل الفعلي والحل العددي $x = [3.333, 1.001]$ ويتضح ذلك في الشكل $(3-1)$ الذي يتضمن مواقع الحلين في الفضاء R^2

خوارزمية الارتكاز الجزئي:

اذا اعطينا عدد المجاهيل n عناصر A والمتجه b فأن الخوارزمية تستخدم الارتكاز الجزئي اثناء الحذف الكاوسي

ملاحظة: $kcol$ هو العمود k في طريقه الحذف الكاوسي

١- $Apivot = A_{kcol,kcol}$

٢- $Ipivot = kcol$

٣- $k_1 = kcol + 1$

٤- من اجل $irow = k, k_{1+2}, \ldots, n$ اعمل الخطوات 5 الى 6

٥- $A_{max} = a_{irow,irow}$

٦- اذا كان $\left(A_{max} > A_{pivot}\right)$ فضع $A_{pivot} = A_{max}$,$I_{pivot} = Irow$

٧- اذا كان $\left(I_{pivot} = kcol\right)$ فاكتب (لا حاجة لتغيير الصفوف) قف

٨- من اجل $i = kcol + 1, \ldots, n$ اعمل الخطوات 9 الى 11

٩- $save = a_{kcol,i}$

١٠- $a_{kcol,i} = a_{Ipivot}$

١١- $a_{Ipivot} = save$

١٢- $save = b_{kcol}$

١٣- $b_{kcol} = b_{ipivot}$

١٤- $b_{ipivot} = save$

١٥- نفذ الحذف الكاوسي مع التعويض الخلفي باستخدام خوارزمية $3-1$

مثال: باستخدام طريقة كاوس للحذف مع الارتكاز الجزئي حل نظام المعادلات التالية:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$

$$x_1 + 2x_3 = 1$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2$$

الحل: في البداية نحول النظام المعادلات الخطية بصيغة $Ax = B$ حيث ان

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

والان باستخدام المصفوفة التي تكتب بالصيغة التالية $[A:B]$ اي انه

$$[A:B] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

الخطوة الاولى: نبحث عن اكبر قيمة في العمود الاول والسطر المصاحب لتلك القيمة يصبح السطر الاول في المصفوفة الموسعة

نلاحظ ان العمود الاول في المصفوفة الموسعة تحتوي على $(2,1,2)$ والقيمة المطلقة $(2,1,2)$ والتي هي القيمة المصاحبة للسطر الثالث

اذا سوف نغير السطر الاول مع السطر الثالث لكي نحصل على المصفوفة الجديدة

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

لكي يتم الخطوة الاولى من الحل لهذه الطريقة تقوم بتغيير القيم التي تحت القيمة (2) باستخدام العمليات السطرية المعروفة

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{matrix} \qquad r_3 = r_2 - r_3$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad r_2 = 2r_1 - r_2$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{matrix} \qquad r_3 = 2r_1 + r_3$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

والان من السطر الاخير للمصفوفة نحصل على:

$$3x_3 = 1 \Longrightarrow x_3 = \frac{1}{3}$$

والان من السطر الثاني للمصفوفة العليا نحصل على:

$$-x_2 + 2x_3 = 0$$

$$-x_2 + 2\,\frac{1}{3} = 0$$

$$-x_2 = -\frac{2}{3} \Longrightarrow x_2 = \frac{2}{3}$$

والان نعوض قيمة x_2, x_3 ونحصل على قيمة x_1

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2$$

$$2x_1 + \frac{2}{3} + 2\,\frac{1}{3} = 2$$

$$2x_1 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 2$$

$$2x_1 = 2 - \frac{4}{3}$$

$$2x_1 = \frac{2}{3} \;] \div 2$$

$$x_1 = \frac{1}{3}$$

∴ الحل النهائي للنظام الخطي المعطى باستخدام طريقة الحذف الكاوسي مع الارتكاز :−

$$x_1 = \frac{1}{3}$$

$$x_2 = \frac{2}{3}$$

$$x_3 = \frac{1}{3}$$

الجانب العملي

Gauss Elimination Method

Clear, clc;

For mat Long

N = input ('n = 1')

$A = [4 - 95;\ 2\ \ - 4\ 63;\ -1\ 3\ 4]$

$for\ j = 1{:}\ n - 1$

$for\ i = j + 1\ :\ n$

$M =\ a(i,j)/\ a(i;\ j);$

$for\ k = 1\ :\ n + 1$

$A(i,k) = a(1,k) - m * a(j,k);$

End

$If\ a(n,n) =\ 0$

$Break$

End

$X(n) = a(n,n + 1)/a(n,n);$

$S = 0$

$for\ i = n - 1{:} -1{:}\ 1$

$for\ j = i + 1{:}n$

$S = s + a(i,j) * x(j);$

End

$X(i) = a(i, n+1) - S/a(i,i)$

$S = 0;$

End

$X`$

$\% \; answer =$

$\% \; n = 3$

$\% \; X =$

$\% \; 6.9500000000000$

$\% \; 2.50000000$

$\% \; 0.150000000$

$Function \; x = gauss \; pivot(a, b)$

$\% \; gauss \; pivot(a, b)$

$\% \; solve \; ax = b \; using \; Gaussian \; elimination \; with \; pivoting$

$\% \; input$

$\% \; a = conff icient \quad matrix$

$\% \; b = right - hand \quad matrix$

$\% \; out \; put$

$\% \; x = solution \quad matrix$

$\% \; compute \; the \; matrix \; size$

$[m, n] = size(a)$

$If \; m = n, error('matrix \; a \; must \; be \; aquar'); end$

$Nb = n + 1$

$Aug = [a, b]$

$\%\ for\ ward\ elimination$

$for\ k = 1; n - 1$

$\%\ partial\ ivoting$

$[big, , i] = \max\left(abs\left(aug(k{:}n, k)\right)\right);$

$Ipr = i + k - 1;$

$if\ \ Ipr = k$

$\%\ pivot\ the\ rows$

$Aug = [k, ipr]; :] = aug[ipr, k];$

End

End

$\%\ break - Substitution$

$x = zeroes(n, 1);$

$X(n) = aug(n, n\ b)/aug(n, n);$

$for\ i = n - 1{:} -1{:} 1$

$X(i) = (aug(I, nb) - aug(i + 1{:} n) * x(i + 1{:} n))/aug(i, i);$

End

الاستنتاجات والتوصيات

١- يعتبر برنامج (MATLAB) عالي الكفاءة والسرعة في تنفيذ البرامج لكنه ليس من السهل تعلم لغته دون الممارسة المستمرة في تطبيق البرامج، لان ايعازات النظام متوفرة في ملف المساعدة التابع له والذي يتم تنصيبه مع النظام، ومع كل ايعاز هناك مثال مكتوب بالاضافة الى شرحه وكيفية استخدامه مع بيان كل المدخلات والمخرجات له لكنه يوفر جهداً كبيراً عند اتفاق البرمجة فيه

٢- كانت النتائج النظرية مطابقة للنتائج المستخرجة عند تطبيق البرامج عملياً وهذا يثبت صحة النظرية، وتوافق التطبيق معها. وهذا ما يميز النظام

٣- نظراً لكفاءة النظام ولتعدد الدوال والامكانيات التي يعالجها فمن المفيد جداً ان يقوم من يريد الاستمرار بالبحث ايجاد وبناء البرامج الخاصة بالطرق الاخرى في مادة الرياضيات والتحليل العددي، والتي بني النظام من اجلها

١- توصي الباحثتان بان يكون منهج مادة الحاسبات يتضمن جزء، اوسع واشمل لدراسة الجانب العملي

٢- ان يكون لمادة التحليل العددي جانب عملي لتطبيق الطرق العددية برمجياً

٣- التوسع في حل النظم الخطية باستخدام الماتلاب وبيان اهمية هذا التطبيق لدى الطلبة

المصادر

1- The math works in "MATLAB, The Language of Technical computing", fifth Edition P13.

2- NUMERICAL METHOD S for Mathematics Science and Engineering, and Ed, 1992, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, of 632, U.S.A.

3- kip D. Hauch. "A Guide to MATLAB", University of washing ton first Edition, p2

4- The websites: http://math.rice.edu. httP://mathworld.wollkan.com

٥- خطوات في احتراف Matlab موفق ياسر شما، دار مهرات للعلوم – حمص – سوريا، الطبعة الاولى ٢٠٠٧