وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة ديالى

كلية التربية المقداد

قسم الرياضيات

التبولوجيا العامة

General Topology

بحث مقدم إلى كلية التربية المقداد لغرض نيل شهادة البكالوريوس في قسم الرياضيات من قبل:

زهراء محمد أحمد   منتهى عبد الله حمد

بأشراف

م.م عبد الرحمن حميد نجم

1443 هـ   2022 م

(بِسْمِ اللَّـهِ الرَّحْمَـٰنِ الرَّحِيمِ)

«وَقُلِ اعْمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُمْ وَرَسُولُهُ وَالْمُؤْمِنُونَ وَسَتُرَدُّونَ إِلَى عَالِمِ الْغَيْبِ وَالشَّهَادَةِ فَيُنَبِّئُكُمْ بِمَا كُنْتُمْ تَعْمَلُونَ»

(التوبة - 105)

الأهداء

الـــى مـــن لا يضـــاهيهما احـــد فـــي الكـــون الـــى مـــن أمرنـــا الله ببرهمـــا الـــى مـــن بـــذلا الكثيـــر ، وقـــدما مـــا لا يمكـــن أن يُـــرد، إليكمـــا تلـــك الكلمـــات امـــي وابـــي الغاليـــان . الـــى مثـــال العطـــاء والكبريـــاء والتضـــحية اخـــواني واخـــواتي . الـــى اصـــدقاء الطـــرق الـــوعرة والســـهلة والمشـــرقة .أهـــدي إلـــيكم بحثـــي العلمـــي فـــي التبولوجيا العامة .

الشكر والتقدير

في البداية نحمد الله تعالى على أن وفقنا لإنجاز هذا البحث ،له الحمد والشكر ،ثم اود أن اشكر مشرفي ،الأستاذ **(عبد الرحمن حميد نجم)** الذي كانت خبرته لا تقدر بثمن في صياغة اهم مواضيع البحث .فقد دفعتني ملاحظاته الثاقبة الى صقل تفكيري ورفع عملي الى مستوى اعلى .

ثم أود ايضاً أن اشكر المعلمين في مسيرتي الدراسية على ارشاداتهم القيمة طوال فترة دراستي ،فقد زودتني ملاحظاتهم بالخبرة الصحيحة التي مكنتني من اختيار الاتجاه الصحيح واكمال رسالتي بنجاح . واخيراً ، لم يكن بامكاني اكمال هذه الرسالة بدون دعم اصدقائي الذين قدموا لي مشورات محفزة ودعم ،بالأضافة الى ايجاد فرص لجعلي سعيداً وواثقاً من نفسي لأراحة ذهني وفكري خلال انجاز هذا المشروع .

المحتويات

المقدمة

علم التبولوجي (Topology)

التبولوجي كلمة مترجمة من الكلمة الإنجليزية Topology ، وتنقسم كلمة التبولوجي إلى مقطعين المقطع الأول (Topo) التي تعود إلى أصل يوناني إلى (Topos) والتي تعني "مكان" (Place) ، والمقطع الثاني هو (Logy) والتي تعود لإصل يوناني (Logos) والتي تعني "دراسة" (Study) ، فلو قمنا بعملية ربط المعنيين في الكلمة ، لوجدنا أن التبولوجي هو الهندسة الحديثة في دراسة جميع التراكيب والمكونات للفضاءات المختلفة .

إذن يعرف علم التبولوجي :

هو أحد فروع علم الرياضيات والذي يهتم في دراسة تراكيب ومكونات وخصائص جميع الفضاءات المختلفة

بحيث تبقى هذه الخصائص متشابهة تحت عمليات التشكيل المتصلة (Smooth Deformations) دون أن يقوم بعملية تمزيق أو يترك فتحات في الإنتقال من أحدهما إلى الآخر وبالعكس أيضاً .

وكان التعريف يخبرنا أن الهندسة التي يتعامل بها التبولوجي ليست الهندسة التي نعرفها ، بل كأنها هندسة مطاطية ، ولكي يتضح المفهوم بشكل جيد ، لندرس الآتي :

من المعلوم لدينا أن المستوى الإقليدي في الهندسة الإعتيادية التي نعرفها ، أنه بإمكاننا أن نقوم بعملية نقل الأشكال من مكان إلى آخر عن طريق الإزاحة ، وبإمكاننا أيضاً أن نقوم بعملية دوران له وعكسه وقلبه ، ولكن لا نستطيع القيام بعملية ثني له أو القيام بعملية تمدد بشكل متصل .

تاريخ التبولوجي بشكل موجز :-

بدأ التفكير في التبولوجي من خلال مشكلة أويلر في المسألة المشهورة "الجسور السبعة في مدينة كونسبريك"

($\text{Seven Bridges of K}\ddot{o}nigsberg$) ، وكانت ورقة أويلر عام 1736 أول نتيجة على الفضاء التبولوجي .

أول من قدم مصطلح التبولوجي هم الألمان باسم " Topologie " عام 1847 بواسطة جوهان بندكت ، ومن ثم أظهر أصحاب التخصص في اللغة الإنجليزية أن كلمة Topologist هو كل شخص متخصص في التبولوجي .

أما التبولوجي الحديثة فتعمد بشكل قوي جداً على مفاهيم نظرية المجموعات التي أسست من قبل كانتور في أواخر القرن التاسع عشر .

قام عدة علماء بوضع تعاريف محددة له ، فقام العالم أسكولي وغيرهم بوضع أول تعريف للفضاء المتري الذي يعتبر حالة خاصة في التبولوجي حالياً في سنة 1906 .

وبعدها قام العالم هاوسدورف بوضع تعريف له والذي يعرف حالياً بفضاء هاوسدورف المشهور جداً في سنة 1914 . ولكن أتى العالم كزميرز كورتويسكي Kazimierz Kuratowski . سنة 1922 بوضع التعريف المعروف لدينا حالياً .

خصص هذا البحث لدراسة نوع من انواع الفضاءات التبولوجية حيث تطرقنا بالفصل الاول تقديم بعض المفاهيم والاساسيات عن الفضاء التبولوجي .

وفي الفصل الثاني عن الفضاءات المتكافئة والمتصلة .

الفصل الاول

المفاهيم الاساسية :

- التبولوجي
- المجموعات والمجموعات الجزئية
- العلاقات
- الدوال

الفصل الاول

مفاهيم اساسية (Basic concepts)

التوبولوجي (Topology): هو احد فروع الرياضيات الحديثة حيث أن نظرية المجموعات (set theory) تلعب دوراً رئيسياً في هذا المقرر. في حقيقة الامر فان نظرية المجموعات تعتبر لغة (Language) التوبولوجي. في هذا الباب نستعرض أهم المفاهيم الاساسية في نظرية المجموعات والتي سوف تستخدم خلال دراسة هذا المقرر. ولمزيد من المعلومات عن نظرية المجموعات على القارئ الرجوع لبعض مراجع الكتاب .

المجموعات والمجموعات الجزئية (1-1):(sets and subsets)

تعريف (1 .1 .1): (مفهوم كانتور للمجموعة)

المجموعة هي تجمع من الاشياء المعرفة تعريفاً تاماًَ وهذه الاشياء قد تكون متجانسة أو غير متجانسة ، ونعني بكلمة معرفة أننا نستطيع لأي شيء مهما كان أن نحدد هل هو موجود بالمجموعة أو لا .

الأشياء التي تتكون منها المجموعة تسمى عناصر المجموعة

(elements of the set) (1)

ونرمز عادةً للمجموعات بحروف لاتينية كبيرة (Capital Letters) ...... A , B , C ,......., X , Y)

ونرمز لعناصرها بحروف لاتينية صغيرة (small letters) ...... a , b , c , ... x, y)

نكتب $X = \{ a , b , c , d \}$ لتعني أن المجموعة X تتكون من أربع عناصر هي a , b , c , d وتوضع عناصر المجموعة بين قوسين من النوع { } ونكتب $x \in X$ لتعني أن العنصر x ينتمي الى (belongs to) المجموعة X كما أننا نكتب $y \notin X$ لنعني أن العنصر y ليس أحد عناصر المجموعةX أو لا ينتمي الى المجموعة X.

تعريف (1.1.2) : (المجموعات المنتهية وغير المنتهي_ finite and In finite set)

يقال أن المجموعة A منتهية اذا كانت تحتوي على عدد نهائي من العناصر (عدد محدد من العناصر) ، ويقال أيضاً انها مجموعة غير منتهية اذا كانت تحتوي على عدد لا نهائي من العناصر .

فيما يلي سوفى نذكر الرموز الشائعة الاستخدام لبعض المجموعات والتي سوف تستخدم خلال هذا المقرر :

1- مجموعة الاعداد الطبيعية (Natural Numbers) وهي :

$$N = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , \ldots\ldots \}$$

2- مجموعة الأعداد الصحيحة (Integer Numbers) وهي :

$$Z = \{ 0 , \pm 1 , \pm 2, \ldots\ldots \}$$

3- مجموعة الأعداد القياسية (Rational Numbers) وهي :

$$Q = \{\frac{a}{b} \quad : a \in Z \quad , \quad b \in N\}$$

4– مجموعة الأعداد الصحيحة غير السالبة (Non– negative Numbers) وهي:

$$Z^{+} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\ldots\}$$

5– مجموعة الأعداد الحقيقية (Real Numbers) يرمز لها بالرمز R .

6– مجموعة الأعداد المركبة (Complex Numbers) وهي :

$$C = \{X = a + i\, b : a, b, \in R \,;\, i = \sqrt{-1}\}$$

<u>تعريف: (1.1.3): المجموعة الخالية</u> (The empty set)

المجموعة الخالية هي المجموعة التي لا تحتوي على أي عنصر ويرمز لها بالرمز ' Ø '

وقد تكتب { } .

<u>تعريف:(1.1.4): المجموعات الجزئية</u> (Subset)

يقال أن المجموعة A مجموعة جزئية (Subsets) من المجموعة B اذا كان كل عنصر من عناصر A ينتمي الى المجموعة B ونكتب $A \subseteq B$ وتقرأ A مجموعة جزئية من المجموعة B وقد تكتب $B \supseteq A$ ويقال أن B تحتوي (contains) المجموعة A (أو تتضمن المجموعة A) .

ونعبر عن ذلك رياضياً على النحو التالي : $A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in B)$

وهذا يكافئ أن : $\forall x \in B \Rightarrow x \in A$

<u>تعريف (1.1.5): تساوي المجموعات</u> (Equality)

يقال أن المجموعتان A , B متساويتان اذا كانتا تحتويان على نفس العناصر وتكتب A = B أي أن . A تساوي B اذا كان كل عنصر منتمي الى A ينتمي الى B وكذلك كل عنصر منتمي الى B ينتمي الى A . ونعبر عن التساوي رياضياً على النحو التالي $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \;\&\; B \subseteq A)$

الرمز ⟺ يعني "(اذا وفقط اذا كان (if and only if)" وقد تكتب " iff " أي أن " ⟺ تعني تكافئ التقديرين .

<u>تعريف (1.1.6):</u>

يقال أن المجموعة A مجموعة جزئية فعلية (proper Subset) من المجموعة B (وتكتب $A \subset B$) اذا كان : $A \neq B$ ، $A \subseteq B$. ونكتب $A \not\subset B$ لتعني أن A ليست مجموعة جزئية من B نلاحظ أن $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$

<u>تعريف (1.1.7) : المجموعة الشاملة</u> (Universal set) المجموعة الشاملة هي المجموعة غير الخالية والتي تحتوي على جميع المجموعات الجزئية في مسألة ما تحت الاعتبار . فمثلاً عند دراسة مجموعات من الاعداد الصحيحة فأنه يوجد مجموعة شاملة وهي في هذه الحالة المجموعة Z . ونرمز للمجموعة الشاملة بالرمز U .

تعريف(1.1.8) : الاتحاد (Union)

اتحاد المجموعتين A , B يعرف على أنه المجموعة المكونة من جميع العناصر التي في المجموعة A أو في المجموعة B ويرمز لها بالرمز A U B

أي أنه $A \cup B = \{ x \in U : x \in A \text{ or } x \in B \}$

ونلاحظ أن: $x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A \text{ and } x \notin B$

تعريف (1.1.9) : التقاطع (Intersection)

تقاطع المجموعتان A , B هي المجموعة التي تتكون من العناصر المشتركة بين المجموعتين A , B .

ويرمز $A \cap B$ وتقرأ A تقاطع B ونعبر عن ذلك رياضياً كالتالي .

$$A \cap B = \{ x \in U : x \in A \text{ and } x \in B \}$$

ونلاحظ أن : $x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A \text{ or } x \notin B$

تعريف : (1.1.10) : الانفصال (The disjoint)

يقال أن المجموعتين A , B غير متقاطعتين (منفصلتان) اذا لم يوجد بينهما عناصر مشتركة . أي اذا تحقق ان

$A \cap B = \emptyset$

نظرية (1.1.1):

لأي ثلاث مجموعات A , B , C القوانين التالية صحيحة :

(i) $A \cup \emptyset = A ; A \cap \emptyset = \emptyset$ (ii) $A \subseteq A \cup B ; B \subseteq A \cup B$

(iii) $A \cap B \subseteq A ; A \cap B \subset B$ (iv) $A \cup A = A ; A \cap A = A$

(V) $A \cup B = B \cup A ; A \cap B = B \cap A$

(Vi) $(A \cup B) \cup \subset = A \cup (B \cup C) ; (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(Vii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

(V iii) $A \cup C\ (\bigcap_{i \in i} B_i) = \bigcap_{i \in I}(A \cup B_i)$;

$A \cap (\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I}(A \cap B_i)$, $Bi \subseteq U$

$\bigcap_i A_i = \{ X \in U : X \in Ai : \text{ for every } i \in I \}$ حيث

$\bigcap_i A_i = \{ X \in U = X \in Ai \text{ for some } i \in I \}$

I تسمى مجموعة الدليل

تعريف (1.1.1): الفرق بين مجموعتين (The defference between two sets)

اذا كانت المجموعتان A , B جزئيتين من المجموعة الشاملة U . فإننا نعرف الفرق (The difference)

ويرمز له بالرمز A – B على أنه المجموعة الجديدة .

$A - B = \{ x : x \in A \text{ and } x \notin B \}$

وكذلك نعرف $B - A = \{ x : x \in B \text{ and } x \notin A \}$

ملاحظة (1.1.1) :

يلاحظ أنه على وجه العموم $A - B \neq B - A$

تعريف (1.1.12) : مكملة المجموعة (Complement of a set)

نفرض أن U هي المجموعة الشاملة ، ونفرض $A \subseteq U$. مكملة المجموعة A بالنسبة الى المجموعة الشاملة U هي المجموعة التي عناصرها جميع عناصر المجموعة الشاملة U ما عدى العناصر المنتمية للمجموعة A. يرمز لها بالرمز A^c ونعبر عنها رياضياً كما يلي :

$$A^c = \{ x \in U : x \notin A \} = U - A$$

نظرية (1.1.2) :

لأي مجموعتين A , B من المجموعة الشاملة U الآتي صحيح :

(i) $\emptyset^c = U$ (ii) $U^C = \emptyset$ (iii) $(A^c)^c = A$

(iv) $A \cap A^c = \emptyset$; $A \cup A^c = U$

(v) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$; $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

(vi) $A - B = A \cap B^c$

(vi) $U - \bigcap_{i\in I} B_i = \bigcup_i (U - B_i)$, $U - \bigcup_{i\in I} B_i = \bigcap_i (U - B_i)$

ويجب أن نلاحظ أنه اذا كانت $I = \emptyset$ فإن :

$$\cap Ai = U \,,\ Ai = \emptyset \,,\quad Ai \subseteq U$$

القانونان في (V) يسميان قانوني ديمورجان (De−morgan's Laws).

تعريف (1.1.13) : مجموعة القوة (The power set)

اذا كانت X مجموعة ، فان مجموعة القوة للمجموعة X هي المجموعة التي عناصرها جميع المجموعات الجزئية الممكنة من المجموعة X ويرمز لها بالرمز (P (X. أي أن : $P(X) = \{ A : A \subseteq X \}$

تعريف(1.1.14): الفترات (Intervals)

نفرض I مجموعة جزئية من R . يقال أن I فترة من خط الأعداد الحقيقية R .

إذا كان لكل $x, y \in I$, $x < z < y$ فأن $z \in I$

لأي $a , b , \in R$ نعرف المجموعات التالية :

(i) $(a , b) = \{ x \in R \ a < x < b \}$

تسمى فترة مفتوحة (open interval)

(ii) $[a , b] = \{ x \in R : a \leq x \leq b \}$

تسمى فترة مغلقة (closed interval)

(iii) $(a , b] = \{ x \in R : a < x \leq b \}$

(iv) $[a , b) = \{ x \in R : a \leq x < b \}$

تسمى نصف مفتوحة (half open) أو نصف مغلقة (half closed)

خط الأعداد الحقيقية هو الفترة المفتوحة $(- \infty , \infty)$.

نكتب $x > a$ لتعني $X \in (a , \infty)$ ونكتب $x \geq a$ لتعني $x \in (a , \infty)$.

بند (1−2) : العلاقات : Relations

تعريف (1.2.1) : حاصل ضرب الكارتيزي (Cartesian product)

حاصل الضرب الكارتيزي (أو الديكارتي) للمجموعتين A , B " ويرمز لها بالرمز $A \times B$ " يعرف على أأنه

مجموعة جميع الازواج المرتبة (a , b) حيث أن $a \in A$, $b \in B$ أي أن

$A \times B = \{ (a, b) : a \in A , b \in B \}$ بالمثل يمكن تعريف حاصل الضرب الكارتيزي

للمجموعات A1 , A2 , ------An

بالصورة $\prod_{i=1}^{n} A_i = \{ (a_1 , a_2 , \ldots\ldots\ldots a_n , \ldots\ldots) \ a_i \in A_i \}$

ايضا $\prod_{i=1}^{\infty} A_i = \{ (a_1 , a_2 , \ldots\ldots\ldots a_n , \ldots\ldots) : a_i \in A_i \}$

نظرية (1.2.1):

اذا كانت X هي المجموعة الشاملة ، $A , B , C , \subseteq X$ فإن

(1) $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$

(2) $A \times B \neq B \times A$ (حيث $A \neq \emptyset$ ، $B \neq \emptyset$)

(3) $A \times B = B \times A \Leftrightarrow A = B$

(4) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

(5) $(A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) = (A_1 \cap B_1) \times (A_1 \times B_2)$

$\forall \ A_1 , A_2 , B_1 , B_2 \subseteq X$

في الحالة الخاصة عندما A = B فانه يمكن تعريف حاصل الضرب الديكارتي للمجموعة A في نفسها بالصورة : A

$A^2 = A \times A = \{ (a , b) : a , b , \in \}$

تعريف (1.2.2) :

نفرض أن المجموعتين A , B اذا كانت $\delta \subseteq A \times B$

فأن δ تسمى علاقة ثنائية (Binary Relation) من A الى B ، ونكتب $(a , b) \in \delta$ أو $a \, \delta \, b$ لتعني ان العنصر a مرتبك بالعنصر b تحت تأثير العلاقة δ كما نكتب $(a,b) \notin \delta$ لتعني أن العنصر a غير مرتبط مع العنصر b وفق العلاقة δ في الحالة الخاصة اذا كانت $\delta \subseteq A \times A$ فإننا نقول أن δ علاقة ثنائية على المجموعة A . اذا كانت δ علاقة ثنائية على المجموعة A فإن

$\delta^{-1} = \{ (b , a) \in A^2 : (a , b) \in \delta \}$

تسمى بالعلاقة العكسية للعلاقة δ

المجموعة $\Delta = \{ (a , a) : a \in A \}$ تسمى قطر المجموعة A^2

تعريف (1.2.3) :

نفرض δ علاقة ثنائية على المجوعة A فأن :

1- يقال أن العلاقة δ عاكسة (Reflexive) اذا كان $(x , x) \in \delta$ لكل $x \in A$ وبصورة اخرى اذا كانت $\Delta \subseteq \delta$.

2- يقال أن العلاقة δ متماثلة (symmetric) اذا كان $(x ,y) \in \delta$ فأن $(y , x) \in \delta$ لكل $x,y \in A$ بصورة اخرى اذا كانت $\delta = \delta^{-1}$.

3- يقال أن العلاقة δ متعدية (ناقلة) (transitive) اذا كان

$(x , y) \in \delta , (y , z) \in \delta$ فان $(x , z) \in \delta$ لكل $x , y ,z \in \delta$,

4 – يقال أن العلاقة متخالفة (anti symmetric) اذا كان

$(x , y) \in \delta$ ، $(y , x) \in \delta$ فأن $x = y$ بصورة اخرى اذا كانت

$\delta \cap \delta^{-1} \subseteq \Delta$

تعريف (1.2.4):

العلاقة δ تسمى علاقة تكافؤ (equivalence relation)

اذا كانت عاكسة ومتماثلة ومتعدية . في هذه الحالة اذا كانت $x \, \delta \, y$.

نقول أن العنصر x يكافئ العنصر y ونكتب $x \approx y$ بدلاً من $x \, \delta \, y$.

فصل التكافؤ الممثل بالعنصر a هو مجموعة كل العناصر المكافئة للعنصر $a \in A$ (مجموعة العناصر من A المرتبطة بالعنصر a وفق علاقة التكافؤ δ)

ويرمز له بالرمز [a] أي أن : $[a] = \{ x \in A : x \, \delta \, a \}$

تسمى مجموعة فصول التكافؤ بمجموعة القسمة (quotient set) ويرمز لها بالرمز A / δ أي أن

$$A/\delta = \{ [a] : a \in A \}$$

نظرية (1.2.2):

اذا كانت δ علاقة تكافؤ على المجموعة A فأن :

1) $a \in [a], \ \forall \ a \in A$

2) $a \ \delta \ b \iff [a] = [b]$

3) $a \ \delta \ b \iff [a] \cap [b] \neq \emptyset$, ($a \neq b$ حيث)

نظرية (1.2.3):

مجموعة فصول التكافؤ $A \ / \ \delta$ لعلاقة التكافؤ δ المعرفة على المجموعة A تشكل تجزيئاً للمجموعة A أي أن فصول التكافؤ غير متقاطعة مثنى مثنى واتحادها يساوي المجموعة A . ويجب أن نلاحظ أن عكس النظرية صحيح ، أي اذا كانت $p = \{ p_i \}_{i \in I}$ عائلة من المجموعة الجزئية A غير متقاطعة مثنى مثنى واتحادها يساوي A فأنها تعرف علاقة تكافؤ δ على A بالصورة :

$$a \ \delta \ b \iff \exists \ p_i \in p : a, b \in p_i$$

فصول تكافؤها تتطابق مع عناصر التجزئ أي e عناصر العائلة p .

تعريف (1.2.5):

تسمى العلاقة δ بعلاقة ترتيب جزئي(partial order relation)
على المجموعة A اذا كانت عاكسة ومتخالفة ومتعدية . في هذه الحالة نكتب $a \leq b$ بدلاً من $a \ \delta \ b$ ونقول أن b اكبر أو يساوي a أو b يلي a .إذا كانت $\leq$ علاقة ترتيب جزئي على المجموعة A فنقول أن A مرتبة جزئياً .

تعريف (1.2.6)

تسمى المجموعة A مرتبة كلياً (totally order)اذا كانت المجموعة A مرتبة جزئياً واي عنصرين فيها متقارنين (العنصرين a,b متقارنين إذا كان $a \leq b$ أو $a \geq b$) وفي هذه الحالة نكتب $(A, \leq)$ للدلالة على علاقة الترتيب الكلي مجموعة الاعداد الحقيقية مع علاقة الترتيب الطبيعية $\leq$ هي مجموعة مرتبة جزئياً وفيها اي عنصرين متقاربين كذلك علاقة الاحتواء"$\subseteq$" المعرفة على $P(X)$ هي علاقة ترتيب جزئي وعلى هذا فإن $(R,\leq)$ مرتبة كلياً بينما $(P(X), \subseteq)$ مرتبة ترتيباً جزئياً .

تعريف (1.2.7):

اذا كانت $(A \ ، \ \leq)$ مجموعة مرتبة كلياً فإننا نقول أن المجموعة A مرتبة تماماً أو مرتبة ترتيباً حسناً (well ordered set) اذا كانت أي مجموعة جزئية وغير خالية من A تحتوي عنصر أصغر .

تعريف (1.2.8):

لتكن $(x \ ، \ \leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً ، $S \subseteq X$

يقال أن العنصر $L \in X$ حد علوي (upper bound) للمجموعة S اذا تحقق

$$x \leq L ; \ \forall \ x \in S$$

ويقال أن العنصر $\ell \in X$ حد سفلي (Lower bound) للمجموعة S اذا تحقق

$$x \leq \ell; \ \forall \ \ x \in S$$

تعريف (1.2.9):

يقال للمجموعة $S \subseteq X$ أنها محدودة من الأعلى (bounded from above) اذا كان لها حد علوي، ويقال أنها محدودة من الاسفل (bounded from below) اذا كان لها حد سفلي . ويقال للمجموعة S انها محدودة (bounded) إذا كانت محدودة من اعلى واسفل .

ملاحظة(1.2.1):

يلاحظ انهإذا كان للمجموعةS حد علوي فإنه يوجدعدد لا نهائي من الحدود العلوية ، واصغر هذه الحدود يسمى اصغر حد علوي للمجموعة S . وإذا كان للمجموعة S حد سفلي فإنه يوجد لها عدد لا نهائي من الحدود السفلية واكبرهذه الحدود يسمى اكبر حد سفلى المجموعة S .

فيما يلي سوف نسرد التعريف الرياضي لأصغر حد علوي واكبر حد سفلي .

تعريف (1.2.10):

يقال أن العنصر L_0أصغر حد علوي (supremum) للمجموعة $S \subseteq X$

اذا تحقق :

(i) L_0حد علوي للمجموعة S

(ii) لا يوجد للمجموعة S حد علوي أصغر منL_0. أي أنه اذا كان L حد علوي للمجموعة S فإن

$L_0 \leq L$.

نرمز لأصغر حد علوي للمجموعة S بالرمز L_0= sup S .

أي أن L_0= sup S اذا تحقق :

(i) اذا كان $x \leq L_0$، لجميع قيم $x \in S$

(ii) لكل $\varepsilon > 0$ يوجد S X بحيث أن $x > L_0 + \varepsilon$

تعريف (1.2.11):

يقال إن M قيمة عظمى (maximum) للمجموعة $S \subseteq X$ ونكتب (M = m a x S) اذا تحقق :

(i) M حد علوي للمجموعة S (ii) $M \in S$.

ويقال أن m قيمة صغرى أو عنصر أصغر(maximum) للمجموعة $S \subseteq X$ ونكتب (m = min S) اذا تحقق :

(i) m حد سفلي للمجموعة S (ii) $m \in S$.

نظرية (1.2.3):

اذا وجدت القيمة العظمى (الصغرى) فإن القيمة العظمى (الصغرى) للمجموعة S هي أصغر حد علوي (أكبر حد سفلي) لهذه المجموعة .

البرهان :

لتكن M هي القيمة العظمى للمجموعة S . أذاً من التعريف M حد علوي واذا كانت L حد علوي للمجموعة فإن M $\le$ L وذلك لأن $M \in S$ وبالتالي يكون M هو أصغر حد علوي للمجموعة S .

بالمثل يمكن برهنة أن القيمة الصغرى للمجموعة S هي أكبر حد سفلي للمجموعة S .

ملاحظة (1.2.1):

النظرية السابقة تنص على أنه اذا وجدت القيمة العظمى M والقيمة الصغرى m للمجموعة S فأن

. M = inf S , M = sup S

بديهة (1.2.1) زورون : (Zorn's Lemma)

اذا كانت A مجموعة غير خالية ومرتبة جزئياً وكانت المجموعات الجزئية من A والمرتبة كلياً محدودة من أعلى (أسفل) فإن المجموعة A تحتوي على عنصر أكبر (أصغر) .

الدوال (1−3): (Functions)

تعريف (1.3.1) :

الدالة او (الراسم) هي علاقة من المجموعة غير الخالية X الى المجموعة غير الخالية Yبحيث أن كل عنصر في X يرتبط بعنصر وحيد فيY.

ونكتب $f : X \to Y$ لتعني أن f دالة منX الى Y . كما نكتب $y = f(x)$ أو $(x, y) \in f$ لتعني أن العنصر y الذي ينتمي الى المجموعةY هو صورة العنصر x الذي ينتمي الى المجموعة X تحت تأثير الدالة أو الراسم f . ويقال أن المتغير y دالة في المتغير x . x تسمى بالمتغير المستقل ، y تسمى بالمتغير التابع . وعليه فإن f تكون دالة من المجموعة X الى المجموعةYy اذا تحققت :

لكل عنصر $x \in X$ بحيث $(x, y) \in f$ ، $(x, z) \in f$ ، فإن $y = z$

المجموعة X تسمى نطاق تعريف الدالة f أو باختصار نطاق (domain) الدالة ويرمز لها Df والمجموعة Y تسمى النطاق المصاحب (co−domain) للدالة عناصر المجموعة Y والمرتبطة بعناصر من المجموعة X تحت تأثير الدالة f تسمى هذه (range) الدالة ، ويرمز لهذه المجموعة بالرمز $f(X)$ أو Rf ، أي أن :

$$Rf = \{ f(x) : \forall \ x \in X \}$$

وعليه فإن الدالة هي علاقة بين متغيرين متغير مستقل ومتغير تابع ، وتسمى الدالة في هذه الحالة دالة المتغير الواحد (single variable function) والدوال ذات المتغير الواحد والتي نطاقها المصاحب مجموعات جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية R تسمى بالدوال الحقيقية ذات المتغير الحقيقي الواحد .

وعليه اذا كانت $y = f(x)$ فإن نطاق الدالة f هو قيمx الحقيقية التي تجعل قيمة الدالة $f(X)$ حقيقية . اما مدى الدالة فهو القيم الحقيقية التي تأخذها الدالة $f(x)$.واذا لم يذكر نطاق الدالة f فأننا نعتبر نطاقها هو اقصى مجموعة جزئية ممكنة من مجموعة الأعداد الحقيقية R والتي عناصرها x تجعل قيم الدالة $f(x)$ حقيقية .

تعريف (1.3.2):

يقال أن المجموعة الجزئية A من مجموعة الأعداد الحقيقية R متماثلة حول النقطة الأصل اذا تحقق :

$$\forall \quad x : x \in A \Rightarrow -x \in A$$

تعريف (1.3.3)

يقال أن الدالة $f : A \to B$ دالة زوجية (even function) اذا كان نطاقها متماثل حول نقطة الأصل وتحقق $:f(-x) = f(x);\ \forall x \in A$

ونلاحظ ان منحنى الدالة الزوجية يكون متماثلاً حول محور الصادات .

ويقال ان الدالة $\boldsymbol{f}: A \to B$ دالة فردية (odd function) اذا كان نطاقها متماثل حول نقطة الاصل وتحقق:

$$\boldsymbol{f}(-x) = \boldsymbol{f}(x)\ ;\ \forall x \in A$$

وعليه فان منحنى الدالة الفردية يكون متماثلاً حول نقطة الاصل .

تعريف (1.3.4):

يقال أن الدالة $f : A \to B$ أنها تزادية (increasing) اذا حققت :

$$\forall\ X_1, X_2 \in A : X_1 < X_2 \Rightarrow f(X_1) \leq f(X_2)$$

ويقال للدالة $f:A \to B$ أنها تناقصية (decreasing) اذا حققت :

$$\forall\ x_1, x_2 \in A :\ x_1 < x_2 \Rightarrow \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_1}) \geq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_2})$$

ويقال للدالة $f : A \to B$ أنها تزايدية فعلاً أو مطردة الزيادة . (monotonic increasing)

اذا حققت : $\forall\ X_1, X_2 \in A : X_1 < X_2 \Rightarrow f(X_1) < f(X_2)$

ويقال للدالة $f : A \to B$ أنها تناقصية فعلاً أو مطردة النقصان (monotonic decreasing) اذا حققت :

$\forall\ X_1, X_2 \in A : X_1 < X_2 \Rightarrow f(X_1) > f(X_2)$ تعريف (1.3.5)

يقال إن L حد علوي للدالة $f : A \to B$ اذا كان L حد علوي لحدي الدالة Rf .

أي أن

$$y \leq L\ ;\ \forall\ y \in Rf$$

ويقال أن ℓ حد سفلي للدالة f اذا كان ℓ حد سفلي لمدى الدالة R f .

أي أن $y \geq \ell;\ \forall\ y \in Rf$

اذا كان للدالة حد علوي فإننا نقول أن الدالة محدودة من الأعلى واذا كان للدالة حد سفلي فإننا نقول أن الدالة محدودة من الاسفل . الدالة $\boldsymbol{f}$ تكون محدودة اذا كانت محدودة من أعلى ومن أسفل . أي أن الدالة $\boldsymbol{f}$ تكون محدودة اذا وجد ℓ, L بحيث أن $\boldsymbol{\mathcal{L}} \leq y \leq L\ ;\ \forall\ y \in Rf$

وعليه تكون الدالة $\boldsymbol{f}$ محدودة اذا وفقط اذا وجد M بحيث : $|f(X)| \leq M\ ;\ \forall\ X \in Df$

تعريف (1.3.6):

يقال أن L_0اصغر حد علوي للدالة $f : A \to B$ اذا كان L_0أصغر حد علوي لحدي الدالة ويقال أن ℓ_0أكبر حد سفلي للدالة f اذا كان ℓ_0أكبر حد سفلي لمدى الدالة . ويمكن تعريف القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة بالمثل وعليه فإن ; L_0= sup f = sup R_f ; ℓ_0= inf f – inf R_f

M = max f = max R f ; m = min f = min R f .

مثال (1.3.1):

اذا كانت $h (X) = 7 - 3 \quad \sqrt{4 - X^2}$ ادرس ما يلي :

(أ) هل الدالة محدودة أم لا ؟

(ب) أوجد max h , min h , sup h , inf h إن وجدت ؟

الحل :

نطاق هذه الدالة هو $Dh = [- 2{,}2\ ]$ ومداها هو $R\ h = [\ 1{,}7]$ (برهن ذلك)

(أ) الدالة محدودة لأن مداها محدد من الأعلى بالعدد 7 ، ومن الاسفل بالعدد 1 .

(ب) حيث أن $1 \text{ ، } 7 \in Rh$ اذاً

suph = maxh = 7 ; infh = minh – 1

تعريف (1.3.7):

نفرض الدالتين $f : A \to B , g : B \to C$ نعرف الدالة التركيبية من الدالتين f , g والتي يرمز g o f على النحو التالي :-

$$(g o f) (x) = g (f (x)) \ ; \ \forall \ x \in A$$

وفي هذه الحالة يتضح أن نطاق الدالة التركيبية g o f هو المجموعة A ونطاقها المصاحب هو C .

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "g\,o\,f"] \arrow[dr, "f"'] & & C \\ & B \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

$$A \xrightarrow{\ f\ } B \xrightarrow{\ g\ } C$$

$$X \xrightarrow{\ gof\ } g\,(f(x))$$

على وجه العموم أذا كان : $f : A \to B \;;\; g : C \to D$ فإن نطاق الدالة التركيبية $g \circ f$ يتكون فقط من العناصر $X \in A$ بحيث أن $f(x) \in C$ ، أي أن : $D_{gof} = \{ x \in A : f(x) \in D_g \}$

ونطاق الدالة $f \circ g$ يعطي من العلاقة : $D_{fog} = \{ x \in C : g(x) \in D_f \}$

ملاحظة (1.3.1):

اذا كا $R_f \subseteq R_g$ فأن نطاق الدالة $g \circ f$ وهو نفسه نطاق f .أي أن $D_{gof} = D_f$. واذا كان $R_g \subseteq D_f$ فإن نطاق الدالة $f \circ g$ هو نفسه g أي أن $D_f = D_g$

تعريف (1.3.8):

يقال أن الدالة $f : A \to B$ دالة أحادية أو واحد لواحد (one to one) أو (injective) اذا تحقق : $\neq (X_1)$

$\forall \; X_1 , X_2 \in A : X_1 \neq X_2 \Rightarrow f(X_2)$

هذا يكافئ منطقياً $\forall \; X_1 , X_2 \in A : f X_1 \neq f X_2 \Rightarrow X_1 = X_2$

تعريف (1.3.9):

يقال أن الدالة $f : A \to B$ والقيمة فوقية أو غامرة (onto , surjective) اذا كان مداها يساوي النطاق المصاحب لها ، أي اذا تحقق $R_f = B$. وهذا يعني أنه لكل عنصر $y \in B$ يوجد عنصر $x \in A$ بحيث أن $f(x) = y$.

تعريف (1.3.10):

يقال للدالة $f : A \to B$ أنها تناظر أحداي (bijective) اذا كانت أحادية وغامرة .

أي أن تناظر أحادي $\Leftrightarrow$ أحادية + غامرة (أو فوقية)

bijective $\Leftrightarrow$ injective + surjective

ملاحظات (1.3.2):

1- على وجه العموم الدالة الزوجية لا تكون أحادية على نطاقها المتماثل .

2- اذا كانت الدالة $f : A \to B$ دالة تزايدية فعلاً (أو تناقصية فعلاً) على المجموعة A فأنها تكون أحادية .

تعريف (1.3.11) :

يقال إن الدالتين $y = g(x)$, $y = f(x)$ كلاهما دالة عكسية للأخرى اذا تحقق أن :

$$(f \circ g)(x) = X \;;\; \forall X \in D_g \;\&$$

$$(g \circ f)(x) = X \;;\; \forall X \in D_f$$

ويرمز للدالة العكسية للدالة $y = f(x)$ بالرمز $y = f^{-1}(x)$.

من هذا التعريف نستنتج أنه اذا كانت الدالة $f : A \to B$ تناظر أحادي فإن لها دالة عكسية هي :

$$(f^{-1})^{-1} = f \text{ ، } f^{-1} : B \to A$$

ملاحظة (1.3.3):

اذا كانت $f : A \to B$ دالة تناظر أحادي ، فإن الدالة العكسية لها هي $f^{-1} : B \to A$ تكون تناظر أحادي أيضاً ويكون : $D_{f^{-1}} = R_f$ ، $D_f = R_{f^{-1}}$. ونجد ان

$$(f^{-1} \circ f) (x) = x \,;\ \forall x \in A \,;$$

$$(f \circ f^{-1}) (x) = x \,;\ \forall x \in B \,;$$

نظرية (1.3.1):

نفرض الدالة $f : x \to y$. اذا كان $A , B \subseteq x$ ، $C , D \subseteq y$ فإن

(i) $f (A \cup B) = f (A) \cup f (B)$

(ii) $f (A \cap B) \subseteq f (A) \cap f (B)$

(iii) $f^{-1} (A \cap B) = f^{-1} (A) \cup f^{-1} (B)$

(iv) $f^{-1} (A \cap B) = f^{-1} (A) \cap f^{-1} (B)$

(v) $f (A - B) \supseteq f (A) - f (B)$

(vi) $f^{-1} (A - B) = f^{-1} (A) - f^{-1} (B)$

(vii) $A \subseteq f^{-1} f (A) ,\ \forall \ \subseteq x$

في العلاقات (ii) ، (v) ، (vii) يحدث التساوي اذا وفقط اذا كانت f أحادية .

(viii) $f f^{-1} (D) \subseteq D \,;\ \forall D \subseteq y$

في العلاقات السابقة يحدث تساوي اذا وفقط اذا كانت f شاملة .

(ix) $f^{-1} (\bigcup_{i=-1}^{\infty} D_i) = \bigcup_{i=-1}^{\infty} f^{-1} (D_i) \,;\ D_i \subseteq y$

(x) $f^{-1} (\bigcap_{i=1}^{\infty} D_i) = \bigcap_{i=-1}^{\infty} f^{-1} (D_i) \,;\ D_i \ \subseteq$

(x i) $f (\bigcap_{i=-1}^{\infty} A_i) = \bigcup_{i=-1}^{\infty} f(A_i) \,;\ A_i \subseteq X$

(xii) $f (\bigcap_{i=-1}^{\infty} A_i) \subseteq \bigcap_{i=-1}^{\infty} f (A_i) \,;\ A_i \subseteq X$

تعريف (1.3.12):

يقال للمجموعة S أنها قابلة للعد (countable) اذا كانت منتهية أو يوجد راسم تناظر أحادي f من مجموعة الأعداد الطبيعية N الى المجموعة S ، أي اذا أمكن ترقيم (denumerable) عناصرها بواسطة N أو بصورة أخرى اذا أمكن كتابة S في صورة متتابعة لا نهائية من العناصر المختلفة

$S = \{ a_1 , a_2, \ldots\ldots , an , \ldots.. \}$.

من اهم المجموعات القابلة للعد مجموعة الأعداد الطبيعية N ، ومجموعة الأعداد الصحيحة Z ، ومجموعة الأعداد القياسية Q . أما مجموعة الأعداد الحقيقية R فهي غير قابلة للعد . كذلك اي فترة مفتوحة أو مغلقة من مجموعة الأعداد الحقيقية R تكون غير قابلة للعد .

تعريف (1.3.13):

يقال إن الدالة $f : G \to R$ متصلة (continuous) عند النقطة a حيث $a \in R \subseteq R$ اذا كان

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

وهذا يعني أنه لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث أن :

$$\forall X \in G : |X - a| < \delta \Rightarrow |f(X) - F(a)| < \varepsilon$$

ويقال أن الدالة f متصلة على الفترة المفتوحة اذا وفقط اذا كانت متصلة عند جميع نقاط المجموعة G . وهذا التعريف يكافئ القول بان :

$$X \in f(a - \delta , a + \delta \Rightarrow f(X) \in f(f(a) - \delta , f(a) + \delta$$

أي أنه اذا كان لكل فترة مفتوحة (مجموعة مفتوحة) V تحتوي($\boldsymbol{f}$(a توجد فترة مفتوحة (مجموعة مفتوحة) U تحتوي a بحيث أن $f(U) \subseteq U$.

نظرية (1.3.2):

الدالة f متصلة اذا وفقط اذا كانت الصورة العكسية لكل مجموعة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة .

الدوال وعلاقة التكافؤ(1−4) : (Functions and Equivalence Relations)

اذا كانت $f : x \to y$ دالة ، p علاقة معرفة على X بالصورة :

$x \,\rho\, y \Leftrightarrow f(x) = f(y) ; \quad \forall x, y \in X$ فإن.

(1) العلاقة p هي علاقة تكافؤ على X تسمى علاقة تكافؤ ناتجة عن الدالة X

(Equivalence relation determined by f)

(2) اذا كانت $x \in X$ فإن فصل التكافؤ هو $[X] = f^{-1}(f(X)) = p_x$.

لأن $y \in [X] \Leftrightarrow y\, px \Leftrightarrow f(X) = f(y) \Leftrightarrow y \in f^{-1}(f(X)$

مثال (1.4.1):

لتكن x={0,1,2,3} ، y={1,2,4,6} . $:x\to y$ معرفة بالصورة $\boldsymbol{f}(n) = n! ; \forall n \in x$

إذا كانت ρ علاقة معرفة على X بالصورة :

$$X \,\rho\, y \Leftrightarrow \boldsymbol{f(x) = f(y)} ; \forall \boldsymbol{x, y} \in \boldsymbol{x}$$

فإن $\rho = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1), (2,2), (3,3)\}$

واضح ان ρ علاقة تكافؤ فصول التكافؤ

$$\{0\}=\{0,1\}=f^{-1}\boldsymbol{f(0)}$$

$$\{2\}=\{2\}=f^{-1}\boldsymbol{f(2)}$$

$$\{3\}=\{3\}=f^{-1}f(3)$$

نظرية(1.4.1):

اذا كانتρ علاقة تكافؤ على المجموعة X وكانت $f : X \to X/\rho$ حيث

$f(x) = [x] , \quad \forall x \in X$ فإن f دالة شاملة . واذا كانت σ علاقة تكافؤ على X ،

σ / X → X : f حيث $f (x) = \sigma_x$ لكل x ∈ X فإن σ علاقة تكافؤ على X ناتجة عن f .

البرهان :

حيث أن $D_f = X$ ، $R_f = X / \rho$ فإذا كانت x = y فإن [x] = [y]

ومنها نجد أن f (x) = f (y) وعليه فإن f دالة .

$$[x] \in X / \rho \Rightarrow x \in X \ \& \ f (x) = [x]$$

أي أن f دالة شاملة

كذلك اذا كانت σ علاقة تكافؤ على X ناتجة عن f فإن

$$(x , y) \in \sigma \Leftrightarrow \sigma_X = \sigma_y \Leftrightarrow f (X) = f (y) \Leftrightarrow (x , y) \in \rho$$

ومن ثم فإن ρ= σ .

تعريف (1.4.1):

تسمى الدالة $\pi : X \to X/\rho$ حيث $\pi (x) = [x] , \forall x \in X$

بالدالة الطبيعية أو القانونية (Natural or canonical function)

نظرية (1.4.2):

اذا كانت $f : x \to y$ دالة ،η علاقة تكافؤ على X ناتجة عنf , ρ علاقة تكافؤ على X حيث $\rho \subseteq \eta$ فإن

ρ / η علاقة تكافؤ علىρ/ X ناتجة عن الدالة $f /\rho : X/\eta \to y$.

الفصل الثاني

المفاهيم الاساسية :

- الدوال المتصلة والتكافؤ التبولوجي
- الدوال المتصلة

الفصل الثاني

الدوال المتصلة والتكافؤ التبولوجي

Continuous Functions and Topologyical Equivalent

مقدمة: أن اتصال الدوال يلعب دوراً مهماً في التحليل الرياضي والتبولوجي وفي العديد من فروع الرياضيات. أن مفهوم الدوال المتصلة (في الفضاءات الأقليدية) يعتمد على مفهوم الدوال المترية . في هذا الباب سنحاول إعطاء التعريف الأساسي لمفهوم الدالة المتصلة من فضاء تبولوجي إلى فضاء تبولوجي آخر مع دراسة العديد من التكافؤات لتعريف الأتصال . أيضاً تعرضنا لمفهوم الدوال المفتوحة والدوال المغلقة وبعض الامثلة. وأخيراً قدمنا مفهوم التشاكل (التكافؤ التبولوجي) للفضاءات التبولوجية .

الدوال المتصلة (2-1) : (Continuous Functions)

تعريف (2.1.1):

بفرض ان(X,T),(Y,T^*) فضاءيين تبولوجيين .يقال أن الدالة $\boldsymbol{f}$:X→Y دالة متصلة إذا وفقط إذا كانت الصورة العكسية لأي مجموعة مفتوحة في Yهي مجموعة مفتوحة في X أي أن

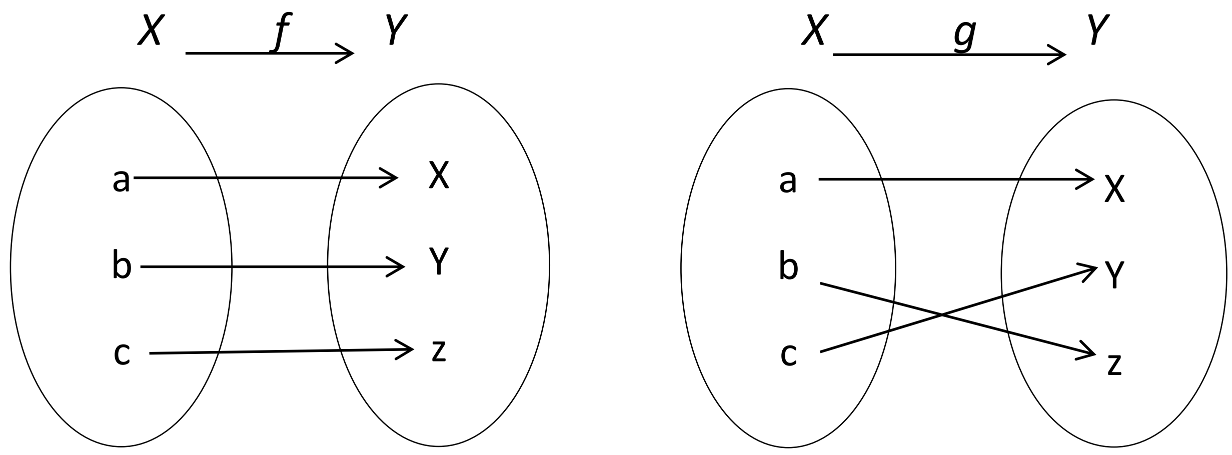
$$\forall V \in T^* \Rightarrow f^{-1}\ (V)\ T$$

مثال (2.1.1):

نفرض أن X= {a,b,c } , Y={x,y,z}. ونفرض

$$T_Y = \{Y, \emptyset, \{x\}, \{x, y\}\} ،T_x = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$$

ونفرض الدوال $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$:$X \to Y$ المعرفة بالصورة :



نجد أن $\boldsymbol{f}$ دالة متصلة لأن:

$$f^{-1}(y) = X \in T_x, f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in T_x,$$

$$f^{-1}(\{x\}) = \{a\} \in T_x, f^{-1}(\{x, y\}) = \{a, b\} \in T_x$$

$$g^{-1}(\{x, y\}) = \{a, c\} \notin T_x$$

مثال (2.1.2):

لتكن $\boldsymbol{f}$: (X,D) → (Y, T) فإن $\boldsymbol{f}$ دالة متصلة لأنه اذا فرضنا أن

V∈ T فإنX $\subseteq$ $f^{-1}(V)$وعليه فإنf^{-1} (V)∈ D. إذاً $f^{-1}(V)$ مفتوحة في X.

مثال (2.1.3):

ليكنf: (X,T)→(Y, I) فإن f دالة متصلة لأن :

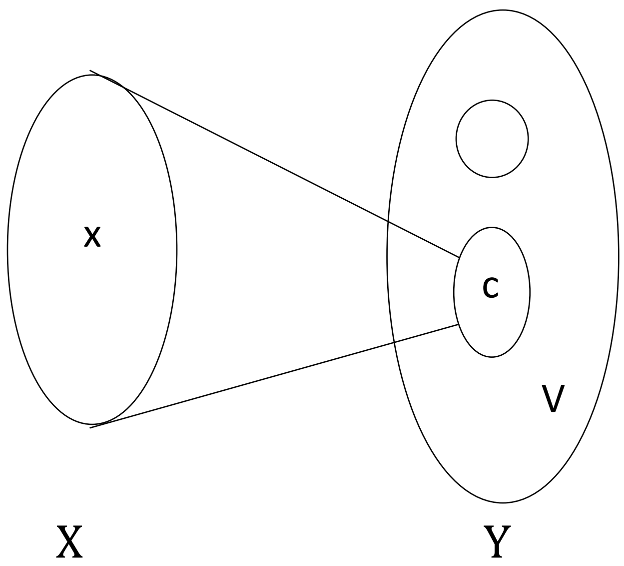
$$f^{-1}(Y)=X, f^{-1}(\emptyset), X, \emptyset \in T$$

مثال (2.1.4):

بفرض ان f: (X,T)→(Y,T^*) هي الدالة الثابتة .

$$f(x) = c(c \text{ ثابت})\forall x \in X$$

فإن f دالة متصلة لأن :



نفرض أن V مجموعة مفتوحة في Y فإن :

$$f^{-1}(V) = \begin{cases} \emptyset & if\ c \notin V \\ X & if\ c \notin V \end{cases} \Rightarrow X, \emptyset \in T_x$$

مثال(2.1.5):

إذا كـان ($\mathcal{U}$,R) هـو الفضـاء العـادي علـى R، (R,C) هـو الفضـاء ذو المكمـلات المنتهيـة علـى R.هـل الدالـه $f R \to R$: المعرفة بالصورة :

(دالة الوحدة) $f(X) = I_X(X)=x \; ; \forall x \in R$ دالة متصله؟

الحل :

بفرض أن $\mathcal{U}$ ∋(a,b) مجموعه مفتوحة في $\mathcal{U}$ فإن :

$$f^{-1}((a,b)) = (a,b) \notin C$$

لأن $(a,b)^c = (-\infty, a] \cup [b, \infty)$ ليست مجموعة منتهية . إذاً الدالة f ليست متصلة.

مثال(2.1.6):

لتكن $f: (X, T_x) \to (Y, T_Y)$ دالة متصلة ، A ⊆ X

أثبت أن $f/A : (X, T_A) \to (Y, T_Y)$ متصلة حيث f/A دالة التقييد .

الحل :

إذا كانت$f: X \to Y$ دالة ، A⊆ X فأن دالة التقييد $f/A: A \to Y$ تعرف بالصورة :

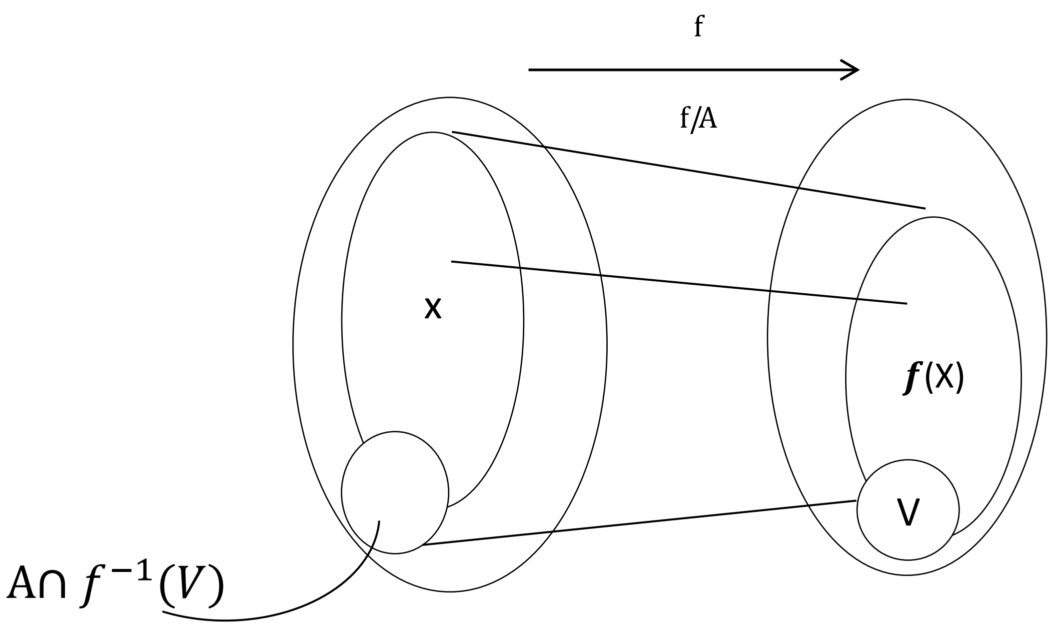
$$(f/A)(x) = f(x) \; ; \forall x \in A$$

بفرض ان V مجموعة مفتوحة في Y وحيث أن $\boldsymbol{f}$ دالة متصلة فإن f^{-1} (V) مجموعة مفتوحة في X .

إذاً $A \cap f^{-1}(V) \in T_A$

أي مجموعه مفتوحة في الفضاء الجزئي (A, T_A) وحيث أن

دالة متصلة $\boldsymbol{f}/A$ $(\boldsymbol{f}/A)^{-1}(V) = A \cap \boldsymbol{f}^{-1}(v) \Rightarrow \boldsymbol{f}/A$



<u>نظرية (2.1.1):</u>

تحصيل دالتين متصلتين هو دالة متصلة .أي إذا كان كل من $\boldsymbol{f}:X\rightarrow Y$ ، $\mathbf{g}:Y\rightarrow Z$ دالتين متصلتين فإن $\mathbf{g}\ \boldsymbol{o}\ \boldsymbol{f}: X \rightarrow Z$ دالة متصلة ايضاً.

<u>تعريف (2.1.2):</u>

نفرض الدالة $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{X} \rightarrow \boldsymbol{Y}$، $P \in X$ يقال ان الدالة $\boldsymbol{f}$ متصلة عند النقطة P إذا كانت الصورة العكسية لكل جوار للنقطة ($\boldsymbol{f}(p)$ هي جوار للنقطة p .أي ان :

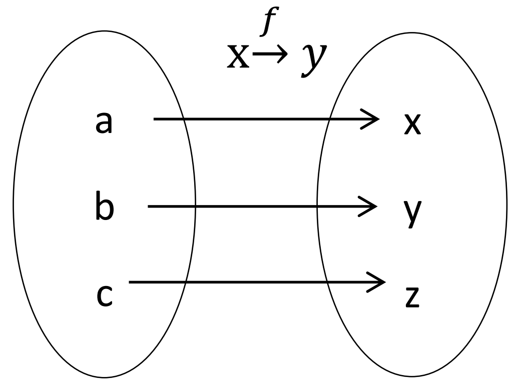
$$\forall N \in N_{f(P)} \Rightarrow \boldsymbol{f}^{-1}(N) \in N_p$$

<u>مثال (2.1.7):</u>

نفرض X={a,b,c} , Y={x,y,z} . ونفرض

$$T_y = \{Y, \emptyset, \{x\}, \{x,z\}\}, T_x = \{X, \emptyset, \{a\}\}$$

واذا كانت $\boldsymbol{f}$:X→Y دالة معرفة بالصورة



بين أن $\boldsymbol{f}$ دالة متصلة عند a ولكنها غير متصلة عند c ؟

الحل:

(i)مجموعة جوارات $\boldsymbol{f}$(a) :

$$N_{f(a)=} N_x = \{Y, \{x\}, \{x,y\}, \{x,z\}\}$$

مجموعة جوارات a : $N_a = \{X,\{a\},\{a,b\},\{a,c\}\}$

والآن $\boldsymbol{f}^{-1}(\{x\}) = \{a\} \in N_a$, $f^{-1}(Y) = X \in N_a$

$f^{-1}(\{x,y\}) = \{a,b\} \in N_a$, $f^{-1}(\{x,z\}) = \{a,c\} \in N_a$

اي أن $\boldsymbol{f}$ متصلة عند a .

(ii) $N_c = \{X\}$; $N_{f(c)} = N_z = \{Y,\{x,z\}\}$

والآن $\boldsymbol{f}^{-1}(\{x,y\}) = \{a,c\} \notin N_c$

اذاً $\boldsymbol{f}$ ليست متصلة عند b .

والآن نتعرض لخواص الدوال المتصلة وذلك عن طريق العلاقة بين اتصال الدالة وغلاقة المجموعة وداخلية المجموعة والاساس والأساس الجزئي والجوار.

نظرية (2.1.2):

لتكن $\boldsymbol{f}: X \to Y$ دالة فإن العبارات الآتية متكافئة :

(1) $\boldsymbol{f}$ دالة متصلة.

(2) الصورة العكسية لكل مجموعة مغلقة في y تكون مغلقة في X .

(3) $\boldsymbol{f}(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ لكل $A \subseteq Y$

(4) $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq \boldsymbol{f}^{-1}(\bar{B})$ لكل $B \subseteq y$.

(5) $\boldsymbol{f}$ دالة متصلة عند كل نقطة $p \in X$.

(6) $\boldsymbol{f}^{-1}(B)$ مجموعة مفتوحة في X لكل $B \in \boldsymbol{\mathcal{B}}$ حيث $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ اساس للتبولوجي على Y .

(7) $f^{-1}(S)$ مجموعة مفتوحة في X لكل $S \in \mathcal{S}$ حيث S اساس جزئي للتبولوجي على X .

(8) $f^{-1}(A^o) \subseteq (f^{-1}(A))^o$ لكل $A \subseteq Y$

البرهان: (2)⟺(1) :

بفرض ان f دالة متصلة وأن F مجموعة مغلقة في Y فإن F^c مجموعة مفتوحة في Y وحيث ان $\boldsymbol{f}$ دالة متصلة فإن

$f^{-1}(F^c)$ مجموعة مفتوحة في X ولكن

$f^{-1}(F^c) = (f^{-1}(F))^c$. إذا $f^{-1}(F)$

مجموعة مغلقة في X .

والعكس ، بفرض أن الصورة العكسية لكل مجموعة مغلقة F في Y هي مغلقة في X ولإثبات أن $\boldsymbol{f}$ متصلة . لذلك نفرض G مجموعة مفتوحة في Y ومن ثم فإن G^c مجموعة مغلقة في Y وبأستخدام الفرض $f^{-1}(G^c)$ مجموعة مغلقة في X ولكن $f^{-1}(G^c) = (f^{-1}(G))^c$ إذاً $f^{-1}(G)$ مجموعة مفتوحة في X وبالتالي فإن $\boldsymbol{f}$ دالة متصلة .

:(1)⟺(3)

بفرض أن $\boldsymbol{f}$ دالة متصلة وأن A⊆X فإن $\overline{f(A)}$ مجموعة مغلقة فيYومن ثم فإن $f^{-1}\ (\overline{f(A)})$ مجموعة مغلقة فيX أي أن

$$\boldsymbol{f}^{-1}(\overline{f(A)})=\overline{f^{-1}\ (\overline{f(A)})}$$

والآن$A\subseteq f^{-1}\ (\boldsymbol{f}(A))\subseteq f^{-1}\ (\overline{f(A)})$. وعليه نحصل على

$\bar{A}\ \subseteq\ \overline{f^{-1}(\overline{f(A)})}=f^{-1}(\overline{f(A)})$. ومنها نجد أن

$$\boldsymbol{f}(\bar{A})\subseteq\boldsymbol{f}(f^{-1}\ (\overline{f(A)}))\subseteq\overline{f(A)}$$

اذن $\boldsymbol{f}(\bar{A})\subseteq\overline{f(A)}\ ,\forall\ A\ \subseteq X$

والعكس ، نفرض أن $\boldsymbol{f}(\bar{A})\ \subseteq\ \overline{f(A)}$ لكل A ⊆ X والمطلوب اثبات ان $\boldsymbol{f}$ دالة متصلة ، لذلك نفرض أن F مجموعة مغلقة في Y ، بوضع $A=f^{-1}(F)$.

اذاً $f\ (\bar{A})=\boldsymbol{f}\big(\overline{(\boldsymbol{f^{-1}(F)})}\big)\subseteq\overline{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{f^{-1}(F)})}\subseteq\overline{\boldsymbol{F}}=\boldsymbol{F}$

إذاً$\overline{f^{-1}\ (F)}\subseteq f^{-1}\ \boldsymbol{f}(\overline{f^{-1}\ (F)})\subseteq\ \boldsymbol{f^{-1}}\ (F)$

ولكن $f^{-1}\ (F)\ \subseteq\ \overline{f^{-1}\ (F)}$. إذاً $f^{-1}\ (F)=\overline{f^{-1}\ (F)}$

أي أن $f^{-1}\ (F)$ مجموعة مغلقة في X .

: (1)⟺(4)

نفرض أن $B\subseteq Y$ فإنْ $f^{-1}\ (B)\ \subseteq X$ وبأستخدام (3)

$\boldsymbol{f}(\overline{f^{-1}\ (B)})\subseteq\overline{f(\ f^{-1}\ (B))}\ \subseteq\ \bar{B}$.

إذاً $\overline{f^{-1}\ (B)}\ \subseteq\ f^{-1}\ (\bar{B})$

والعكس ، نفرض أن $\bar{V}$ مجموعة مفتوحة في Y وبالتالي فإن $\overline{V^c}$مجموعة مغلقة في Yوباستخدام الفرض

$$\overline{f^{-1}\ (V^c)}\ \subseteq\ f^{-1}\ (\overline{V^c})=\ f^{-1}(V^c)=(f^{-1}\ (V))^c$$

ولكن $f^{-1}\ (V^c)\ \subseteq\ \overline{f^{-1}\ (V^c)}$.

إذاً $\overline{f^{-1}\ (V^c)}=\ f^{-1}\ \ (V^c)$

وعليه فإن $f^{-1}\ (V^c)$ مجموعة مغلقة في X ومن ثم فإن $f^{-1}\ (V)$ مجموعة مفتوحة في X أي ان $\boldsymbol{f}$ دالة متصلة .

:(1)⟺(5)

بفرض ان $\boldsymbol{f}$ دالة متصلة . نفرض ان $N\ ,P\in X$ جوار للنقطة $\boldsymbol{f}(P)$ اي ان$N\in N\ f_p$

وعليه يوجد $U\in T$ بحيث $\boldsymbol{f}(P)\in U\ \subseteq N$.

اذاً$P\ \in\ f^{-1}\ (U)\subseteq\ f^{-1}\ (N)$وحيث ان $\boldsymbol{f}$ دالة متصلة فإن $f^{-1}\ (U)$مجموعة مفتوحة وعليه فإن $N_p\ \in f^{-1}\ (N)$ ،

إذاً $\boldsymbol{f}$ دالة متصلة عند النقطة P وحيث أن P اختيارية فإن $\boldsymbol{f}$ دالة متصلة عند كل نقطة $P\in X$.

والعكس ، نفرض أن $\boldsymbol{f}$ دالة متصلة عند $P\in X$ وأن V مجموعة مفتوحة في Y ،

$p\in\ f^{-1}(V)$ وعليه فإن $\boldsymbol{f}(P)\in V$ ومنها فإن $V\in N_{f(p)}$

اذا $\forall P$ ، $f^{-1}(V) \in N_p$ وعليه فان $f^{-1}(V) \in T$ مجموعة مفتوحة اذاً $\boldsymbol{f}$ دالة متصلة .

$(6) \Leftrightarrow (1)$:

بفرض أن $\boldsymbol{f}$ دالة متصلة ، $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ أساس للتبولوجي على Y أي ان $B \subseteq T_y$ ومن ثم فإن $f^{-1}(B) \in T_x$ لكل $B \in T_y$ ، إذاً $f^{-1}(B)$ مجموعة مفتوحة في X لكل $B \in \boldsymbol{\mathcal{B}}$ **.**

والعكس ، نفرض أن V مجموعة مفتوحة في Y وحيث ان $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ أساس

للتبولوجي على Y فإن $V = \cup B_i \; ; B_i \in \boldsymbol{\mathcal{B}}$ وعليه فإن

$$f^{-1}(V) = f^{-1}(\underset{i}{\cup} B_i) = \underset{i}{\cup} f^{-1}(B_i)$$

وحيث أن $f^{-1}(B_i)$ مجموعة مفتوحة في X فإن $f^{-1}(V)$هي اتحاد مجموعات مفتوحة وبالتالي فإن $f^{-1}(V)$ مجموعة مفتوحة أي أن $\boldsymbol{f}$ دالة متصلة

$(7)\Leftrightarrow(1)$:

نفرض أن $\boldsymbol{f}$ دالة متصلة ، $A \subseteq Y$ فإن A^o مجموعة مفتوحة في Y ومن ثم فإن $f^{-1}(A^o)$ مجموعة مفتوحة في X أي أن $f^{-1}(A^o) = (f^{-1}(A^o))^o$

وبما أن $A^o \subseteq A$ فإن $f^{-1}(A^o) \subseteq f^{-1}(A)$ وعليه فإن

$$f^{-1}(A^o) = (f^{-1}(A^o))^o \subseteq (f^{-1}(A))^o$$

إذاً $f^{-1}(A^o) \subseteq (f^{-1}(A))^o$

والعكس ، نفرض أن لكل $A \subseteq Y$ يتحقق

$$f^{-1}(A^o) \subseteq (f^{-1}(A))^o$$

ولإثبات أن $\boldsymbol{f}$ دالة متصلة ، نفرض ان G مجموعة مفتوحة في Y أي أن $G = G^o$

إذاً $f^{-1}(G) = f^{-1}(G^o) \subseteq (f^{-1}(G))^o$ ولكن

$$\left(f^{-1}(G)\right)^o \subseteq f^{-1}(G)$$

وبناء على ذلك فان $f^{-1}(G) = (f^{-1}(G))^o$. اذا $f^{-1}(G)$

مجموعة مفتوحة في X ومن ثم فإن $\boldsymbol{f}$ دالة متصلة .

<u>مثال (2.1.8):</u>

نفرض أن $\boldsymbol{f}: x \to I = [0,1]$ دالة من الفضاء التبولوجي X إلى الفترة المغلقة I.

بين انه إذا كانت $f^{-1}((a,1]), f^{-1}([0,b))$ مجموعات مفتوحة في I لكل $a>0$ ، $b<1$فإن $\boldsymbol{f}$ دالة متصلة .

<u>الحل :</u>

حيث $a>0$ ، $b<1$ فإن $[0,b) \cap (a,1] = (a,b) \subseteq I$

ولذلك فإن العائلة $S = \{(a,1],[0,b) : a>0, b<1\}$

أساس جزئي للتبولوجي المعرف على I . وإذا كانت $f^{-1}((a,1])$ ، $f^{-1}([0,b))$ مجموعات مفتوحة في I فإنه ينتج من نظرية(1.1.2) أن الدالة $\boldsymbol{f}$ متصلة .

نظرية (2.1.3):

نفرض أن $\{T_i\}$; $\forall_i = 1,2, ...$ عائلة من التبولوجيات المعرفة على المجموعة X ، إذا كانت f:X→ Y دالة متصلة بالنسبة إلى T_i لكل i . فإن f متصلة بالنسبة إلى التبولوجي $T = \bigcap_i T_i$.

البرهان :

نفرض أن G مجموعة مفتوحة في Y ، حيث أن f دالة متصلة فإن

$f^{-1}(G) \in T_i$ لكل i . من ذلك نجد أن $f^{-1}(G) \in \bigcap_i T_i = T$

أي أن f دالة متصلة بالنسبة للتبولوجي τ .

نظرية(2.1.4):

نفرض أن $f_i: X \to (Y_i, T_i)$ عائلة من الدوال ، ونفرض ان

$S = \bigcup_i \{f_i^{-1}(H): H \in T_i\}$

نفرض التبولوجي Tτ على X هو التبولوجي المولد بواسطة S فإن :

(1) f_i متصلة لكل i

(2) إذا كانت T^* هو تقاطع كل التبولوجيات على X بحيث أن كل الدوال f_i تكون متصلة فإن $T^* = \mathrm{T}$.

(3)T هو أضعف تبولوجي على X بحيث ان كل الدوال f_i تكون متصلة .

(4) S اساس جزئي للتبولوجي T .

البرهان :

(1) لكل دالة $f_i: X \to (Y_i, T_i)$ إذا كانت $\mathrm{H} \in T_i$ فإن $f_i^{-1}(H) \in S$

وحيث أن $S \subseteq T$ فإن $f_i^{-1}(H) \in T$. إذاً كل الدوال f_i متصلة .

(2) من نظرية (1.1.3) الدوال f_i متصلة بالنسبة للتبولوجي T^* ،

إذاً $S \subseteq T^*$. وحيث أن Tτ هو التبولوجي المولد بواسطة S فإن $T \subseteq T^*$.من جانب آخر τ هو أحد التبولوجيات بحيث أن f_i دوال متصلة ، من ذلك نستنتج أن

$T \subseteq T^*$ ،وعليه فإن $T^* = T$.

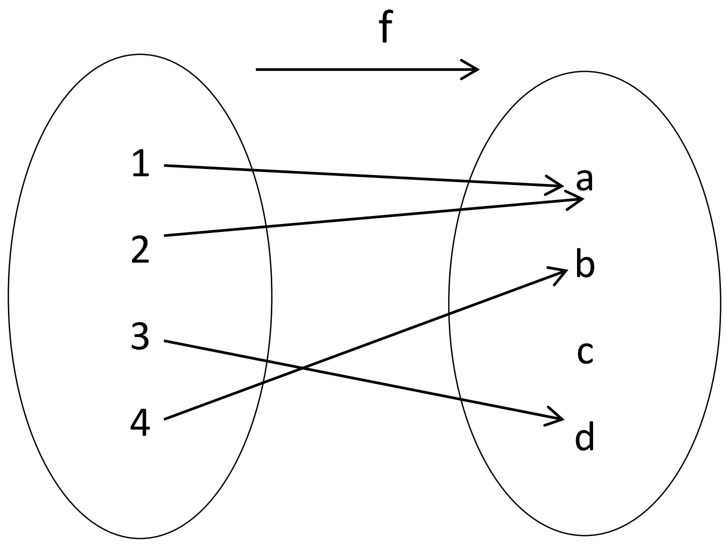
(3) واضح من (2) .

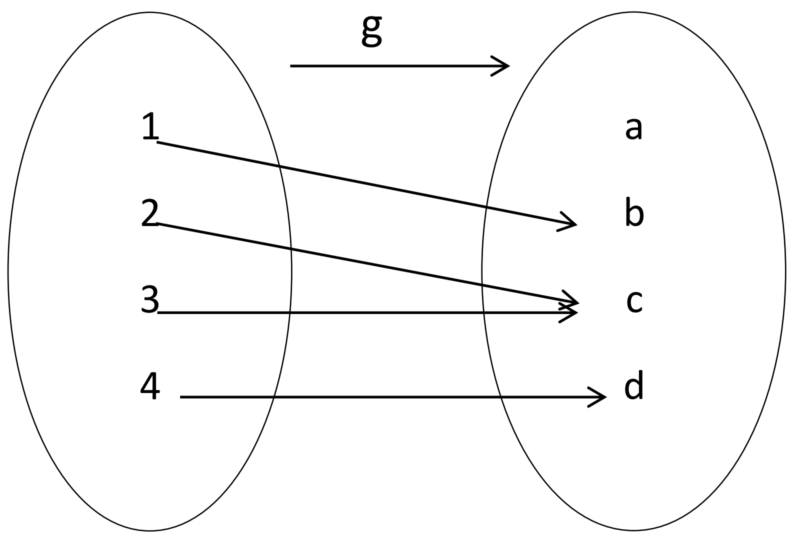
(4) حيث ان أي من تجمع من المجموعات الجزئية من X هو أساس جزئي لتبولوجي على X فإن S أساس جزئي للتبولوجي T.

مثال(2.1.9):

نفرض Y={a,b,c,d} ، $T = \{Y, \emptyset, \{c\}, \{c,d\}, \{a,b,c\}\}$

ونفرض X={1,2,3,4} نعرف الدوال f:X→(Y,T) ، g:X→(Y,T) بالصورة التالية :





أوجد الأساس الجزئي S للتبولوجي T^* τ على X المولد بواسطة الدوال $\boldsymbol{f}$,g.

الحل :

$$S=\{f^{-1}(H): H \in T\} \cup \{g^{-1}(H): H \in T\}$$

أي أن Sمكونة من الصور العكسية للمجموعات المفتوحة في X بواسطة الدوال $\boldsymbol{f}$،**g** .

إذاً

S={X,∅,{1,2,4},{3},{2,3},{1,2,4},{2,3,4}}

الخاتمة

الحمد لله تعالى الذي وفقنا في تقديم هذا البحث ، وها هي القطرات الأخيرة في مشوار هذا البحث وقد كان البحث عن التبولوجيا العامة وقد بذلنا كل الجهد والبذل لكي يخرج هذا البحث بهذا الشكل ونرجو من الله تعالى أن تكون رحلة ممتعة وشيقة . وكذلك نرجو أن تكون ارتقت بدرجات العقل والفكر حيث لم يكن الجهد بالجهد اليسير ونحن لا ندعي الكمال فإن الكمال لله عز وجل فقط. نحن قدمنا كل الجهد لهذا البحث فإن وفقنا لمن الله عز وجل واخيراً نرجو أن يكون البحث قد نال إعجابكم .

المصادر :-

1- د.غفار حسين موسى " مقدمة في التبولوجيا " دار الميسرة للنشر والتوزيع والطباعة ، كلية العلوم _ جامعة الزرقاء الاهلية .

2- أ.د. احمد عبد الباقر و.د. طه مرسي "التبولوجي العام " كلية العلوم – جامعة الملك سعود – فرع القسيم .

3- D.R Wilkins “ Topological Spaces “ copyring ,1997-2007

4-Allen Hatcher , “ Algebraic Topology “ copyright , 2000