وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة ديالى

كلية التربية المقداد

قسم الرياضيات

حل المعادلات التفاضلية المتجانسة بطريقة فروبنيوس

بحث مقدم الى كلية التربية المقداد قسم الرياضيات

لغرض نيل شهادة البكالوريوس في الرياضيات

اعداد

هدى علي حسين   اية علي حسين

بأشراف

م.م عبدالرحمن حميد

١٤٤٣هـ   2022م

بسم الله الرحمن الرحيم

﴿يرفع الله الذين امنوا منكم والذين اوتوا العلم درجات والله بما تعملون خبير﴾

صدق الله العظيم

سورة المجادلة:١١

الإهداء

"إلى الأمن النفسي الذي وجدته في عينيها

وصلابتها التي أوصلتني إلى هذه المرحلة العلمية

هذا العمل مصنوع بعمر أمي الذي فني لأجلي"

الشكر والامتنان

الحمد الله الذي تدوم بحمده النعم والصلاة والسلام على سيدنا محمد (صل الله عليه وسلم) وعلى اله الطيبين الطاهرين ، فلله الحمد والشكر اولا واخرة التوفيقي في انجاز هذا العمل العلمي ، راجية من الله أن ينفع به كل من اطلع عليه .

بعد إن اعانني الله إلى اتمام هذا البحث علمية احمل الكثير من كلمات الشكر والامتنان والاعتزاز التي ومهما كثر اجد بها عجزة وقصورة بأن اتقدم بها إلى مشرفي واستاذي (م.م عبدالرحمن حميد) فبفضل جهده وروحه العلمية وتفضله مشكور بالأشراف على البحث واخراجه في صورته النهائية .

ومن دواعي الامتنان وخالص شكري أن أتقدم به إلى كلية التربية المقداد جامعة ديالى التي منحتني الفرصة لمواصلة دراستي العلمية والشكر الخاص لقسم الرياضيات بدءا من رئيس القسم والكادر التدريسي وجميع العاملين فيه لسعيهم في خروج وبلورة فكر البحث الحالي وفقهم وحفظهم الله .

واتقدم بوافر الشكر وارقى الامتنان إلى زملاء الدراسة جميع المساندتهم بكل ما يعنيه معنى الصدق وفقكم وحفظكم الله اينما كنتم .

الباحثتان

المحتويات

المقدمة:

نشأت المعادلات التفاضلية منذ بداية الحساب ومازالت مستمرة منذ عهد نيوتن إلى عصرنا هذا وقد استخدمت المعادلات التفاضلية في فهم العلوم الفيزيائية والهندسة والحيوية بالاضافة إلى مساهمتها في دراسة التحليل الرياضي وامتدت استخداماتها في العلوم الاقتصادية و الاجتماعية .وللمعادلات التفاضلية أنواع كثيرة وطرق حل مختلفة . تناولنا في الفصل الأول تعريف المعادلة التفاضلية والمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة ورتبة ودرجة المعادلة .وبعض الأمثلة حول المعادلات الخطية المتجانسة. في الفصل الثاني حل المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة طريقة فروبنيوس (استخدام المتسلسلات في حل المعادلة التفاضلية)

الفصل الاول

1- تعريف المعادلة التفاضلية

2- المعادلة التفاضلية الاعتيادية

3- المعادلة التفاضلية الجزئية

4- رتبة المعادلة

5- درجة المعادلة

6- المعادلة الخطية

7- المعادلة التفاضلية المتجانسة

8-الحل العام

9- الحل الخاص

1.1 المعادلة التفاضلية: هي علاقة تحتوي على متغيرات (مستقل وتابع) ومعاملات تفاضلية. اي هي علاقة مساواة بين متغير مستقل وليكن x مثلا بالاضافة الى واحد او اكثر من المشتقات التفاضلية مثل y', y'' اي انها على الصورة العامة

مثال 1.1//

$$F(x, y, y', y'', \dots) = 0; \frac{dy}{dx} = y' = y^{(1)}, y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = y^{(2)}$$
$$\frac{d^3y}{dx^3} = y^{(3)}, \dots$$

2.1 المعادلة التفاضلية العادية : وهي التي تحتوي على متغير مستقل واحد والمعاملات التفاضلية بالنسبة لهذا المتغير المستقل مثل المعاملات التالية y', y'' ولها الشكل العام التالي

$$F(x, y, y', y'', \dots) = 0$$

مثال 2.1//

$$y'^3 + y'^2 + x^4(y')^3 = 0$$
$$y' + xy = e^x$$
$$y'^2 - y' - 2y = 0$$

3.1 المعادلة التفاضلية الجزئية: وهي التي تتضمن اكثر من متغير مستقل مثلا x,y وكان هناك متغير تابع مثلا z(x,y) وهو قابل للاشتقاق جزئيا بالنسبة لكل من xوy تسمى هذه المعادلة التي تتضمن متغيرات مستقلة ومتغير تابع ومشتقات جزئية بالمعادلة التفاضلية الجزئية (partial DE) ولها الشكل التالي:

$$G\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dots\right) = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z_x, \frac{\partial z}{\partial y} = z_y, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z_{xx}$$

مثال 3.1 // تعتبر المعادلات التالية هي معادلات تفاضلية جزئية.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^3 + 5\frac{\partial z}{\partial y} + \ln z = e^x$$

4.1 رتبة المعادلة (order): وهي رتبة اعلى معامل تفاضلي في المعادلة.

5.1 درجة المعادلة (degree): هي درجة (قوة) اعلى معامل تفاضلي (مشتق) في المعادلة.

مثال 4.1// حدد رتبة ودرجة المعادلات التفاضلية التالية.

ان رتبة المعادلة 4 ودرجتها 1 $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + xe^x \frac{d^4y}{dx^4} = \sin^{-1} y$

ان رتبة المعادلة 2 ودرجتها 1 $\ln x \left(\frac{dy}{dx}\right)^5 + \frac{d^2y}{dx^2} = \tan x$

ان رتبة المعادلة 5 ودرجتها 1 $\ln x \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{d^5y}{dx^5} = y$

ان رتبة المعادلة 6 ودرجتها 1 $y^{(6)} \cosh y + yy'' = 7y^3$

ان رتبة المعادلة 2 ودرجتها 1 $\cos x \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = e^x$

6.1 المعادلة الخطية: يكون المتغير y وجميع مشتقاته من الدرجة الاولى فقط وليس كقوة اعلى او حواصل ضرب (او sin y او cos y او...)

مثال 5.1// حدد كون المعادلات التالية خطية ام غير خطية ؟؟

1. $y' + a(x)y = b(x)$
2. $y'' + a1(x)y' + a0(x)y = b(x)$
3. $\frac{dy}{dx} + 5y = e^x$
4. $2xyy' = y^2 - x^2$ غير خطية
5. $yy' + y' = x$ غير خطية
6. $y''' + (1-y)y' = e^x$ غير خطية
7. $x^3y''' - x^2y'' + 3xy' = 0$
8. $\ln x \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{d^5y}{dx^5} = y$
9. $y''' + x^2y'' + \sin y = 0$ غير خطية
10. $\cos x \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = e^x$

7.1 المعادلة التفاضلية المتجانسة Homogeneous Equations:

تسمى المعادلة التفاضلية $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ متجانسة اذا كان كل من M,N دالة متجانسة من نفس الدرجة

كما ان $f(x,y)$ دالة متجانسة من الدرجة n اذا كان

$$f(\lambda x, \lambda \mathrm{y}) = \lambda^n \mathrm{f(x,y)}, \lambda \in R$$

مثال 6.1// هل الدالة متجانسة ؟

$$f(x,y) = x^2 - 3xy - y^2$$

$$\Rightarrow f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 x^2 - 3\lambda^2 xy - \lambda^2 y^2 = \lambda^2 f(x,y)$$

اذا: $f(x,y)$ متجانسة من الدرجة 2

8.1 الحل العام: من المرتبة n هو حل يحتوي على n من الثوابت الاختيارية ويحقق المعادلة التفاضلية .

9.1 الحل الخاص : هو حل لا يشتمل اي ثوابت اختيارية قد نحصل عليه بالتعويض في الثوابت في الحل العام بقيم محددة.

الحل العام للمعادلة $y^{(3)} - 5y'' + 6y' = 0$ هو:

$y = c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$ بحيث c_1, c_2, c_3 ثوابت اختيارية .

نجد الحلول الخاصة مثل

$$y = 5 - 2e^{3x} \;\; \& \;\; y = 3 + 5e^{2x} \;\; \& \;\; y = e^{2x} + e^{3x}$$

الفصل الثاني

1 - حلول المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية باستخدام المتسلسلات (طريقة فروينيوس)

Swries Solution of Second Order Differential Equations

(Frobenious Method)

2.1 طريقة فروينيوس

لقد سبق حل المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من التربة الثانية في صورة متسلسلة القوى في حالة إذا كانت x =a نقطة عادية في الجزء الأول. والان سوف ندرس حالة إذا كانت x = a نقطة شاذة منتظمة ، وفي هذه الحالة نفترض أن الحل على الصورة

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^{n+r}$$

أما اذا كان الحل على النقطة x = 0 الشاذة المنتظمة فأن:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$$

إن لم تذكر النقطة فاننا نعتبر x = 0 وسوف نوضح طريقة الحل بالمثال التالي:

مثال1//

$2xy''+(x+1)y'+3y=0$

$y=\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r} \qquad y'=\sum_{n=0}^{\infty} C_n (n+r)x^{n+\mathrm{r}-1}$

$y''=\sum_{n=0}^{\infty} C_n (n+r)(n+r-1)x^{n+r-2}$

$2x\sum_{n=0}^{\infty} C_n (n+r)(n+r-1)x^{n+r-2}+(x+1)\sum_{n=0}^{\infty} C_n (n+r)x^{n+r-1}$

$+3\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r}=0$

$\sum_{n=0}^{\infty} 2C_n (n+r)(n+r-1)x^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r)x^{n+r}+$

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r)x^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty} 3C_n x^{n+r}=0$

$\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r)(n+r-1)+(n+r)C_n x^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)+3)c_n x^{n+r}=0$

$2(r)(r-1)+r)c_0 x^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r)(n+r-1)+(n+r)C_n x^{n+r-1}$

$+\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)+3)c_n x^{n+r}=0$

$(2(r)(r-1)+r)c_0 x^{r-1}=0$

$2r(r-1)+r=0$

$2r^2-2r+r=0$

$2r^2-r=0 \Rightarrow r(2r-1)=0$

اما $r=0$ او $r=\frac{1}{2}$

$\sum_{n=1}^{\infty} 2(n+r)(n+r-1)+(n+r))c_n x^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)+3)c_n x^{n+r}=0$

$\sum_{k=0}^{\infty} 2(k+r+1)(k+r)+(k+r+1))c_{k+1}\mathrm{x}^{k+r}+\sum_{k=0}^{\infty} (k+\mathrm{r})+3)c_k x^{k+r}=0$

$\sum_{k=0}^{\infty}(2(k+r+1)(k+r)+(k+r+1)c_{k+1}+(k+r)+3)c_k)x^{k+r}=0$

$(2(k+r+1)(k+r)+(k+r+1))c_{k+1}+(k+r)+3)c_k=0$

$(2(k+r+1)(k+r)+(k+r+1)c_{k+1}=-(k+r)+3)c_k$

$$c_{k+1}=\frac{-(k+r+3)c_k}{2(k+r+1)(k+r)+(k+r+1)}$$

$$c_n=-\frac{(n+r+2)c_{n-1}}{2(n+r)(n+r-1)+(n+r)}$$

ملاحظة: في المثال السابق لاحظنا عند حل المعادلة الدليلية أن جذري المعادلة $r=0,\ r=\frac{1}{2}$ أي انهما مختلفان والفرق بينهما عدد كسري، وسوف نلاحظ أن هناك ثلاث حالات لجذري المعادلة الدليلية كما يأتي: حالات جذري المعادلة الدليلية:

١. مختلفان والفرق بينهما عدد كسري.
٢. متساويان.
٣. مختلفان والفرق بينهما عدد صحيح

الحالة الأولى:

الجذران مختلفان والفرق بينهما عدد كسري

لقد درسنا الحالة الاولى في المثال السابق ونعرض مثالا اخر

مثال2//

$2x(1-x)y''+(1-x)y'+3y=0$

$y=\sum_{n=0}^{\infty}C_n x^{n+r}\ y''=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(n+r)x^{n+r-1}$

$y''=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-2}$

$(2x-2x^2)\sum_{n=0}^{\infty}C_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-2}+$

$(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}C_n(n+r)x^{n+r-1}+3\sum_{n=0}^{\infty}C_n x^{n+r}=0$

$\sum_{n=0}^{\infty}2c_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-1}-\sum_{n=0}^{\infty}2c_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r}$

$+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(n+r)x^{n+r-1}-\sum_{n=0}^{\infty}c_n(n+r)x^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}3c_n x^{n+r}=0$

$\sum_{n=0}^{\infty}(2(n+r)(n+r-1)+(n+r))c_n x^{n+r-1}$

$\sum_{n=0}^{\infty}2(n+r)(n+r-1)+(n+r)-3)c_n x^{n+r}=0$

$$(2(r)(r-1)+r)c_0x^{r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}\big(2(n+r)(n+r-1)+(n+r)\big)c_n x^{n+r-1}$$

$-\sum_{n=0}^{\infty}(2(n+r)(n+r-1)+(n+r)-3)c_n x^{n+r}=0$

$2(r)(r-1)+r)C_0 x^{r-1}=0$

$2r^2-2r+r=0$

$2r^2-r=0 \Rightarrow r(2r-1)=0$

اما$r=0$ او $r=\frac{1}{2}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\big(2(n+r)(n+r-1)+(n+r)\big)C_n x^{n+r-1}$

$-\sum_{n=0}^{\infty}(2(n+r)(n+r-1)+(n+r)-3)C_n x^{n+r}=0$

$\sum_{k=0}^{\infty}(2(k+r+1)(k+r)+(k+r+1))c_{k+1}x^{k+r}$

$-\sum_{k=0}^{\infty}(2(k+r)(k+r-1)+(k+r)-3)c_k x^{k+r}=0$

$\sum_{k=0}^{\infty}\big((2(k+r+1)(k+r)+(k+r+1)c_{k+1})-$

$(2(k+r)(k+r-1)+(k+r)-3)c_k)x^{k+r}=0$

$(2(k+r+1)(k+r)+(k+r+1))C_{k+1}-(2(k+r)(k+r-1$

$+(k+r)-3)C_k=0$

$(2(k+r+1)(k+r)+(k+r+1))C_{k+1}=$

$(2(k+r)(k+r-1)+(k+r)-3)C_k$

$$C_{k+1}=\frac{(2(k+r)(k+r-1)+(k+r)+3)C_k}{(2(k+r+1)(k+r)+(k+r+1)}$$

$$C_n=\frac{2(n+r-1)(n+r)+(n+r-1)+3)C_{n-1}}{2(n+r)(n+r-1)+(n+r)}$$

الحالة الثانية :الجذران متساويان

مثال3//

$x^2.y''+3xy'+(1-2x)y=0$

$y=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+r}$ $y'=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(n+r)x^{n+r-1}$

$y''=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-2}$

$x^2\sum_{n=0}^{\infty}C_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-2}+3x\sum_{n=0}^{\infty}c_n(n+r)x^{n+r-1}$

$+(1-2x)\sum_{n=0}^{\infty}C_n x^{n+r}=0$

$\sum_{n=0}^{\infty}C_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}3c_n(n+r)\cdot x^{n+r}$

$+\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+r}-\sum_{n=0}^{\infty}2c_n x^{n+r+1}=0$

$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)+3(n+r)+1)c_n x^{n+r}-\sum_{n=0}^{\infty}2c_n x^{n+r+1}=0$

$(r)(r-1)+3r+1)c_0 x^n+\sum_{n=\phi}^{\infty}(n+r)(n+r-1)+3(n+r+1)c_n x^{n+r}$

$-\sum_{n=0}^{\infty} 2c_n x^{n+r+1} = 0$

$(r^2 - r + 3r + 1)c_0 x^r = 0$

$r^2 - r + 3r + 1 = 0$

$r^2 + 2r + 1 = 0$

$(r+1)(r+1) = 0 \Rightarrow (r+1)^2 = 0$

$r + 1 = 0 \Rightarrow \quad r = -1$ بالجذر

$\sum_{n=1}^{\infty} (n+r)(n+r-1) + 3(n+r) + 1)c_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} - 2C_n x^{n+r-1} = 0$

$\sum_{k=0}^{\infty} (k+r+1)(k+r) + 3(k+r+1) + 1)C_{k+1} x^{k+r+1}$

$-\sum_{k=0}^{\infty} 2C_k x^{k+r+1} = 0$

$\sum_{k=0}^{\infty} (k+r+1)(k+r) + 3(k+r+1) + 1)C_{k+1} - 2C_k)x^{k+r+1} = 0$

$(ck + r + 1)(k+r) + 3(k+r+1) + 1)C_{k+1} - 2C_k = 0$

$(k+r+1)(k+r) + 3(k+r-1) + 1)C_{k+1} = 2C_k$

$$C_{k+1} = \frac{2C_k}{(k+r+1)(k+r) + 3(k+r+1) + 1}$$

$$C_n = \frac{2cn - 1}{(n+r)(n+r-1) + 3(n+r) + 1}$$

الحالة الثالثة:

الفرق بين جذري المعادلة الدليلية عدد صحيح موجب

في هذه الحالة يكون جذرا المعادلة r_1, r_2 حيث $r_2 > r_1$ يكون عددا صحيحا موجبا

مثال 4//

$xy'' - 3y' + xy = 0$

$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r} \qquad y' = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (n+r) x^{n+r-1}$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-2}$$

$x\sum_{n=0}^{\infty} C_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-2} - 3\sum_{n=0}^{\infty} C_n (n+r) x^{n-1+r}$

$+x\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r}$

$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-1} - 3\sum_{n=0}^{\infty} C_n (n+r) x^{n+r-1}$

$+\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r+1}$

$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) - 3(n+r) c_n^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r-1}$

$(r)(r-1)-3(r)C_0x^{r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)-3(n+r)c_nx^{n+r-1}$
$+\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^{n+r+1}$

$(r)(r-1)-3r=c_0x^{r-1}$

$r^2-r-3r=0 \;\Rightarrow\; r^2-4r=0$

$r(r-4)=0$

$r=0 \quad r=4$

$\sum_{n=1}^{\infty}((n+r)(n+r-1)-3(n+r))c_nx^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r+1}=0$

$\sum_{k=0}^{\infty}((k+r+1)(k+r)-3(k+r+1))c_{k+1}x^{k+r}+\sum_{n=0}^{\infty}C_kx^{k+r+1}$

$\sum_{k=0}^{\infty}((k+r+1)(k+r)-3(k+r+1))C_{k+1}x^{k+r}+\sum_{n=0}^{\infty}C_{k-1}x^{k+r}=0$

$\sum_{k=0}^{\infty}((k+r+1)(k+r)-3(k+r+1))c_{k+1}+C_{k-1})x^{k+\mathrm{r}}=0$

$((k+r+1)(k+r)-3(k+r+1))C_{k+1}+C_{k-1}=0$

$((k+r+1)(k+r)-3(k+r+1))C_{k+1}=-C_{k-1}$

$$C_{k+1}=\frac{-C_{k-1}}{(k+r+1)(k+r)-3(k+r+1)}$$

$$C_n=\frac{-C_{n-2}}{(n+r)(n+r-1)-3(n+r)}$$

مثال 5//

$xy''+y'-y=0$

$y=\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^{n+r}y''=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(n+r)x^{n+r-1}$

$y''=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-2}$

$x\sum_{n=0}^{\infty}C_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-2}+\sum_{n=0}^{\infty}C_n(n+r)x^{n+r-1}$
$-\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^{n+r}=0$

$\sum_{n=0}^{\infty}C_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}C_n(n+r)x^{n+r-1}$
$-\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^{n+r}=0$

$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)+(n+r)C_nx^{n+r-1}-\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^{n+r}=0$

$$\big((r)(r-1)+r\big)C_0x^{r-1}+\sum_{n=1}^{\infty}(n+r)(n+r-1)+(n+r)C_nx^{n+r-1}-\sum_{n=0}^{\infty}c_n\,x^{n+r}=0$$

$(r(r-1)+r)C_0x^{r-1}=0$

$r(r-1)+r=0 \Rightarrow r^2-\cancel{r}+\cancel{r}=0 \qquad \therefore \mathrm{r}=0$

$\sum_{n=1}^{\infty}\Big((n+r)(n+r-1)+(n+r+1)c_n x^{n+r-1}-\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}=0$

$\sum_{k=0}^{\infty}(k+k+1)(k+r)+(k+r+1)c_{k+1}\mathrm{x}^{\mathrm{k+r}}-\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+r}=0$

$\sum_{k=0}^{\infty}((k+r+1)(k+r)+(k+k+1)C_{k+1}-C_k)x^{k+r}=0$

$\big((k+r+1)(k+r)+(k+r)\big)C_{k+1}-C_k=0$

$(k+r+1)(k+r)+(k+r+1)c_{k+1}=C_k$

$$C_{k+1}=\frac{C_k}{(k+r+1)(k+r)+(k+r+1)}$$

$$C_n=\frac{C_{n-1}}{(n+r)(n+r-1)+(n+r)}$$

مثال 6//

$xy''+(3x-1)y'+y=0$

$y=\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r} \qquad y'=\sum_{n=0}^{\infty} C_n(n+r)x^{n+r-1}$

$y''=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-2}$

$x\sum_{n=0}^{\infty} C_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-2}+(3x-1)\sum_{n=0}^{\infty} C_n(n+r)^{n+r-2}$

$+\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r}=0$

$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty} 3C_n(n+r)x^{n+r}$

$-\sum_{n=0}^{\infty} C_n(n+r)x^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r}=0$

$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)-(n+r)C_n x^{n+r-1}$

$+\sum_{n=0}^{\infty} 3(n+r)+1)C_n x^{n+r}=0$

$(r+r-1)-r)c_0 x^{\mathrm{r}-1}+$

$\sum_{n=1}^{\infty}(n+r)(n+r-1)-(n+r))c_n x^{n+r-1}$

$+\sum_{n=0}^{\infty} 3(n+r)+1)c_n x^{n+r}=0$

$r(r-1)-r>c_0 x^{r-1}=0$

$r^2-r-r=0\Rightarrow r^2-2r=0$

$r(r-2)=0\ r=0$

$\sum_{n=1}^{\infty}(n+r)(n+r-1)-(n+r)c_n x^{n+r-1}$

$+\sum_{n=0}^{\infty} 3(n+r)+1)c_n x^{n+r}=0$

$\sum_{k=0}^{\infty}(k+r+1)(k+r)-(k+r+1))C_{k+1}x^{k+r}$

$+\sum_{k=0}^{\infty} 3(k+r)+1)C_k x^{k+r}=0$

$\sum_{k=0}^{\infty}((k+r+1)(k+r)-(k+r+1))C_{k+1}+$

$3(k+r+1)+1)c_k)x^{k+r}=0$

$(k+r+1)(k+r)-(k+r+1))C_{k+1}+3(k+r+1)+1)c_k=0$

$(k+r+1)(k+r)-(k+r+1))c_{k+1}=-3(k+r+1)+1$

$$C_{k+1}=\frac{-3(k+r+1)+1}{(k+\mathrm{r}+1)(k+r)-(k+r+1)}$$

$$C_n=\frac{-3(n+r)+1}{(n+r)(n+r-1)-(n+r)}$$

الخاتمة:

وفي نهاية هذا البحث الذي بذلنا فيه من الجهد ما لم ندخر لغيره، والذي دفعنا فيه من طاقتنا أقصاها لكي يكون هذا البحث شاملا ومستوفيا كل المحاور والموضوعات التي تطرقنا إليها فيه، سائلين المولى أن يكون هذا البحث دليلا ومرجعا لكل باحث مهتم بالبحث في هذا الموضوع (موضوع البحث)، وقد حرصنا على تقديم كافة المعلومات من المراجع الرسمية والموثوقة، كما وحنا كافة النقاط الغامضة في البحث، راجين منكم الصفح عن النقص والخطأ وسائلين الله تعالى أن تكون المغانم من هذا البحث أكثر من المغارم لجميع القراء والمهتمين.

المصادر

١. **محمد بن عبد الرحمن القويز**، صالح عبد الله السنوسي ، محمود احمد عطوة ، مبادئ التحليل الحقيقي - الجزء الاول ، مطابع جامعة الملك سعود ،١١٤١٨ (١٩٩٧م)

٢. **صالح عبد الله السنوسي** ، محمد بن عبد الرحمن القويز، مبادئ التحليل الحقيقي - الجزء الثاني ، مطابع جامعة الملك سعود ١٩٨٨م

٣. **محمد بن عبد الرحمن القويز**، التحليل المركب الجزء الاول ، مطابع جامعة الملك سعود ١٩٨٨م

٤- **د- إسماعيل بوقفة ، د- عايش الهندوة** ، المعادلات التفاضلية حلول وتطبيقات ، الجمهورية اليمنية ، جامعة العلوم والتكنولوجيا ، الطبعة الأولى ١٩٩٩ .

٥- **أ.د. حسن مصطفى العويضي ، د. عبد الوهاب رجب** ، سناء علي زارع ، المعادلات التفاضلية الجزء الأول ، مكتبة الرشد ، الطبعة الأولى ٢٠٠٥ .

٦- **د- رمضان محمد جميله ، أ- حسن محمد غليو** ، المعادلات التفاضلية ، منشورات جامعة الفاتح ، دار الكتاب الجديدة المتحدة ، الطبعة الأولى ٢٠٠٣ .

٧- **د- روحي إبراهيم الخطيب** ، مقدمة في المعادلات التفاضلية، دار المسيرة ، الطبعة الأولى 2012 .

٨- **ريتشارد برونسون** ، المعادلات التفاضلية ، ترجمة أ.د. حسن مصطفى العويضي ، د. عبد الوهاب عباس رجب ، الطبعة الثانية ٢٠٠٦ .

٩- **أ.د. مصطفى حسن محمد** ، المعادلات التفاضلية (النظريات - الحلول - التطبيقات) ، جامعة المنوفية ، دار إيتراك ، الطبعة الأولى ٢٠٠٤ .