جمهورية العراق
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة ديالى
كلية تربية المقداد
قسم الرياضيات

(حل انظمة المعادلات بالمصفوفات)

مشـروع تخرج مقدم الى قسـم الرياضـيات ـ كلية التربية المقداد – جامعة ديالى كجزء من متطلبات نيل شهادة البكالوريوس في الرياضيات.

من قبل
سبأ فاروق عباس كاظم
شهد ناصر سند راشد

بإشراف
دكتور ماهر ناظر

٢٠٢٢ م

١٤٤٣ هـ

قرار المشرف

اشهد بان اعداد هذا المشروع الموسوم

من قبل الدكتور ماهر ناظر

والمعد من قبل الطلبة (سبأ فاروق عباس كاظم – شهد ناصر سند راشد)

وقد تم بأشراف قسم الرياضيات / كلية التربية المقداد / جامعة ديالى وهي جزء من متطلبات نيل شهادة البكالوريوس / الرياضيات

التوقيع/

اسم المشرف/

التربية العلمية/

التاريخ/

الاهداء

ان الفطرة السليمة لبني البشر بنيت على حب الخير للآخرين، والايثار ومن الطبيعي ان يكون لدى كل شـــخص اخلاء يفضـــلهم عن غيرهم نظرا لقيادتهم بتقديم يد العون ومن الواجب شــكرهم وحبذا لوكان بصـــورة كتابية وهذا هو المناط من جزء الاهداء في البحث العلمي وينبغي للباحثين ان يهتموا به.

بسم الله الرحمن الرحيم

﴿ اللّهُ لاَ إِلَـــهَ إِلاَّ هُوَ الْحَيُّ الْقَيُّومُ لاَ تَأْخُذُهُ سِنَةٌ وَلاَ نَوْمٌ لَّهُ مَا فِي السَّمَاوَاتِ وَمَا فِي الأَرْضِ مَن ذَا الَّذِي يَشْــفَعُ عِنْدَهُ إِلاَّ بِـإِذْنِـهِ يَعْلَمُ مَا بَيْنَ أَيْدِيهِمْ وَمَا خَلْفَهُمْ وَلاَ يُحِيطُونَ بِشَـيْءٍ مِّنْ عِلْمِهِ إِلاَّ بِمَا شَـاء وَسِـعَ كُرْسِـيُّهُ السَّـمَاوَاتِ وَالأَرْضَ وَلاَ يَؤُودُهُ حِفْظُهُمَا وَهُوَ الْعَلِيُّ الْعَظِيمُ ﴾

صدق الله العظيم

سورة البقرة: الآية (٢٥٥)

الشكر والتقدير

نحمد الله عز وجل الذي وفقنا في اتمام هذا البحث العلمي والذي ألهمنا الصحة والعافية والعزيمة.

فالحمد الله حمدا كثيرا

نتقدم بجزيل الشكر والتقدير الى الدكتور المشرف (ماهر ناظر) على كل ما قدمه لنا من توجيهات ومعلومات قيمة ساهمت في اثراء موضوع دراستنا في جوانبها المختلفة كما نتقدم بجزيل الشكر الى اعضاء لجنة المناقشة الموقرة. كما نقوم بشكر والدينا. كما نتقدم بالشكر الجزيل لاساتذة قسم الرياضيات.

المحتويات

الفصل الاول

المقدمة

1-1 المعادلات التفاضلية

هي محاولة تربط دالة واحدة او اكثر ومشتقاتها في التطبيقات تمثل الدوال عموما كميات مادية وتمثل المشتقات معدلات التغيير الخاصة بها وتعرف المعادلة التفاضلية العلاقة بين الاثنين نظرا لان هذه العلاقات شائعة جدا. تلعب المعادلات التفاضلية دورا بارزا في العديد من التخصصات بما في ذلك الهندسة والفيزياء والاقتصاد وعلم الاحياء.

تتكون دراسة المعادلات التفاضلية بشكل اساسي من دراسة حلولها (مجموعة من الوظائف التي تلبي المعادلة) وخصائص حلولها وابسط المعادلات التفاضلية يمكن حلها بواسطة صيغ واضحة ومع ذلك قد يتم تحديد العديد من خصائص حلول معادلة تفاضلية معينة دون حسابها بالضبط.

2-1 التاريخ

ظهرت المعادلات التفاضلية اولا مع اختراع حساب التفاضل والتكامل من قبل نيوتن ولايبنز، في الفصل الثاني من عمله (1671) قام اسحاق نيوتن في كتابة طريقة التدفقات بإدراج ثلاثة انواع من المعادلات التفاضلية، مثل

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad , \quad x_1 \frac{dy}{dx_1} + x_2 \frac{dy}{dx_2} = y$$

وفي عام (1695) اقترح ياكوب بيرنولي معادلة بيرنولي التفاضلية.

معادلة تفاضلية عادية في شكلها التالي:- $y' + P(x)y = Q(x)y^n$

التي حاول لايبنز في العام التالي حلها من خلال تبسيطها.

تاريخيا. درست معضلة اهتزاز حبل ما. حبل الة موسيقية مثالا من طرف كل من لورن والمبير وليونهارد اويلر و دانييل برنولي وجوزيف لوي لاغرانج. وفي عام 1746 اكتشف لورن دالمبير معادلة الموجة احادية البعد وبعد عشر سنيين. اكتشف اويلر معادلة الموجة ثلاثية الابعاد.

تم تطوير معادله اويلر-لاغرانج في خمسـينات القرن الماضــي من قبل اويلر-لاغرانج فيما يتعلق بدراســاتهم لمشـكلة التاوتكرون. هذه هي مشـكلة تحديد منحني تسـقط عليه الجسـيمات الموزونة الى نقطة ثابتة في فترة زمنية محددة. بغض النظر عن نقطه البداية. قام لاغرانج بحل هذه المشـكلة في عام ١٧٥٥ وارسـل الحل الى اويلر. قام كلاهما بتطوير طريقة لاغرانج وتطبيقها على الميكانيكا. مما أدى إلى صياغة ميكانيكا لاغرانج.

في عام ١٨٢٢ نشر فورييه عمله حول تدفق الحرارة في كتابة النظرية التحليلية للحرارة حيث استند في تفكير على قانون نيوتن للتبريد، اي ان تدفق الحرارة بين جزيئين متجاورين يتناســب مع اختلاف بسـيط للغاية في درجات الحرارة. يتم الان تدريس هذه المعادلة التفاضلية الجزئية لكل طالب في الفيزياء الرياضية.

3-1 طرق حل المعادلات التفاضلية

توجد طرق عديدة لحل المعادلات التفاضــلية منها بعض الطرق المســتخدمة لحل المعادلات التفاضــلية من الرتبة الاولى:-

- فصل المتغيرات:- وذلك بفصل المتغيرات x, dx في جهة و y, dy في جهة اخرى في جانبي المعادلة ومن ثم القيام بمكاملة الطرفين لتحصل على حل على شكل دالة عادية y=f(x).
- التعويض.
- المعادلات الخطية
- برنولي.

بعض الطرق المستخدمة لحل المعادلات التفاضلية من الرتبة n :

1- اختزال الرتبة

2- تحديد المعاملات

3- مبادلة المتغيرات

4- طريقه كوشي- اويلر لحل المعادلات التي فيها رتبة المشتقة هو نفس اس معاملتها.

5- طريقه المتتابعات الاسية.

6- طريقة المصفوفة

ويوجد اكثر من اســلوب للحل العددي وكذلك التحليلي كما توجد معادلات مشـــهوره مثل معادلات لا بلاس وبرنولي وغيرهم.

4-1 درجة التفاضلية

تتحدد درجه المعادلة التفاضــلية حســب اس المشــتق ذو الرتبة الأعلى. مثلا اذا كانت المعادلة التفاضــلية من الرتبة الثالثة. اي ان اعلى تفاضل فيها هو التفاضل الثالث. فدرجة المعادلة تتحدد حسب اس هذا التفاضل فاذا كان مرفوعا للاس ٥ مثلا تكون المعادلة من الدرجة الخامسة وهكذا.

5-1 انواع المعادلات التفاضلية

يمكن تقسيم المعادلات التفاضلية الى قسمين:-

- معادلات تفاضلية عادية/ تحتوي على توابع ذات متغير مستقل واحد ومشتقات هذا التغيير.
- معادلات تفاضليه جزئية/ تحتوي دوال رياضية لاكثر من متغير مستقل مع مشتقاتها الجزئية.
- معادلات الخطية والغير الخطية/ كل من المعادلات التفاضــلية العادية والجزئية يمكن ان تصــنف الى خطية وغير خطية وتكون المعادلة التفاضلية خطية بشرطين:-

  - اذا كانت معاملات المتغير التابع والمشتقات فيها دوال في المتغير المستقل فقط او ثوابت.

  -اذا كان متغير يتابع المشتقات غير مرفوع لاسس اي ان كلها من الدرجة الأولى.

وتكون غير خطية ما عدا ذلك.

كل معادله تفاضـليه خطيه هي من الدرجة الاولى بينما ليسـت كل المعادلات التفاضـلية من الدرجة الاولى هي خطية لان الدرجة تتحدد حسـب اس التفاضـل الاعلى ومن الممكن ان تكون التفاضـلات الاقل مرفوعة لاسـس غير الواحد دون ان يؤثر ذلك على الدرجة. وهذا يخل الشـــرط المعادلة الخطية. معادلة برنولي معادلة من الرتبة الاولى والدرجة الاولى وليســت معادلة خطية وكذلك يمكن حل المعادلات التفاضـــلية باســتخدام المصفوفات والتعرف المصفوفات كالاتي:-

6-1 المصفوفات

المصـفوفات/ هي عبارة عن جدول من العناصـر هذه العناصـر تحتويها المصـفوفه قد تكون اعداد حقيقيه او اعداد مركبه قد تكون دوال وعرفت ايضـا هي مجموعه مستطيله من الاعداد او الرموز منتظمه بشكل اعمده وصـفوف مكتوبه بين قوسـين مربعين او قوسـين هلالين ويلمز للمصـفوفه باحد الاحرف الانجليزيه الكبيره مثال:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

7-1 تاريخ المصفوفات

تم عام ١٦٨٣ نشر بحث عن المصفوفات من قبل الرياضي الياباني سيكر تاكا او.

وفي عام وفي عام ١٦٩٣ نشر بحوث متعلقة بالمصفوفات العالم الالماني جو تغريد لاينتز.

عام ١٨٤٨ تم ابتكار مصطلح المصفوفة عن طريق جي جي سيلفستر كأسم لمجموعة مرتبة من الأرقام.

عام ١٨٣٥ قدم آرثر كايلي المصفوفة على انها تمثيل لعناصر خطية.

8-1 نظرية المصفوفات

هي فرع الرياضيات الذي يركز على دراسة المصفوفات فعليا ويعتبر احد فروع الجبر الخطي ثم نمى ليغطي موضوعات ذات علاقه بالنظرية المخططات والجبر والتوافقيات والاحصاء مثل:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2m} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nm} \end{bmatrix} = [a_{ij}] ,\ \ i=1,2,\ldots n;\quad j= 1,2,\ldots.,m$$

حيز المصــفوفة هو عدد الصــفوف والأعمدة المكونة لهذه المصــفوفة التي تحتوي على (M) من الصــفوف و(N) ومن الأعمدة والحيز(MxN) وتكتب A(MxN).

يشار عادة إلى عناصر المصفوفة بحرف صغير اسفله رقمين الأول يشير الى رقم السطر والثاني يشير الى رقم العمود.

9-1 انواع المصفوفات

اولا/ المصفوف المربعة/ ان المصفوفة المربعة تكون عدد صفوفها مساويا لعدد اعمدتها.

ثانيا/ المصفوفة الصفرية/ هي مصفوفه تكون جميع مدخلاتها تساوي اصفارا. ثالثا/ المصفوفة الأحادية/ هي مصفوفة تتألف من مدخلة واحدة فقط اي تتألف من عنصر واحد فقط.

رابعا/ مدور المصفوفة/ هي مصفوفة من الدرجة (mxn) فانه عنده تحويل صفوفها الى اعمدة ينتج مصفوفة من الدرجة (mxn) وتسمى مدور او منقول المصفوفة ويرمز لها بالرمز(A^T).

خامسا/ المصفوفة المتماثلة/ هي المصفوفة الحقيقية المربعة A مماثلة اذا وفقط اذا كانت مساوية لمدورها وبالرموز $A^T=A$.

سادسا / المصفوفة المتماثلة تخالفيا/ هي المصفوفة الحقيقية المربعة A متماثله خلفا تخالفيا اذا وفقط اذا كان $A^T=A$. سابعا/ المصفوفة المثلثية/ المصفوفة المربعة مصفوفة اذا وفقط اذا كانت جميع مدخلاتها فوق القطر الرئيسي او تحت القطر الرئيسي تساوي صفرا.

ثامنا/ المصفوفة القطرية/ ان المصفوفة المربعة انها مصفوفة قطرية اذا وفقط اذا كانت جميع مدخلاتها فوق وتحت القطر الرئيسي تساوي صفرا.

تاسعا/ المصفوفة المستطيلة/ وهي لا يتساوى فيها عدد الصفوف مع عدد الأعمدة.

عاشرا/ المصفوفة السطرية/ وهي تتكون من صف واحد فقط وسميت بهذا الاسم لان جميع عناصرها تقع على سطر واحد.

احدى عشر/ المصفوفة العمودية /وهي تتكون من عمود واحد فقط وسميت بهذا الاسم لان جميع عناصرها تقع في عمود واحد.

أثنى عشر/ المصفوفة الواحدية/ هي مصفوفة قطرية جميع عناصرها القطر الرئيسي فيها هو العدد واحد.

10-1 التطبيقات على المصفوفات

يوجد العديد من التطبيقات لهذه المصفوفات سواء كان في الرياضيات او غيرها من العلوم، حيث يمكن الاستفادة منها من خلال تمثيل مضغوط لمجموعة من الأرقام في المصفوفة، ويكون ذلك من خلال الاعتماد على مجموعة من البدائل لأية عملية تحتاج إلى حسابات معقدة.

11-1 العمليات على المصفوفات

1- جمع المصفوفات/ هي عملية جمع مصفوفة مع مصفوفة اخرى، بشرط أن تكون أبعاد المصفوفة الأولى مساوية لأبعاد المصفوفة الثانية.

2- طرح المصفوفات/ شرط طرح المصفوفة هو نفس شرط الجمع حيث يشترط ان تكون المصفوفة التي يتم جمعها او طرحها لهما نفس القوة (nxm).

3- ضرب المصفوفات/ لضرب مصفوفتين فإن شرطا يجب توفره وهو عدد الاعمدة الموجودة في المصفوفة الأولى يجب أن يكون مساويا لعدد الصفوف الموجودة من المصفوفة الثانية.

12-1 معكوس المصفوفات

معكوس المصفوفات/ من الأمور المهمة في جبر المصفوفات إيجاد معكوس المصفوفة ان نتيجة حاصل ضرب مصفوفة في معكوسها يساوي المصفوفة المحايدة. (identity matrix).

يعتبر حساب المصفوفات من الادوات الرياضية الهامة الدراسة مواضيع مختلفة مثل الكهرباء والكيمياء والاحصاء والبرمجيات إضافة إلى الرياضة الدجتة.

الفصل الثاني

1-2 حل انظمة المعادلات بالمصفوفات

لاحظ اننا لو اجرينا العمليات الصفية الأولية على نظام المعادلات خطية فإننا نحصل في كل مرة على نظام مكافئ في الحقيقة هذا هو بالضبط ما نحن بصدد القيام به الا اننا سنقدم اولا العلاقة الوثيقة بين انظمة المعادلات الخطية والمعادلات المصفوفية حيث يتسنى لنا استخدام الصيغة الدرجية الصفية المختزلة للمصفوفة التي قم بدراستها السابقة لمساعدتنا على حل انظمة المعادلات الخطية.

دعنا نعود الى نظام المعادلات الخطية (١) لاحظ اننا نستطيع استبدال هذا النظام بمعادلة مصفوفة على الصيغة AX=B.حيث:-

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2m} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nm} \end{bmatrix}, x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}, \ B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_n \end{bmatrix}$$

المصفوفة A تسمى مصفوفة المعاملات، B مصفوفة الثوابت،X مصفوفة المجاهيل لاحظ ان عدد الصفوف A هو عدد المعاملات النظام وعدد عمدتها هو عدد مجاهيل النظام.

سنقوم الان بتوسيع على المصفوفة A وذلك بإضافة B كعمود جديد لنحصل على مصفوفة جديدة نرمز لها بالرمز [A|B] وتسمى المصفوفة الموسوعة (augmented matrix) لنظام المعادلات.

نقدم الآن طريقتين لحل النظام (١) باستخدام المصفوفة الموسعة [A|B] هما:-

2-2 طريقة جاوس

طريقة جاوس (Gauss method) لحل النظام (١) باستخدام طريقة جاوس نقوم بوضع المصفوفة الموسوعة [A|B] على الصيغة الدرجية الصفية ومن ثم نحصل على نظام جديد من المعادلات يكافئ النظام الاصلي ولكنه ابسط منه (في الحقيقة النظام الجديد هو نظام مثلثي) ولذا فانه يكون من السهل الحصول على حل للنظام.

3-2 طريقة جاوس – جوردان

طريقة جاوس – جوردان (Gauss-Jordan method) هذه الطريقة مماثلة لطريقة جاوس ولكننا في هذه الحالة المصفوفة [A|B] على الصيغة الدرجية الصفية المختزلة بدلا من الصيغة الدرجية الصفية.

قبل ان نقدم امثلة على طريقتي جاوس وجاوس- جوردان يجب أن نلفت الانتباه إلى أنه ليس بالضرورة وجود حل انظمة المعادلات وهذا ما يقودنا الى التعريف التالي.

تعريف/ يكون نظام المعادلات الخطية متسقا او متألقا (consistent) اذا كان له حل ويكون غير متسق اذا يكن له حل.

مثال1

استخدام طريقة جاوس ثم جاوي-جوردان لحل النظام:-

$$2x_2+4x_3=3$$

$$x_1-3x_2+5x_3= 1$$

$$3x_1-x_2-x_3= 1$$

أ) طريقة جاوس/ المصفوفة الموسعة لهذا النظام هي:-

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

الآن:

$$[A|B] \xrightarrow{R_{12}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-3\,R_{13}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 8 & -16 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{½\,R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3/2 \\ 0 & 8 & -16 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{-8\,R_{23}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3/2 \\ 0 & 0 & -32 & -14 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-1/32\,R_5} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 7/6 \end{array}\right]$$

والمصفوفة الموسعة الاخير على الصيغة الدرجية الصفية وبالتالي فإن النظام المعطى يكافئ النظام

$$x_1-3x_2+5x_3=1$$
$$x_2+2x_3=3/2$$
$$x_3=7/6$$

بالتعويض عن قيمة x_3 في المعادلة الثانية نجد ان $x_2=5/8$ واخيرا بالتعويض عن قيمتي x_2 و x_3 في المعادلة الاولى نجد ان $x_1=11/16$ وعليه فان الحل الوحيد للنظام هو (11/16, 5/8,7/16)

ب) طريقة جاوس – جوردان

نكمل حيث انتهينا في الفقرة (أ) لنضع المصفوفة الموسعة على صيغة درجية صفية مختزلة الان:-

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -3 & 5 & 1\\0 & 1 & 2 & 3/2\\3 & 0 & -32 & -14\end{array}\right]\xrightarrow{3\,R_{21}}\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 11 & 11/2\\0 & 1 & 2 & 3/2\\0 & 0 & -32 & -14\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-1/32\,R_3}\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 11 & 11/2\\0 & 1 & 2 & 3/2\\0 & 0 & -32 & 7/16\end{array}\right]\xrightarrow[-2\,R_{32}]{-11\,R_{31}}\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 11/16\\0 & 1 & 0 & 5/8\\0 & 0 & 1 & 7/16\end{array}\right]$$

فإن النظام المعادلات المكافئ للنظام المعطى هو: $x_3=7/16,\ x_2=5/8,\ x_1=11/16$ ويكون الحل الوحيد للنظام هو (11/16, 5/8,7/16) وهذا يتفق مع ما وجدناه في الفقرة (أ).

مثال2

استخدام طريقة جاوس ثم جاوي-جوردان لحل النظام:-

$$x_1-3x_2+2x_3+x_4=2$$
$$3x_1-9x_2+10x_3+2x_4=9$$
$$2x_1-6x_2+4x_3+2x_4=4$$
$$2x_1-6x_2+8x_3+x_4=7$$

أ) طريقة جاوس:-

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & -9 & 10 & 2 & 9 \\ 2 & -6 & 4 & 2 & 4 \\ 2 & -6 & 8 & 1 & 7 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-2R_{14}]{-3R_{12}\ \ -2R_{13}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{4}R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-4R_{24}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

النظام المعادلات المكافئ للنظام المعطى هو:

$$x_1-3x_2+2x_3+x_4=2$$

$$x_3-\frac{1}{4}x_4=\frac{3}{4}$$

لاحظ ان هذا النظام يحتوي على معادلتين واربعة مجاهيل ولحله يلزم اعطاء مجهولين قيمتين اختياريتين وايجاد المجهولين الاخرين بدلالتهما لذلك بوضع $x_2=s$, $x_4=t$ فإننا نجد ان:

$$x_1=3s-\frac{3}{2}r+\frac{1}{2},\ \ x_3=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}r$$

وعليه فإن للنظام عددا غير منته من الحلول ومجموعة الحل هي:

$$s=\{(3s-\frac{3}{2r}+\frac{1}{2}, s, \frac{3}{4}+=\frac{1}{4}r, r): r, s\in R\}$$

ب) طريقة جاوس – جوردان

نكمل حيث انتهينا في الفقرة (أ) لنضع المصفوفة الموسعة على صيغة درجية صفية مختزلة فنجد ان:-

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & 3/4 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-2R_{24}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 0 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

هي الصيغة الدرجية المختزلة للمصفوفة الموسعة ويكون نظام المعادلات المكافئ هو:-

$$x_1-3x_2+3/2\ x_3+ x_4= ½$$

$$x_3- 1/4\ x_4=3/4$$

لذلك بوضع $x_2=s, x_4=r$ والتعويض نحصل على مجموعة الحل هي:-

وهو يتفق على ما وجدناه في الفقرة (أ)

$$s= \{(3s- \frac{3}{2r}+ \frac{1}{2} , s , \frac{3}{4} += \frac{1}{4} r, r): r, s\in R\}$$

مثال3

استخدام طريقة جاوس ثم جاوس-جوردان لحل النظام:-

$$x_1+x_3=1$$

$$x_2-x_3=-1$$

$$2x_1+x_2+ x_3=2$$

أ) طريقة جاوس

$$[A|B] =\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & -1\\ 2 & 1 & 1 & 2\end{array}\right] \xrightarrow{-2R_{13}} \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 0\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-1R_{23}} \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

النظام المكافئ المعطى هو:

$$x_1+x_3=1$$

$$x_2-x_3=-1$$

$$0=1$$

وهذا غير ممكن وبالتالي فإنه لا يوجد حل لهذا النظام:-

ب) طريقة جاوس – جوردان

لاحظ ان المصفوفة الموسعة الاخيرة على الصيغة الدرجية الصفية المختزلة ولذا فإننا نحصل على النتيجة التي وجدناها في الفقرة (أ).

من الامثلة الثلاثة السابقة وجدنا ان نظام المعادلات قد يكون متسقا او غير متسقا فإما ان يكون له حل وحيداو عدد غير منته من الحلول وهذا ليس من قبيل المصادفة ولكنه واقع تؤكده المبرهنة التالية.

مبرهنة (1)

اذا كان نظام المعادلات الخطية $AX=B$ متسقا فإنه اما ان يكون له حل وحيد او عدد غير منته من الحلول:

البرهان/

لنفرض ان للنظام اكثر من حل ولنفرض ان x_2, x_1 حلان مختلفان سنبرهن ان $x_1+k(x_1- x_2)$ حل للنظام لكل $K\in R$ وبالتالي فإن له عددا غير منته من الحلول الان:

$$A(x_1+k\,(x_1- x_2)) = Ax_1+ K(Ax_1)- K(Ax_2)= B+KB-KB=B$$

وعليه فإن $x_1+k(x_1- x_2)$ حل النظام لكل $K\in R$.

<u>ملحوظ</u>

لاحظ ان الامثلة الثلاثة السابقة كانت الانظمة معادلات تتكون من عدد من المعادلات مساو لعدد المجاهيل.

نقدم الان امثلة اخرى الانظمة يختلف فيها المعادلات عن عدد المجاهيل.

مثال4

استخدام طريقة جاوس-جوردان لحل النظام:-

$$3x_1-2x_2=4$$
$$5x_1+x_2= 1$$
$$9x_1+7x_2= -5$$

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 1 \\ 9 & 7 & -5 \end{array}\right] \xrightarrow{1/3\ R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2/3 & 4/3 \\ 5 & 1 & 1 \\ 9 & 7 & -5 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-9\ R_{13}]{-5\ R_{12}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2/3 & 4/3 \\ 0 & 13/3 & -17/3 \\ 0 & 13 & -17 \end{array}\right] \xrightarrow{3/13\ R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2/3 & 4/3 \\ 0 & 1 & -17/3 \\ 0 & 13 & -17 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-13\ R_{23}]{2/3\ R_{21}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 6/13 \\ 0 & 1 & -17/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

النظام المكافئ للنظام المعطى هو: x_2=-17/3, x_1=6/13 فأن للنظام حلا وحيدا هو (6/13, -17/13)=s

مثال5

استخدام طريقة جاوس لحل النظام:-

$$3x_1-2x_2=4$$

$$9x_1+6x_2= 12$$

$$-36x_1-24x_2= -48$$

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 4 \\ 9 & 6 & 12 \\ -36 & -24 & -48 \end{array}\right] \xrightarrow{1/3\ R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2/3 & 4/3 \\ 9 & 6 & 12 \\ -36 & -24 & -24 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[36\ R_{13}]{9\ R_{13}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2/3 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

النظام المكافئ للنظام المعطى هو: $x_1+2/3\ x_2=4/3$

وبالتعويض عنx_2= 1 وايجاد x_1 نجد ان مجموعة حل النظام هي

$$s= \{(\frac{4}{3} - \frac{3}{2}\ t, t): t \in R\}$$

ولهذا فإن للنظام عددا غير منته من الحلول.

مثال6

استخدام طريقة جاوس لايجاد حل للنظام:-

$$x_1-x_2=-1$$

$$x_1+3x_2= -1$$

$$x_1+x_2= 1$$

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[-1\ R_{13}]{-1\ R_{12}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{1/4\ R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-1\ R_{23}]{-1\ R_{21}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{1/2\ R_3} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

النظام المكافئ للنظام المعطى هو:

$$x_1=-1$$

$$x_2=0$$

$$0=1$$

لذا فانه لا يوجد حل لهذا النظام.

مثال 7

استخدام طريقة جاوس-جوردان لحل النظام

-

$$2x_1-2x_2+6x_3=0$$

$$-2x_1+x_2+3x_3=1$$

$$[A|B]=\left[\begin{array}{ccc|c}5 & -2 & 6 & 0\\ -2 & 1 & 3 & 1\end{array}\right] \xrightarrow{1/5\,R_1} \left[\begin{array}{ccc|c}1 & -2/5 & 6/5 & 0\\ -2 & 1 & 3 & 1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{2\,R_{12}} \left[\begin{array}{ccc|c}1 & -2/5 & 6 & 0\\ 0 & 1/5 & 27/5 & 1\end{array}\right] \xrightarrow{5\,R_2} \left[\begin{array}{ccc|c}1 & -2/5 & 6/5 & 0\\ 0 & 1 & 27 & 5\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{2/5\,R_{21}} \begin{bmatrix}1 & 0 & 12 & 2\\ 0 & 1 & 27 & 5\end{bmatrix}$$

النظام المكافئ للنظام المعطى هو:

$$x_1+12x_3=2$$

$$x_1+27x_3=5$$

وبالتعويض عن $x_3=1$ نجد ان مجموعة حل النظام هي

$s=\{(2-12t,\ 5-27t,\ t):\ t\in R\}$

ولذا فان للنظام عدد غير منته من الحلول.

مثال 8

استخدام طريقة جاوس-جوردان لحل النظام

$$x_1-2x_2+x_3=3$$

$$x_1-2x_2+x_3=4$$

$$[A|B]=\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & 3\\ 1 & -2 & 1 & 4\end{array}\right]\xrightarrow{-1\,R_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\xrightarrow{-3\,R_{21}}\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

النظام المكافئ للنظام المعطى هو:

$$x_1-2x_2+x_3=0$$

$$0=1$$

لذا فانه لا يوجد حل لهذا النظام.

ملاحظة:-

اذا كان عدد مجاهيل النظام اكبر من عدد معادلاته فإنه اما ان يكون للنظام عدد غير منته من الحلول كما في المثال(7) وان النظام غير متسق كما في المثال (8) ولكن ان يكون للنظام حل وحيد حيث نستطيع ان نرى ذلك بالتمعن في طريقة جاوس.

مبرهنة 2

لتكن A مصفوفة من الدرجة n. عندئذ العبارات التالية جميعها متكافئة:

أ) A لها معكوس

ب) للنظام $Ax=B$ حل وحيد لكل مصفوفة B من الدرجة $nx1$.

ج) النظام $Ax=B$ متسق لكل مصفوفة B من الدرجة $nx1$.

البرهان:-

أ) $\longleftarrow$ ب:- لنفرض ان A لها معكوس بما ان $A(A^{-1}B)=B$ فان $x= A^{-1}B$ حل للنظام $Ax=B$ ولاثبات الوحدانية نفرض ان x_1 حل اخر للنظام.

عندئذ $Ax_1=B$ ولذا فان $A^{-1}(Ax_1)= A^{-1}B$ اي ان $x_1= A^{-1}B$ وبالتالي فان للنظام حلا وحيدا.

ب) $\longleftarrow$ ج:- واضح

ج) $\longleftarrow$ أ) نفرض الان ان $Ax=B$ متسق لكل مصفوفة B من الدرجة $nx1$. عندئذ جميع الانظمة التالية متسقة.

$$Ax=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\.\\.\\.\\0\end{bmatrix}\ .\ Ax=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\.\\.\\.\\0\end{bmatrix}\ \ldots\ Ax=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\.\\.\\.\\1\end{bmatrix}$$

لنفرض اذن ان $x_1\ x_2\ldots xn$ حلول لهذه الانظمة على التوالي ولتكن D هي المصفوفة من الدرجة n التي تتكون اعمدتها من هذه الحلول اي ان $D=[\ x_1|x_2|\ldots xn]$

$$AD=[Ax_1\ |Ax_2|\ldots Axn]=\begin{bmatrix}1&0&.&.&0\\0&1&.&\cdot&0\\0&0&\vdots&\ddots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\\0&0&.&\cdot&1\end{bmatrix}$$

الان: بما ان $AD=1$ فأن $|A||D|=1$ ومن ثم $|A|\neq 0$ اي ان A لها معكوس ربما $AD=1$

فإن $A^{-1}(AD)=A^{-1}$ وبالتالي فإن $D=A^{-1}$

مثال 9

استخدم مبرهنة (2) لحل النظام

$$x_1-2x_2+2x_3=3$$

$$2x_1+x_2+x_3=0$$

$$x_1+\quad +x_3=-2$$

مصفوفة المعاملات هي: $A=\begin{bmatrix}1&-2&2\\2&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}$

وباستخدام العمليات الصفية او المصفوفة المصاحبة نجد ان

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}1&2&-4\\-1&-1&3\\-1&-2&5\end{bmatrix}$$

وبالتالي فان للنظام حلا وحيدا وهذا الحل هو

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=A^{-1}B=\begin{bmatrix}1&2&-4\\-1&-1&3\\-1&-2&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\0\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11\\-9\\-13\end{bmatrix}$$

من المبرهنة (2) نحصل على النتيجة التالية

نتيجة 3

اذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n فان العبارات التالية متكافئة:

1) A لها معكوس

2) الصيغة الدرجية المختزلة للمصفوفة A هي 1n.

3) يمكن كتابة A كحاصل ضرب عدد منته من المصفوفات الاولية.

4) للنظام Ax=B حل وحيد لكل مصفوفة B من الدرجة nx1.

5) للنظام Ax=B متسق لكل مصفوفة B من الدرجة nx1.

6) $\det A \neq 0$

تمارين (1 ,2)

1) في التمارين من (1) الى (5) عين جميع حلول انظمة المعادلات الخطية مستخدما طريقة جاوس ثم طريقة جاوس – جوردان.

1) $x+y=1$, $x-y=0$

2) $x+2y=2$, $x+4y=-1$

3) $3x+7y-3z=2$, $2x+5y+z=-4$, $2x+6y+10z+3$

4) $3x+7y-3z=2$, $2x+5y+z=-4$, $2x+6y+10z=-20$

5) $x+y+z=4$, $2x+5y-2z=3$, $x+7y-7z=5$

2) عين قيم كل من a,b التي من اجلها يكون للنظام التالي حل وحيد عدد لا نهائي من الحلول. لا يوجد له حل.

$x+by=-1$

$Ax+2y=5$

3) حل النظام التالي:-

$x^2+xy-y^2=1$

$2x^2-xy+3y^2=13$

$x^2+3xy+2y^2=0$

الفصل الثالث

1-3 حل المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات

كثير من الظواهر في الحياة الطبيعية يمكن وصفها والتعبير عنها باسلوب رياضي. هنالك الكثير من مسائل العلوم الاجتماعية تتضمن عدة متغيرات وتتضمن علاقات هذه المتغيرات مع بعضها وحيث ان الدوال الخطية تعتبر من اسهل الدوال من حيث التعامل معها وتكون نماذج مرضية. هنا في هذا الفصل سنتطرق الى دراسة طرق حل نظام من المعادلات الخطية والتي تتضمن على بعض المجاهيل. يمكن التعبير عن المعادلات الخطية بالصورة التالية

$a_1x_1+ a_2x_2+\ldots..+ a_nx_n=b$

حيث ان $x_1, x_2,\ldots x_n$ تمثل n من المتغيرات و $a_1, a_2,\ldots a_n$ تمثل n من الثوابت الحقيقية ولا تشمل المعادلات الخطية حواصل الضرب و جذور للمتغيرات وكذلك لا تظهر كدلائل لدوال مثلثية او لوغارتيمية او اسية عندما يكون عدد المعادلات m وعدد المجاهيل n فاننا نكتب المعادلات كما يلي

$$a_{11}x_1+ a_{12}x_2+\ldots..+ a_{1n}x_n=b_1$$
$$a_{21}x_1+ a_{22}x_2+\ldots..+ a_{2n}x_n=b_2$$
$$.$$
$$.$$
$$a_{m1}x_1+ a_{m2}x_2+\ldots..+ a_{mn}x_n=b_n$$

حيث ان $x_1, x_2,\ldots x_n$ تمثل n من المتغيرات و$a_{ij},(j= 1,2,\ldots n, i=1,2,\ldots.m)$ b_i, تمثل n من ثوابت معلومة.

ويمكن التعبير عن مجموعة المعادلات الخطية اعلاه بالصورة التالية:-

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

او بشكل اكثر اختصاصا

$$Ax=b$$

حيث تسمى المصفوفة $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{bmatrix}$ بمصفوفة المعاملات

و $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ متجه يمثل المتغيرات

و $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ هو عمود الثوابت الاطراف اليمنى من المعادلات

مثال 1

المعادلات التالية هي معادلات خطية مكونة من ثلاث معادلات ومتغيرين

3x-y=5

X+2y=0

-x-5y=6

ويمكن كتابتها بصيغة المصفوفات بالصورة التالية

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

2-3 طرق حل المعادلات الخطية

هناك عدة طرق لحل المعادلات الخطية منها

1-2-3 طريقة معكوس المصفوفة

اذا كان Ax=b نظاما للمعادلات الخطية المكون من n من المعادلات اذن من هذه المعطيات يكون للنظام حل واحد وهذا الحل هو

$$x=A^{-1} b$$

مثال1

حل المعادلات الخطية بطريقة معكوس المصفوفة

2x+8y=-4

X+3y=5

تكتب المعادلات اعلاه بصيغة المصفوفة

Ax=b

$$\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = -2$$

adj (A)= $\begin{bmatrix} 3 & -8 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

A^{-1}= $\frac{1}{|A|}\ adj\ (A)$

A^{-1}= $\frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 3 & -8 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/2 & 4 \\ 1/2 & -1 \end{bmatrix}$

ويكون الحل الاتي

x=A^{-1} b= $\begin{bmatrix} -3/2 & 4 \\ 1/2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix}$

(-3/2)*(-4)+(4*5)=26

(1/2)*(-4)+(-1*5)=-7

وبذلك فإن x=26 ,y=-7

مثال2

حل المعادلات الخطية بطريقة معكوس المصفوفة

3x-y=2

x+y=5

تكتب المعادلات اعلاه بصيغة المصفوفة

Ax=b

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 4$$

adj (A)= $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

A^{-1}= $\frac{1}{|A|}\ adj\ (A)$

A^{-1}= $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 \\ -1/4 & 3/4 \end{bmatrix}$

ويكون الحل الاتي

x=A^{-1} b= $\begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 \\ -1/4 & 3/4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$

(1/4)*(2)+(1/4*5)=7/4

(-1/4)*(2)+(3/4*5)=13/4

وبذلك فإن y=13/4, x=7/4

مثال3

حل المعادلات الخطية التالية بطريقة معكوس المصفوفة

x+2y+3z=5

2x+5y+3z=3

x+8z=17

تكتب المعادلات اعلاه بصيغة المصفوفة

Ax=b

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{vmatrix} = -1$$

$a_{11}=(+)\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 40$

$a_{12}=(-)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = -13$

$a_{13}=(+)\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -5$

$a_{21}=(-)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = -16$

$a_{22}=(+)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 5$

$a_{23}=(-)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$

$a_{31}=(+)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -9$

$a_{32}=(-)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3$

$a_{33}=(+)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1$

adj (A)= $\begin{bmatrix} 40 & -16 & -9 \\ -13 & 5 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\ adj\ (A)$

$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 40 & -16 & -9 \\ -13 & 5 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

ويكون الحل الاتي

$x = A^{-1} b = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix}$

(-40)*(5)+(16*3)+(9*17)=1

(13)*(5)+(-5*3)+(-3*17)=-1

(5)*(5)+(-2*3)+(-1*17)=2

وبذلك فإن z=2, y=-1,x=1

مثال4

حل المعادلات الخطية التالية بطريقة معكوس المصفوفة

x+y-z=0

2x+y+z=7

3x-y+2z=7

تكتب المعادلات اعلاه بصيغة المصفوفة

Ax=b

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 7$$

adj (A)= $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -3 \\ -5 & 4 & -1 \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\ adj\ (A)$

$$A^{-1}=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ -1 & 5 & -3\\ -5 & 4 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3/7 & -1/7 & 2/7\\ -1/7 & 5/7 & -3/7\\ -5/7 & 4/7 & -1/7\end{bmatrix}$$

ويكون الحل الاتي

$$x=A^{-1}b=\begin{bmatrix}3/7 & -1/7 & 2/7\\ -1/7 & 5/7 & -3/7\\ -5/7 & 4/7 & -1/7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 7\\ 7\end{bmatrix}$$

(3/7)*(0)+(-1/7*7)+(2/7*7)=1

(-1/7)*(0)+(5/7*7)+(-3/7*7)=2

(-5/7)*(0)+(4/7*7)+(-1/7*7)=3

وبذلك فإن x=1 ,y=2 ,z=3

2-2-3 طريقة قاعدة كرامر

اذا كان Ax=b نظاما للمعادلات الخطية مكون من n من المتغيرات بحيث ان $|A|\neq 0$ فيكون للنظام حل وحيد وهذا الحل هو

$$x_j=\frac{|A_j|}{|A|},\quad j=1,2,\ldots,n$$

حيث ان $|A_j|$ هي محدد المصفوفة الناتجة من ابدال عناصر عمود j للمصفوفة A بعناصر العمود b.

لو كانت المصفوفة المربعة A من الدرجة n=2

ax+by=n

cx+dy=m

$$A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}, x=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix},\ b=\begin{bmatrix}n\\ m\end{bmatrix}$$

$$A_1=\begin{bmatrix}n & b\\ m & d\end{bmatrix},\ A_2=\begin{bmatrix}a & n\\ c & m\end{bmatrix}$$

لو كانت المصفوفة المربعة A من الدرجة n=3

ax+by+cz=k

dx+ey+fz=l

gx+hy+iz=m

$$A=\begin{bmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{bmatrix}, x=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix},\ b=\begin{bmatrix}k\\ l\\ m\end{bmatrix}$$

$$A_1=\begin{bmatrix} k & b & c \\ l & e & f \\ m & h & i \end{bmatrix}$$

$$A_2=\begin{bmatrix} a & k & c \\ d & l & f \\ g & m & i \end{bmatrix}$$

$$A_3=\begin{bmatrix} a & b & k \\ d & e & l \\ g & h & m \end{bmatrix}$$

مثال5

حل المعادلات الخطية بطريقة قاعدة كرامر

3x-y=2

x+y=5

تكتب المعادلات اعلاه بصيغة المصفوفة

Ax=b

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, x=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$A_1=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}, A_2=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=4$$

$$|A_1|=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}=7$$

$$|A_2|=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=13$$

$$x=\frac{|A_1|}{|A|}=\frac{7}{4}$$

$$y=\frac{|A_2|}{|A|}=\frac{13}{4}$$

مثال 6

حل المعادلات الخطية التالية بطريقة قاعدة كرامر

2x+8y=-4

x+3y=5

تكتب المعادلات اعلاه بصيغة المصفوفة

Ax=b

$$\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -2$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} -4 & 8 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -52$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 14$$

x= $\frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-52}{-2} = 26$

y= $\frac{|A_2|}{|A|} = \frac{14}{-2} =$ -7

مثال 7

حل المعادلات الخطية التالية بطريقة قاعدة كرامر

x+2y+3z=5

2x+5y+3z=3

x+8z=17

تكتب المعادلات اعلاه بصيغة المصفوفة

Ax=b

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix}$$

$A_1=\begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 3 \\ 17 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

$A_2=\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 17 & 8 \end{bmatrix}$

$A_3=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 17 \end{bmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{matrix}$$

= (1*5*8)+(2*3*1)+(3*2*0)-(3*5*1)-(1*3*0)-(2*2*8)= -1

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 3 \\ 17 & 0 & 8 \end{vmatrix} = -1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 17 & 8 \end{vmatrix} = 1$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 17 \end{vmatrix} = -2$$

$x= \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-1}{-1} = 1$

$y= \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{1}{-1} = -1$

$z= \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-2}{-1} = 2$

وبذلك فإن x=1 ,y=-1 ,z=2

مثال 8

حل المعادلات الخطية التالية بطريقة قاعدة كرامر

5x-6y+4z=15

7x+4y-3z=19

2x+y+6z=46

تكتب المعادلات اعلاه بصيغة المصفوفة

Ax=b

$$\begin{bmatrix} 5 & -6 & 4 \\ 7 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 19 \\ 46 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & -6 & 4 \\ 7 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 419$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 15 & -6 & 4 \\ 19 & 4 & -3 \\ 46 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 1257$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 5 & 15 & 4 \\ 7 & 19 & -3 \\ 2 & 46 & 6 \end{vmatrix} = 1676$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 5 & -6 & 15 \\ 7 & 4 & 19 \\ 2 & 1 & 46 \end{vmatrix} = 2514$$

x= $\frac{|A_1|}{|A|} = \frac{1257}{419} = 3$

y= $\frac{|A_2|}{|A|} = \frac{1676}{419} = 4$

z= $\frac{|A_3|}{|A|} = \frac{2514}{419} = 6$

وبذلك فإن z=6, y=4, x=3

الفصل الرابع

1-4 الاستنتاج

نســتنتج من خلال البحث ان طريقة حل المعادلات باســتخدام المصــفوفات هي طريقة ســهلة لحل المعادلات التفاضــلية المعقدة. قد تم هذه الطريقة باســتخدام عدة نظريات منها طريقة جاوس وطريقة جاوس - جوردان هناك طرق اخرى موجودة لحل هذه المعادلات لكن البحث لا يســع لذلك قد تم ذكر ذلك من خلال التوصــيات المقترحة للباحثين، وتم تعزيز جميع هذه الطرق والنظريات بامثلة توضــيحية شــملت بعدة طرق وخصــائص تفيد القارئ وايضـــا تم الاســـتنتاج ان هناك العديد من التطبيقات المهمة لحل المعادلات التفاضـــلية بطريقة المصفوفات.

2-4 المقترحات

نقترح على الباحثين باجراء:-

1) التوسع بايجاد حل المعادلات التفاضلية برتب عليا. لحل المعادلات التفاضلية بطريقة المصفوفات.

2) التطرق الى النظريات الاخرى في حل المعادلات التفاضلية بطريقة المصفوفات.

3) ايجاد او البحث عن نظريات حديثة لحل معادلات من الرتب العليا عن طريق المصـــفوفات باســـتخدام الماتلاب.

3-4 المصادر والمراجع

١- خليل الماس أحمد (٢٠٠٧) تصـــميم وتنفيذ حاســبة لإجراء العمليات الحســـابية على المصـــفوفات، مجلة ابحاث كلية التربية الأساسية جامعة الموصل - كلية التربية الأساسية

٢-تاج الســر، ســحر أبو عبيدة (٢٠١٥) نمذجة المصــفوفات والعدادات بواســطة الحاســب الآلي، جامعة أم درحان الإسلامية، السودان.

٣- أحمد نوال ابراهيم الطيب (٢٠١٦) العمليات على المصـــــفوفات بإســــتخدام الماتلاب، جامعة أم درحان الإسلامية، السودان.

المراجع

1-Dennis G, zill (15 March 2012) A first Course in Differential Equations with modeling Applications. 1-285 Cengage Learning. ISBN 40110-7

مؤرشف من الأصل في ١٧يناير ٢٠٢٠.

2-cannon, John T ; Dodstrovsky sigalia (1981) " The evolution of dynamics, vibration theory from 1687 to 1742 ". 6 New york :springer-verlag : ix +184 pp. ISBN 0-3879-0626-6. GRAY, JW (July 1983) " BOOK REVIEWS" (pdf) Bulletin (new series) of the American Mathematical society. 9 1 "

مؤرشف من الأصل(pdf) في ٢٩ ديسمبر ٢٠١٦.

اطلع عليه بتاريخ ٢٤ديسمبر ٢٠١٧ (retrievet 13 Nov ٢٠١٢)

3-GRAY, JW (July 1983)"BOOK REVIEWS" Bulletin ^(New series) of the American Mathematical society (9C1

4-wheeler, GerardF;Crummett, William P. (1987) "The vibrating string Controversy" . Am. J. Phys.S5 (1):33-37.

Bibco de . : 1987 Am Jph..55..33w. doi :10.1119/1.1 5311

5-Newton,Isaac. (c. 1671).Methodus fluxionum et serierum Infinitarum (The Method of fluxions and Infinite series). published in [1736 [opuscula, 1744, vo 1.1 .p. 66

6-Bernoulli, Jacob (1695)." Explicationes, Annotationes & Additiones adea, in actis sup. de Curva Elastica, Isochrona paracentrica, & Velaria, hinc inde de Linea mediarum directionum, alliisque novis" Acta Eruditorum.

7-Harier, Ernst ;Norsett, Syvert Paul ; wanner, Gerhard (1993), Solving ordinary differential equation 1: Nonstiff Problems, Berlin, New York 978-3-540-56670- 0 15BN سبرنجر

8-frasier, Craig (July 1983) " Review of the evolution John T. Cannon and sigalia :Dostrovsky" (PDF), Bulletin (New series) of the American Mathematical society. 9(1).

مؤرشف من الأصل :(PDF) في ٢٣ ديسمبر ٢٠١٨.

9-Wheeler, Gerard F ;Grumme tt, william P. (1987) " The vibrating string Controversy". Am. J. phys. 55(1) :33-37. Bibco de :1987 Am JPh.. 55..33w, doi :10.1119/1.15311

10-for a special collection of the 9 ground breaking papers by the three authors, see First Appearance of the wave equation :D' Alembert, Leonh and Euler, Daniel Bernoulli. the controversy about vibrating ;strings (Retrieved 13 Nov 2012). Herman HJLynge and son .نسخة محفوظة :١٥ديسمبر ٢٠١٩ على موقع واي باك مشين.

11-forde Lagranges Contributions to the acoustic wave equation, Can consult Acoustics :An Introduction to Its physical principles and :Applications Allan D. pierce. Acoustical soc of American, 1989;(page 18. (retrieved 9 Dec 2012)

نسخة محفوظة :١٤مارس ٢٠١٧ على موقع واي باك مشين.

12-Speiser, David. Discovering the principles of Mechanics 1600 - :1800,p.191(Basel :Birkhauser, 2008)

نسخة محفوظة :١٧يناير ٢٠٢٠ على موقع واي باك مشين.

13-fourier. Joseph (1822). The'orie analytique de La chaleur (باللغة الفرنسـية) paris :Firmin Didot pe're et. fils OCLC :2688081

مؤرشف من الأصل : في ٨ أبريل ٢٠٢٠. اطلع عليه بتاريخ أغسطس ٢٠٢٠.

المصدر /من كتاب الجبر الحظي وتطبيقاته

د. معروف عبد الرحمان سرحان، د. على عبدالله السحيباني

د. فوزي أحمد الذقير. ٢٠٠٦ معاينة.

المصدر /من ملف (PDF. ٧٨٤٠١٤٦٧٣٥٢٩٩٢٨٦) على موقع

https://www.esraa.edu.iq