جمهورية العراق
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة ديالى
كلية التربية المقداد
قسم الرياضيات

الاستقراء الرياضي لدى طلبة قسم الرياضيات

بحث تخرج مقدم الى جامعة ديالى كلية التربية المقداد، قسم الرياضيات

وهو جزء من متطلبات نيل شهادة البكالوريوس في الرياضيات.

اعداد

نور أحمد محيسن

أحمد حمزة جابر

اشراف

م.م. عهود فاضل علوان

١٤٤٣ هـ ٢٠٢٢ م

الآية

سورة النور آية ٣٥

الإهــداء

إلى
كل من جعل مخافة الله
اساس عمله
وكلُ من سهر الليالي
وطلب العلم لوصول
الاعالي..
أهدي هذا الجهد
المتواضع .

شكر وعرفان

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على خاتم الانبياء والمرسلين في مثل هذه اللحظات يتوقف اليراع قبل ان تخط الحروف ليجمعها في كلمات تنبعث الاحرف وعبثا ان تحاول تجمعها سطور سطورا كثيرة ثم في الخيال ولا يبقى لنا في نهاية المطاف إلا قليلا عن الذكريات وصور تجمعنا برفاق كانوا الى جانبنا فواجب علينا شكرهم ونحن وخطوا خطواتنا الاولى في غمار الحياة ونخص بجزيل الشكر والتقدير كل من اشعل شمعة في دروب علمنا والى من وقف على المنابر واعطى من حصيلة فكرة لينير دربنا الى اساتذتنا الكرام ونتوجه بالشكر والتقدير الى الذي تفضل بأشرافه على هذا البحث فجازاه الله عنا كل خير فله منا كل التقدير والاحترام.

فهرست المواضيع

رقم الموضوع	الموضوع	الصفحة
١	الآية القرآنية	ب
٢	الإهداء	ت
٣	شكر وعرفان	ث
٤	فهرست المواضيع	ج
٥	الخلاصة	ح
	الفصل الاول	١-١١
١	المقدمة	١
٢	ما هو الاستقراء	٢
٣	الاستقراء الرياضي أحد أهداف تدريس الرياضيات	٢-٤
٤	الاستقراء الرياضي ومعايير NCTM	٤
٥	مهارات الاستقراء الرياضي Mathematical Thinking Skills	٤-٦
٦	البرهان الرياضي (Mathematical Proof)	٦-١٠
٧	خصائص الاستقراء الرياضي	١١
	الفصل الثاني	١٢-٢٥
١	تنشيط الاستقراء الرياضي من خلال دروس الرياضيات	١٢
٢	امثلة على الاستقراء الرياضي	١٣-١٥
٣	امثلة مبرهنات	١٦
	اختبار الاستقراء الاستقرائي	١٧-٢٥
	الفصل الثالث	٢٦
١	الاستنتاجات	٢٦
٢	التوصيات	٢٦
	المصادر	٢٧-٣٠

الخلاصة

يهدف البحث إلى التعريف بمفهوم الاستقراء الرياضي واساليب وطرق الاستقراء وآلية تطبيق هذا المفهوم والاستفادة منه في مجالات التعليم والبراهين والاستنتاج حيث يُعد الاستقراء الرياضي محوراً هاماً في محتوى مناهج الرياضيات، وهذا ما نجده واضحاً في وثيقة المعايير العالمية لتدريس الرياضيات المدرسية والتي تم نشرها من قِبَّل المجلس القومي لمعلمي الرياضيات. فإن الاستقراء الرياضي يُعد أحد الأهداف الرئيسية لتعليم وتعلم الرياضيات لجميع التلاميذ في كافة مستويات التعليم وفي كافة المراحل العمرية

وكذلك يبين البحث ان الاستقراء هو القدرة على حل المشكلات او تفسير موقف معين باستخدام شيء من المعرفة الرياضية، وله مهارات عدة منها: الاستقراء، والاستنتاج، والتعبير بالرموز، والاستقراء المنطقي الشكلي، والاستقراء العلاقي، الاستقراء البصري، والاستقصاء.

وبعد دراسة نظرية موسعة وجد إن تنشيط الاستقراء الرياضي وممارسته لدى الطلبة بشكل سليم من خلال دراستهم لموضوعات الرياضيات المدرسية مسؤولية تقع على عاتق مُدرس الرياضيات، لذا يتوجب عليه تحقيق من مُمارسة الطالب لمهارات الاستقراء الرياضي المختلفة ممارسة عملية داخل الصف.
و إدراك الطالب لحدود الثقة في النتائج التي يصل إليها باستخدام كل مهارة من مهارات الاستقراء الرياضي. وايضاً أن يُشجع الطلاب على استخدام مهارات الاستقراء الرياضي باستخدام البراهين والادلة والف

الفصل الأول

١-١ المقدمة

الرياضـــيات علم من إبداع العقل البشـــري، وطريقة للبحث تعتمد على المنطق والاســـتقراء العقلي مُستخدمة سُرعة البديهة وسعة الخيال ودقة الملاحظة، لهذا فقد قيل إنها سيدة العلوم بلا مُنازع وخادمتها في الوقت نفسـه، وهذه هي عظمة الرياضـيات، وتؤدي الرياضـيات دوراً كبيراً في التطبيقات العلمية والعملية، ولا أحد يُنكِر دورها الكبير الذي تؤديه في التطوّر التكنُولوجي الهائل وفي الصـــناعات الحديثة، كما تعد أرضاً خصبةً لتعليم مهارات الاستقراء الرياضي لدى المُتعلمين.

إذا تدريس الرياضـيات ينبغي من أجل الفهم وهو يعنى أن يسـاعد المعلمون طلبتهم على أن يغوصـوا بعمق أكبر في المعاني الذي تتضـمنها الرياضـيات، وإشـراكهم في مناقشـة المشـكلات والأفكار وعمليات الاسـتدلال والفهم، أكثر من مجرد التركيز على الأداء فقط، ويصـبح التدريس في هذه الحالة إعداد الطلاب وحفزهم لتحصيل مستويات محدده وواضحة في تعلمهم.

أشارت مبادئ ومعايير الرياضيات المدرسية لسنة ٢٠٠٠ م للمجلس القومي الأمريكي لمعلمي (NCTM)[١] ، إلى اعتبار أن الفهم هو الغاية من تعليم الرياضيات، وأنه القاعدة التي أن يتأسس عليها تعلم الرياضيات مستقبلاً.

تعد الرياضيات من المواد الأساسية التي يجب اكتساب مفاهيمها ومهاراتها بشكل جيد، لما لها من أهمية في تنمية القُدرة على التفكير، وصقل مهارات المُتعلم الأساسية في حياتهِ اليومية، وأصبح لزاماً على الثقافة الرياضية أن ترفع المُتعلم إلى مستوى المسؤولية ليُحقق تعليماً رياضياً أفضل، يخلق جيلاً مُفكراً ومُنتجاً وقادراً على مواجهة متطلبات المستقبل بكفاية.

تعد مناهج الرياضيات وموادها التعليمية ركناً اساسياً في مناهج التعليم الأساسي والتي تعد ايضا مجالا خصبا لتطوير ونمو الاستقراء لدى اطلبتنا، لهذا قامت الكثير من الدول بتطوير مناهج الرياضيات وتحسينها لتواكب معطيات القرن الحادي والعشرين، وذلك خلال اهتمام هذه المناهج بتنمية الاستقراء لدى الطلبة، وإكسابهم طريقة في الاستقراء تعتمد على بناء رياضي دقيق وسليم، وذلك انطلاقاً من النظرة إلى الرياضيات بعدها طريقة ونمطاً في التفكير، ولها من المميزات ما يجعلها مجالاً خصباً لتدريب الطالب على أنماط وأساليب الاستقراء السليم وتنميته، والإسهام في بناء شخصيته وقدرته على الإبداع وإكسابه البصيرة الرياضية والفهم العميق. ولهذا نجد عند استعراض قائمة الأهداف التي تضمنتها المناهج الحديثة للرياضيات فقرات تتناول جوانب معينة من الاستقراء الرياضي.

---

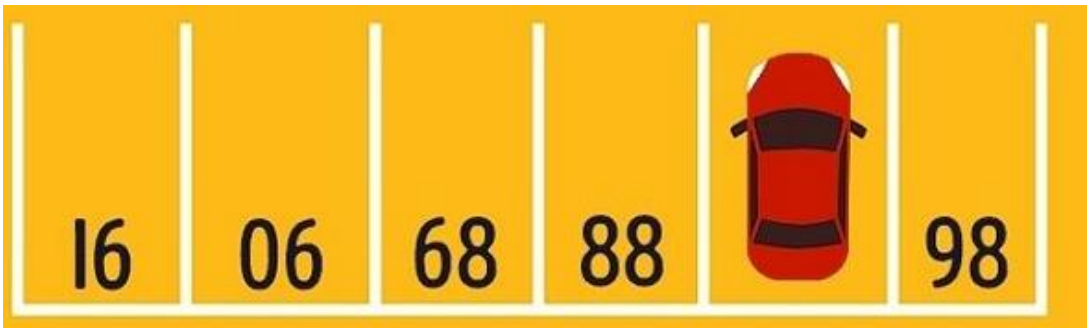
[١] - Principles and standardes for school mathematics

١-٢ ما هو الاستقراء

الاستقراء مفهوم معقد يتألف من ثلاث عناصر تتمثل في العمليات المعرفية المعقدة وعلى رأسها حل المشـكلات والاقل تعقيداً كالفهم والتطبيق فضـلاً عن معرفة خاصـة بمحتوى المادة او الموضـوع مع توفر الاستعدادات والعوامل الشخصية المختلفة ولا سيما الاتجاهات والميول (سعادة, ٢٠٠٣)

لغز ظريف

حاول ان تعرف الرقم الذي تقف عليه السيارة وكيف تفسر ذلك (الحل في نهاية الفصل)



١-٣ الاستقراء الرياضي أحد أهداف تدريس الرياضيات

يُعد تعليم الطلبة الاسـتقراء الرياضـي أحد أهداف تدريس الرياضـيات، وذلك بتعريفهم بالخبرات التي تُكسبهم القُدرة الرياضية، بمعنى قدرتهم على الاستكشاف والتخمين والاستقراء منطقياً، فضلاً عن استخدام أسـاليب رياضـية متنوعة لحل مشـكلات غير روتينية بفعّالية، وأن تنوّع الخبرات وتعدُّدها يفسـح المجال أمامهم ليثقوا بتفكيرهم الرياضي (الخطيب،٢٠٠٩).

وتعمل الرياضيات على تنمية الاستقراء الرياضي والقدرة على حل المشكلات، وتتميز ببنيتها المنطقية والتراكمية المترابطة، وأن طبيعتها تختلف عن الاعتقادات التي سـادت حول كونها مجردة خالية من الحس في العصـور السـابقة، فقد تحولت بعد ظهور الأنظمة التكنولوجية الحديثة من المنظومة المُجردة إلى نظام مُتسق يهدف إلى تنمية الاستقراء الرياضي والتواصل والقدرة على مواجهة المشكلات، ومن أهم خصائص هذا النظام الاستمرارية في النمو والتفسير بوصفها إحدى الخصائص المهمة للإنسان ، كون الرياضيات لها طبيعة مزدوجة فهي علم وطريقة للتفكير بأنماطه المختلفة، وتُوفّر أيضاً نهجاً فريداً لوصف الواقع وفهمه، إذ إن كثيراً من جوانب الحياة المعاصـرة تعتمد على التطورات الفكرية والعلمية التي هي من إخراج الرياضيات، وتعد، وتعد دراستها من أفضل الوسائل لتنمية مهارات الاستقراء الرياضي، فقد كان الاعتقاد السـائد أن نمط الاسـتقراء الذي يدخل في الرياضـيات لا يتجاوز الاسـتقراء القياسـي، أما اليوم فقد تبيّن أن الاسـتقراء الرياضـي يتضـمن مهارات عقلية أخرى وأنماط تفكير متعددة، وأنها عامة في ذكاء الإنسـان وسلوكه العقلي (الحسني وباسم،٢٠١١).

ويمثل الاستقراء الرياضي لدارسي مادة الرياضيات سمة عصر العولمة، وأنه من الصعب فك الارتباط والتشابك بين الرياضيات بوصفها بناء والاستقراء الرياضي بوصفه مدخلاً أو أسلوباً أو منهجية لتعليم الرياضيات نفسها، فالصيغ الرياضية لها قدرة عجيبة أو إمكانية رائعة على تجميع الأشياء والمفاهيم المتباعدة تحت سقف واحد. (إبراهيم، ٢٠٠٧).

لذا فالاستقراء الرياضي سمة من السمات المميزة التي تسمو بالرياضيات عن أن تكون مجرد تراكم للمعلومات أو تطبيق لمهارة عملية، إذ يوظف التنظيم البنائي لأجزاء الرياضيات بعضها ببعض وليس بأشياء العالم الواقعي حسب؛ ويؤكد بعضهم أنهُ يُعد أساس الرياضيات وأن جوهرها يكمُن في الإثباتات والبراهين. (شواهين وتغريد،٢٠١٠).

خلال دراسة التي أجرت على وجود ثلاثة اعتبارات أساسية يجب الأخذ بها عند تطوير مهام منهاج الرياضيات وجب مراعاه ثلاثة اعتبارات أساسية من أجل تحفيز الاستقراء الرياضي لدى المتعلمين وهي:

١. أن تساعد المهام والمسائل الطلاب على الاستقراء بدلاً من تخمين الإجابة التي يُريدها المُعلم أو الكتاب.
٢. أن تتضمن المهام والمسائل العديد من الإجابات، وليس التقييد بإجابة صحيحة أو عملية حل واحدة.
٣. يجب أن تسمح المهام والمسائل بطرح أسئلة إضافية، أو اكتشاف مُشكلة مفتوحة النهاية بوصفها نتيجة لقدرة الطلبة على التواصل (باسكا وتامارا ،٢٠١٣).

عرف الاستقراء الرياضي عدة تعاريف منها:

١. نشاط عقلي منظم يتسم بالمرونة يهدف إلى حل المشكلات الرياضية والمواقف التي تشكل عائق معرفي امام المستجيب باستخدام بعض المهارات كالاستقراء ، الاستنباط ، المنطق الشكلي ، البرهان الرياضي ، التعبير بالرموز ، حسب طبيعة كل مشكلة أو موقف يتعرض له الفرد (Harel, & Sowder, ٢٠٠٥).
٢. القدرة على رؤية العلاقات التي ترتبط بين الأفكار والمفاهيم والقواعد والقوانين وفهمها واستيعابها ويؤكد على النشاط العقلي. ويشمل استخدام المعادلات والإعداد والاعتماد على القواعد والرموز والنظريات والبراهين، حيث تمثل إطارا فكريا يحكم العلاقات بين الأشياء (الكبيسي، ٢٠٠٨).
٣. نشاط عقلي منظم معقد نوعا ما يتسم بالمرونة ويعد وسيلة مهمة لتعلم حل المشكلات في الرياضيات ويمنح الطلبة طعم المغامرة الفكرية (Kaye,٢٠٠٨).
٤. نشاط عقلي للمتعلم منظم ومستمرأ ثناء العملية التعليمية للتوصل إلى حل المشكلات الرياضية باستخدام بعض مهارات التفكير (الاستدلال– البرهنة) (حمادة:٢٠٠٩).
٥. عملية عقلية أو نشاط عقلي خاص بالرياضيات يتضمن مجموعة من المظاهر تتمثل في: التعميم، الاستقراء، الاستنباط، التعبير بالرموز، الاستقراء المنطقي، البرهان الرياضي، ويعتمد كل مظهر من هذه المظاهر على مجموعة من القدرات والمهارات الرياضية (العمري،٢٠٠٩).
٦. عملية بحث عن معنى أو فكرة في موقف مرتبط أو خبرة مرتبطة بسياق رياضي، أي أنه تفكير في مجال الرياضيات حيث تتمثل عناصر أو مكونات الموقف أو الخبرة في أعداد أو رموز أو أشكال أو مفاهيم أو تعميمات رياضية. (أبو زينة وعبد الله،٢٠١٠).

٧. سلسلة من النشاطات العقلية التي يقوم بها الدماغ عندما يتعرض لمُثير رياضي؛ أي البحث عن المعنى في الموقف الرياضـــي، وقد يكون هذا المعنى ظاهراً أحياناً وغامضـــاً أحياناً أخرى، ويتطلب التوصـــل إليه تأملاً في الخبرة التي يمر بها الفرد). (Sinead& Ann,٢٠١٠).
٨. الاستقراء المصاحب للطالب في مواجهة المشكلات والمسائل الرياضية في محاولة لحلها، وتحدده عدة اعتبارات تتعلق بالعلميات العقلية التي تتكون منها عملية الحل والعلميات المنطقية التي تتكون منها عملية حل مسـائل مختلفة الأنواع والعلميات الرياضـية التي يجب أن تسـتخدم لإجابة سـؤال المشـكلة أو المسـائل الرياضية(الزهيري،٢٠١٣).

١-٤ الاستقراء الرياضي ومعايير NCTM:

يُعد الاستقراء الرياضي محوراً هاماً في محتوى مناهج الرياضيات، وهذا ما نجده واضحاً في وثيقة المعايير العالمية لتدريس الرياضيات المدرسية والتي تم نشرها من قِبَّل المجلس القومي لمعلمي الرياضيات (NCTM. فإن الاستقراء الرياضي يُعد أحد الأهداف الرئيسية لتعليم وتعلم الرياضيات لجميع التلاميذ في كافة مستويات التعليم وفي كافة المراحل العمرية. كذلك لا يقتصر الاستقراء الرياضي على مجرد البرهان الشكلي ولكنه يتضمن مجالاً واسعاً من القدرات التي يجب على التلاميذ أن يمتلكوها ويتمكنوا منها، والتي تتمثل في: (NCTM, ١٩٨٩')

- تطبيق الاستقراء الاستنباطي والاستقرائي.
- فهم وتطبيق عمليات التفكير، وبصفة خاصة الاستقراء المكاني.
- عمل وتكوين التخمينات الرياضية والبراهين والإثبات.
- تكوين أمثلة مضادة.
- إجراء مناقشات منطقية.
- إصدار أحكام على صدق وصحة البراهين والحجج.

لقد نادت معايير المجلس الوطني لمعلمي الرياضيات في أمريكا (NCTM,٢٠٠٠) بضرورة ان يكتسب الطلبة من مرحلة ما قبل رياض الاطفال الى الصف الثاني عشر مجموعة من المعايير والمهارات التي تتمثل في معايير الاستقراء والبرهان.

١-٥ مهارات الاستقراء الرياضي:Mathematical Thinking Skills

١. الاستقراء (Induction):

- هو الوصول إلى الأحكام العامة اعتماداً على حالات خاصة أو جزئيات من الحالة العامة، أي إن الحالات الخاصة أو الجزئيات أمثلة من الحالة العامة أو النتيجة التي تم استقراؤها(الخطيب،٢٠٠٩).

- عملية يتم عن طريقها الوصول إلى قاعدة عامة (نتيجة – نظرية – قانون) من خلال دراسة عدد كاف من الحالات الفردية واستخراج الخاصية التي تشترك فيها هذه الحالات. (محمد محمود حمادة، ٢٠٠٥).
- يتضمن الاستقراء عمليتين مترابطتين هما (التعميم والتجريد)، فإذا أدرك شخص بعض الخصائص العامة لمجموعة من الأشـــياء، فقد توصـــل إلى تجريد، أما إذا تنبأ بأن علاقة ما متوافرة في عينة خاصة ستكون صحيحة في عينة أوسع، فيكون قد توصل إلى تعميم.(العبسي،٢٠١٠).

أي أن الاستقراء يسير من الخاص إلى العام ومن الملموس إلى المجرد ومن الأمثلة والحالات الخاصة إلى القاعدة العامة. وعن طريق الاستقراء يكتشف التلميذ القاعدة العامة من خلال استعراض حالات خاصة متعددة، يقصد بالاستقراء الوصول إلى نتيجة ما من بعض المشاهدات أو الملاحظات أو الأمثلة الخاصة.

٢. التعميم والتجريد (Generalization and Abstraction):

هو صـــياغة عبارة أو منطوقة (بالرموز أو الألفاظ) عامة اعتماداً على أمثلة أو حالات خاصـــة.(البلاونة،٢٠١٠).والتعميم اكتشـــاف قاعدة عامة تتســـع لأكثر من الحالات المعلومة الأولى، وهو توسيع القاعدة من عدد محدود من الحالات إلى عدد غير محدود. (المنصور،٢٠١١).أما التجريد فهو إدراك أن القاعدة تُطبق في عدد من الأوضاع الأخرى غير التي أُكتشفت منها، والتجريد في الرياضيات يسمح لنا بتطبيق نتائج الرياضيات في كثير من الأوضاع الخاصة والعملية. (العبسي،٢٠١٠).

هنا التعميم هو :الحد النوني يساوي مجموع الحدين السابقين المتتالين وبالرموز:

$a_{n=a_{n-١}} + a_{n-٢}$

والحد السادس هو (٢١).

٣. الاستنتاج (Deduction):

هو التوصـــل إلى نتائج معينة اعتماداً على أســـاس من الحقائق والأدلة المناســـبة الكافية، أي إنه يحدث عندما يســـتطيع الطالب ربط ملاحظاته ومعلوماته عن ظاهرةٍ ما بمعلوماتهِ الســـابقة عنها، ثم يُصـــدر حكماً معيناً يُفسـر به هذه الملاحظات. (عريفج ونايف،٢٠١٠).وهو الوصـول الى نتيجة خاصـة اعتمادا على مبدا او قاعدة عامة ويسير الاستقراء الاستنتاجي في الاتجاه المضاد للتفكير الاستقرائي .

.

٤. التعبير بالرموز (Symbolism):

الرمز هو حرف أو علاقة أو اختصـــار يُمثل تعبيراً أو عملية رياضـــية، والاســـتقراء الرمزي هو الاستقراء من خلال الرموز والمجردات، وليس من خلال البيانات الحسية، ويتضح استخدام ذلك النوع من الاستقراء في الرياضيات في حل المسائل في موضوعات الجبر والهندسة. (العبسي،٢٠١٠).

والتعبير بالرموز هو استخدام الرموز للتعبير عن الأفكار الرياضية أو المعطيات اللفظية، كالتعبير عن العلاقة اللفظية الآتية:

عُمر والد ثلاثة أمثال عُمر ابنه، وبعد ١١ سنة يصبح عُمر الوالد ضعفي عُمر ابنه.

بالرموز: ٣س + ١١= ٢(س+١١).

ملاحظة: عُمر الابن (س)، وعُمر الأب (٣س).

التعبير بالرموز وهو استخدام الرموز للتعبير عن الافكار الرياضية.

٦. النمذجة (Modeling):

هي تمثيل رياضي لشكل أو مُجسم أو علاقة للموقف، ويكون التمثيل إما بشكل أو مجسم أو معادلة أو علاقة رياضية. (أبو زينة،٢٠١١).وتُعد النمذجة الرياضية للظواهر إحدى أقوى استخدامات الرياضيات، وعليه يُفضل إتاحة الفرص إمام جميع الطلبة في مراحلهم الدراسية كافة لنمذجة العديد من الظواهر رياضياً بطرائق تكون مناسبة لمستواهم.ويرى الباحث أنه يمكن عمل نماذج لتسهيل دراسة الرياضيات، مثل أنموذج من الكرتون لساعة وتدريب الطلبة على قراءة الوقت، أو استخدام قطعة خشبية وتقسيمها إلى وحدات مختلفة الأطوال لقياس أطوال الأشياء.

لذا النمذجة هو تمثيل رياضي لشكل او مجسم او علاقة

٧. الاستقراء المنطقي الشكلي أو الصوري (Formal Logic):

هو استخدام قواعد المنطق من مُقدمات أو مُعطيات في الوصول إلى الاستنتاجات، وتتمثل قواعد المنطق الشكلي في عمليات الضم(∧)، والفصل (∨)، والنفي (~)، والتضمين (←) للعبارات، وتخضع النتائج المُستخلصة من المقدمات لقواعد المنطق المتفق عليه. (أبو زينة وعبد الله،٢٠١٠،ص٢٧٦).

والمنطق هو الدراسة العلمية أو المنظمة للمبادئ العامة، التي تعتمد عليها صحة الاستقراء ويبحث في العبارات والاستنتاجات المتبادلة بينها.(الخطيب،٢٠٠٩،ص٣٧).

اي الاستقراء المنطقي الشكلي: - هو عملية استخدام قواعد المنطق في الوصول الى الاستنتاجات مقدمات (معطيات)

٦-١ البرهان الرياضي (Mathematical Proof):

هو سلسلة من العبارات الرياضية المترابطة لإثبات صحة نتيجة معينة عن طريق الاستدلال والمنطق، واستخدام مجموعة من التعاريف والمسلمات والنظريات المبرهنة مسبقاً. (إبراهيم،٢٠٠٩،ص٩١).

والبرهان هو مجادلة أو عرض للأدلة التي تقنع أو تدفع الفرد إلى قبول قضـــية معينة، وهناك معايير عديدة يمكن أن يُبنى على أساسها قبول الفرد ذاته أو غيره من الناس للمجادلة كونها دليلاً مقنعاً، وفي مجال الرياضـيات فإن المجادلة الاسـتدلالية هي المعيار الذي يتخذهُ الرياضـيون لقبول صـحة قضـية معينة؛ لأن علاقة التضـمين (←) هي الأســاس الذي يبنى عليه هذا المعيار وإذا دققنا النظر في التقرير(أ ← ب) فأنه يعني أن صحة (ب) تتوقف على صحة (أ) ويسمى(أ المقدمة و ب النتيجة)، وأن هناك علاقة منطقية بين(أ و ب) وتكون النتيجة هي قبول صحة ب. (الخطيب،٢٠٠٩).

ويشير (أبو زينة،٢٠١١) إلى إمكانية استخدام مظاهر الاستقراء الرياضي في مواقف أو سياقات غير رياضــية، ففي العلوم مثلاً يُســتخدم الاســتقراء والحدس والنمذجة وغيرها في معظم الأحيان، وفي اللغات تُعطى قواعد عامة تنطبق على حالات خاصة، أو يتم التوصل إلى قاعدة عامة من حالات خاصة، وتُستخدم الرموز في التعبير عن كثير من عناصر المواقف والمشكلات أياً كان مجالها (أبو زينة،٢٠١١).

البرهان الرياضي : هو عبارة عن معالجة لفظية او رمزية تتمثل في تتابع من العبارات تستنبط كل منه سابقتها استنادا على المعطيات والمسلمات ومبرهنات سابقة واستنباطا بأساليب يقرها المنطق .وتعتمد طبيعة البرهان الرياضي على :

١- النظام الرياضي الذي ينتمي اليه العبارة المراد برهانها

٢-الاستراتيجية المتبعة في البرهان التي تعتمد على احد صور الاستدلال التصحيحية منطقيا

اساليب البرهان الرياضي

اولا- البرهان المباشر (direct proof)

ثانيا :-البرهان بالتناقض (proof by contradiction)

ثالثا: البرهان بالمثال المضاد (proof by counter example)

رابعا : البرهان بالاستقراء الرياضي (proof by mathematical induction)

اساليب البرهان الرياضي واستراتيجيات كل منها مع التطبيقات:

البرهان المباشر:

واستراتيجية : البدء بالمعطيات (المفروض) وصولا الى المطلوب (المطلوب اثباته)

مثال: اثبت ان :ناتج جمع عددين فرديين هو عدد زوجي

البرهان :

ليكن كل من $2n_1+1, 2n_2+1$ عددا فرديا (حيث كل من $n_1 n_2$, هو عدد طبيعي)

فان ناتج جمعهما يكون $2n_1+2n_2+2$

وبإخراج العامل المشترك يكون $2(n_1+n_2+1)$

حيث ان (n_1+n_2+1) هو عدد طبيعي وليكن k

فان ناتج جمع العددين الفردين هو $2k$, اي انه عدد زوجي

نشاط (١): اثبت ان : حاصل جمع عددين طبيعيين متتالين هو عدد فردي

البرهان بالتناقض :

الاستراتيجية: تبدا بنفي المطلوب فتحصل على تناقض.

مثال :- اثبت انه : لا يوجد مثلث قائم الزاوية ومتساوي الاضلاع في ان واحد .

البرهان :

افرض انه يوجد مثلث قائم الزاوية ومتساوي الاضلاع في ان واحد وليكن x طول كل ضلع من اضلاعة وحسب مبرهنة فيثاغورس فان :

$$x^2 + x^2 = x^2$$

وهذا يعني ان $2x^2=x^2$

وبقسمة طرفي المعادلة على العدد x^2(اكبر من الصفر)) تحصل على ان :$2=1$

نحن نعلم ان $1 \neq 2$ وحصلنا على $2=1$, فهذا تناقض وعليه فرضنا في البداية غير صائب ,ولايوجد مثلث قائم الزاوية ومتساوي الاضلاع في ان واحد

نشاط (١): استخدام البرهان بالتناقض لأثبات ان (الصفر عدد زوجي)

نشاط (٢) : اثبت انه لا يوجد نظير ضربي للصفر في مجموعة لأعداد الحقيقية.

البرهان بالمثال المضاد :

ويستخدم لبرهنة عدم الصواب عبارة .

الاستراتيجية :

اعطاء مثال مضاد للعبارة .

مثال : اثبت ان : مربع كل عدد حقيقي اكبر ويساوي نفسة (عبارة خاطئة)

البرهان : ليكن $x=\frac{1}{2}$, فان $x^2=\frac{1}{4}<\frac{1}{2}$

وعليه فان , $(\frac{1}{2})$ مثال مضاد للعبارة ,والعبارة غير صائبة لكل عدد حقيقي .

نشاط (١) : هل ان العبارة : $n^2 \geq 2^n$ صائبة لكل عدد طبيعي n ؟

نشاط (٢) : هل ان :كل دالة مستمرة تكون قابلة للاشتقاق ؟

تلميح : $f(x)= |x|$ هي مثال مضاد

البرهان بالاستقراء الرياضي

يستخدم لأثبات العبارات المعرفة على مجموعة من الاعداد الطبيعية يسير البرهان على خطوتين:

- خطوة الاساس :
تثبت صواب العبارة عند $n=1$

- خطوة الاستقراء : تفرض صواب العبارة عند $n=k$ (وتسمى فرضية الاستقراء الرياضي) وباستخدام هذة الفرضية تثبت ان العبارة صائبة عند $n=k+1$ فتكون العبارة صائبة لكل عدد طبيعي n, حسب مبدا الاستقراء الرياضي

- مثال :

اثبت ان: $1+3+5+...(n-1)=n^2$ لكل عدد طبيعي $n\geq 1$

- البرهان :

- من الواضح ان العبارة صائبة عند $n=1$ لان$(1^2=1)$

- تفرض ان العبارة صائبة عند $n=k$ اي انه: $1+3+5+.....+2k-1)=k^2$

ولإثبات صواب العبارة عند n=k+١ تضيف الى طرفي فرضية الاستقراء الرياضي , الحد الذي ترتيبه (k+١) وهو : ٢(k+١)−١=٢k+٢−١=٢k+١

فتحصل على :

١+٣+٥+.....+(k−١)+(٢k+١)=k²+(٢k+١)

=K²+٢k+١

=(k+١)²

فالعبارة صائبة عند n=k+١وعليه تكون صائبة لكل عدد طبيعي n≥١

نشاط (١): اثبت ان : ١+٢+٣+.....+n=$\frac{n(n+١)}{٢}$ لكل عدد طبيعي n

نشاط(٢) : اثبت ان $\frac{n(n+١)}{٢}$ هو عدد طبيعي لكل عدد طبيعي n.

نشاط (٣): اثبت ان : مجموع زوايا اي مثلث الداخلية يساوي ١٨٠

نشاط (٤): اثبت مبرهنة فيثاغورس.

١-٧ خصائص الاستقراء الرياضي:

إن للتفكير الرياضـي خصـائص، فهو الذي يؤدي إلى نتائج قابلة للتصـديق، ويطرح آراء أكثر انفتاحاً وعمقاً، ويقود إلى قرارات أكثر نُضـجاً، ويؤدي إلى فكر نقدي دقيق؛ ويمكن إجمال خصـائص الاسـتقراء الرياضي بالآتي:

١. الاستقراء الرياضي سلوك هادف لا يحدث في فراغ أو بلا هدف مُعين.

٢. للتفكير الرياضي قُدرة تطويرية يزداد بها تعقيداً أو حذقاً مع المتعلم وتراكم الخبرة.

٣. يحدث الاستقراء الرياضي بأشكال وأنماط مختلفة (رمزية ومكانية وشكلية).

٤. يتشكل الاستقراء الرياضي من خلال تداخل مستوياته المختلفة والمتدرجة.

٥. الكمال في الاستقراء الرياضي غير ممكن واقعياً، والغاية الأساسية هي تنميته إلى أقصى درجة ممكنة.

٦. يستند الاستقراء الرياضي إلى المعلومات الرياضية السابقة الممكن توافرها في بنية الطالب المعرفية.

الفصل الثاني

٢-١ تنشيط الاستقراء الرياضي من خلال دروس الرياضيات:

من أجل تطوير مناهج الرياضـــيات يجب على الطلاب إتقان المحتوى الرياضـــي الجديد وتعليمهم مجموعة واسعة من مهارات الاستقراء الرياضي وتطويرها، لذا على مُدرسي الرياضيات تقديم المساعدات للطلاب لتطوير مهاراتهم في الاستقراء الرياضي. (Breen&Oshea,٢٠١٠,p٤٠).

ولابد لمُدرس الرياضـــيات الفعّال من الاهتمام بتنمية مهارات الاســتقراء الرياضـــي لدى الطلاب، إذ تشير الدراسات التربوية الحديثة إلى أن الطلاب لا يمتلكون مهارات الاستقراء الرياضي الجيدة من خلال حفظ موضوعات الرياضيات المختلفة واسترجاعها، أي إن الاستقراء الرياضي لا يتم تلقائياً، بل يتطلب تعليماً منظماً وهادفاً وتمريناً مستمراً من خلال استخدام المُدرس لأسئلة تُثير استخدام الطلاب للتفكير في أثناء تعليمهم. (Fisher,٢٠٠٥,p١٧).

إن تنشيط الاستقراء الرياضي وممارسته لدى الطلبة بشكل سليم من خلال دراستهم لموضوعات الرياضيات المدرسية مسؤولية تقع على عاتق مُدرس الرياضيات، لذا يتوجب عليه تحقيق ما يأتي:

١. مُمارسة الطالب لمهارات الاستقراء الرياضي المختلفة ممارسة عملية داخل الصف.

٢. إدراك الطالب لحدود الثقة في النتائج التي يصـــل إليها باســـتخدام كل مهارة من مهارات الاســـتقراء الرياضي.

٣. أن يُشجع الطلاب على استخدام مهارات الاستقراء الرياضي، وليتدخل في أعمالهم إلا عند الضرورة.

٤. إدراك الطالب للفرق بين القضايا مطلقة التعميم والقضايا محدودة التعميم.

٥. تأكد الطالب من صحة القضايا التي يعتمد عليها في تفكيره.

٦. مراجعة الطالب للنتيجة التي وصل إليها في ضوء القضايا المعطاة والموثوق في صحتها.

٧. أن يُزود المدرس الطالب بتمارين تحتاج إلى تفكير واستنتاج.

٨. تنمية موهبة الطالب على البحث وراء الأسباب والتعديلات لما يقرأ وتطور حاسة الحدس لديه.

٩. تنمية فكرة الابتكار لنظريات جديدة حول بعض المفاهيم الرياضية.

١٠. التأكيد بأن الرياضيات ليست مجرد حلول مسائل ولكن هي فلسفة وطريقة تفكير رياضية.

١١. أن يُراعي مُدرس الرياضيات الفروق الفردية بين الطلاب من حيث نوعية الأسئلة المطروحة.

٢-٢ امثلة على الاستقراء الرياضي

مثال: أي عدد عند تربيعه يقل؟ يكون الجواب: -....

أ- العدد الصحيح السالب ب- العدد الصحيح الموجب د- اي عدد كسر البسط اقل من المقام

لاحظ الجواب الصحيح فقط د لأنه مثلا لو أخذنا العدد $\frac{١}{٢}$ وربعناه يكون $\frac{١}{٤}$ أي يقل بينما العدد السالب وكذلك العدد الموجب بتربيع يزيد، أما الواحد يبقى نفسه.

الأسئلة

١- عصفورين اثنين يستطيعان أن يأكلان قطعتين بسكويت في خلال دقيقتين, كم عصفورا يلزم ليأكلوا ٦ قطع بسكويت خلال فترة ٦ دقائق ؟

أ- ١ ب- ٢ ج- ٦ د- ١٢

٢- مزرعة فيها غنم(غ) و دجاج(د) ، فإذا كان عدد رؤوس الحيوانات في المزرعة ٢٢ رأســـا و عدد أرجل الحيوانات ٦٠ رجلا ، فما عدد الأغنام و ما عدد الدجاج في تلك المزرعة؟

أ- غ=٨، د=١٤ ب- غ=١٢، د=١٠ ج- غ=١١، د=١١ د- غ=١٦، د=٦

٣- إذا علمت أن البكتيريا تنقســم انقســاما مباشــرا أي تنقســم كل خلية على خليتين في كل مرة , فكم سيكون عدد الخلايا في المرة السابعة من بدء انقسام الخلية؟

أ- ١٦ ب- ٣٢ ج- ٦٤ د- ١٢٨

٤- ثلاث أشكال دائرة ومربع و مستطيل لها نفس المساحة = ١ $cm^{٢}$, وعرض المستطيل ربع طوله ما الشكل الذي أقل محيط؟

أ- المربع اقل محيط ب- الدائرة اقل محيط ج- المستطيل اقل محيط د- محيط الثلاثة متساوية

٥- لاحظ نواتج الامثلة واكتب ناتج المثال الرابع؟

11* 11 = 4
22* 22 = 16
33* 33 = 36
44* 44 = ?

أ- ٠ ب- ١٦ ج- ٤٨ د- ٦٤

٦- لاحظ نواتج الامثلة واكتب ناتج المثال الرابع؟

1 * 4 = 10
2 * 8 = 20
4 * 16 = 40
8 * 32 = ??

أ- ٤٠ ب- ٤٨ ج- ٨٠ د- ١٦٠

٧. من الشـــكل المجاور كم وزن الجميع؟

أ- ٢٧

ب- ٣٠

ج _ ٣٤

د - ٥٤

٨. إذا قال أحد الطلاب لك أستطيع أن اثبت لك أن ٥ =٧ وقدم لك البرهان الآتي:

١ = ١٥ ، وكذلك ١ =١٧ أنه ١ مهما رفع للقوى =١

أي ١٧ =١٥ لأن الكميتان متساويتان.

وتوجد قاعدة في الرياضيات إذا تساوت الأساسات تساوت الأسس وبالعكس

وعليه ٧ = ٥ ما الخطأ في هذا البرهان.(الخطاء القاعدة لها تكملة

أ- الكميتان غير متساويتان ب- ٥,٧ اعداد فردية ج- المستطيل اقل محيط د- اذا كانت الاسس اكبر من ١

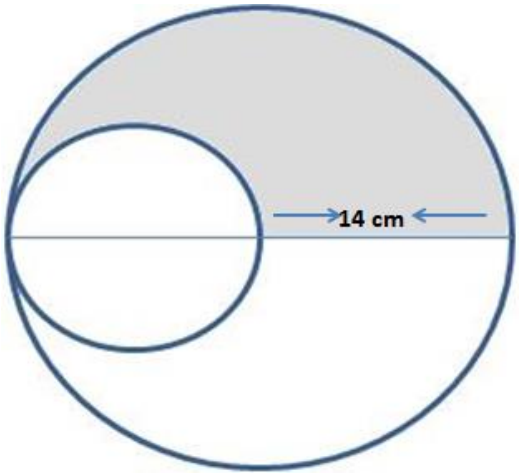
٩. تبلغ مساحة الجزء المضلل في الشكل المجاور..... cm

أ- ٧٧

ب- ١٥٤

ج- ٢٣١

د- ٣٠٨



١٠. مستطيل مساحته تساوي محيطه(عددياً) وبعداه مختلفان ومجموع بعداه اقل من ١٠ أوجد بعديه ؟
الجواب=.....cm

أ- ٣, ٦ ب - ٤, ٥ جـ - ٢,٧ د -١,٨

١١. إذا تواجد في حفلة ستة أشخاص وأراد كل فرد أن يصافح الآخرين مرة واحدة فقط ، كم عدد مرات التصافح التي تمت في هذه الحفلة ؟

أ- ٣٦ ب - ١٨ جـ - ١٥ د- ١٢

١٢. عند أحمد(A)(٥) أرغفة خبز ، وعند حسن (H)((٣) أرغفة خبز، جاء شخص ثالث وشاركهم في الأكل بحيث أكل الثلاثة بتساوي وأعطاهم (٨) قطع نقدية وطلب منهم توزيعها بالحق. فكيف يتم توزيعها؟

أ- A= ٤ , H=٤ ب- A= ٥ , H=٣ جـ- A= ٧ , H=١٤ د- A= ٦ , H=٢

١٣. مجموع عددين(A+B=٤٠) وحاصل قسمة الكبير على الصغير يساوي(٤) فما العددان؟

أ- A= ٤٠ ,B=١٠ ب - A=٣٦ ,B=٩ جـ- A =٣٠ ,B=١٠ د- A=٣٢ ,B=٨

١٤. رجل عمره الآن (٧١) سنة وأبنه (٣٣) سنة قبل كم سنة كان عمر الأب ثلاثة أضعاف ولده؟
الجواب.... سنة.

أ- ١٤ ب - ١١ جـ - ١٥ د- ٢١

١٥. عمر شخص بعد (٣٠) سنة يصبح عمره مرتين ونصف من عمره الآن فكم عمره الآن؟ الجواب يساوي.....سنة.

أ- ١٢ ب - ٢٠ جـ - ١٠ د- ١٨

١٦. كم تستطيع أن تطرح الرقم (٥) من العدد (٢٠) ؟ الجواب:-

أ- مرة واحدة ب - مرتين جـ - ثلاث مرات د- أربع مرات

١٧. سارت بطة وأمامها بطتان ، وأخرى ورائها بطتان وثالثه بين بطتين فما عدد البط ؟
الجواب:.....بطة.

أ- ٦ ب - ٩ جـ - ٣ د- ١٢

١٨. أحمد أطول من حسان , و رامي اقصر من سمير . فأي من هذه المقولات تصح أكثر ؟

أ- رامي أطول من حسان ب- حسان أطول من رامي جـ- رامي و حسان بطول واحد د- لا يمكن معرفة من منهما أطول

١٩. لدى عائلة عدد من الأطفال بحيث كل ولد يقول(لي أخين)وبنت تقول (لي أختين) فكم عدد كل من الذكور و الإناث لهذه العائلة؟ الجواب:-

أ- ذ=٢ ، أ= ٢ ب - ذ=٣ ، أ= ٢ جـ - ذ=٢ ، أ= ٣ د- ذ=٣ ، أ= ٣

٢٠. كم وزن الدجاجة إذا علمنا أنها تزن نصف وزنها زائد (١) كغم؟ الجواب..... كغم

أ- ١,٥ ب - ٢ جـ - ٣ د- ٠,٥

٢-٣ امثلة مبرهنات

مثال : ما اهمية المبرهنة الاتية ؟

مجموع زوايا المثلث يساوي ١٨٠°

١- بناء تخمينات رياضية والتحقق منها :

مثال : ما ناتج (٣ ÷ ٣٢) تقريباً ؟

٢- تطوير وتقييم حجج وبراهين رياضية :

مثال : هل ان كل دالة مستمرة تكون قابلة للاشتقاق ؟

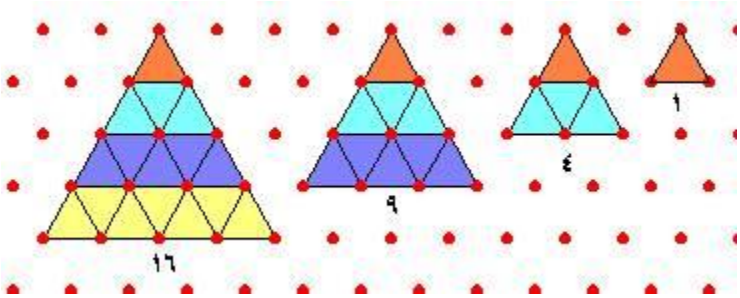
الجواب : كلا .

الحجة : الدالة $y = |x|$ تكون مستمرة ولكنها غير قابلة للاشتقاق .

٤- اختيار واستخدام انماط مختلفة من الاستقراء أساليب البرهنة :

مثال : جد مجموع الاعداد الفردية العشرين الاولى

مثال٤: إيجاد عدد المثلثات الصغيرة في الشكل التالي بالتسلسل المعروض، ثم كم هو عدد المثلثات في المثلث الذي طول ضلعه **(ن)** : الجواب $ن^{٢}$



٤-٢ اختبار الاستقراء الاستقرائي

١- إذاأعطيت التسلسل ..... ,٢٠٠ ,٣٠٠,٤٠٠ فإن العدد الثامن هو.....

أ- ٥٠٠ ب- ٧٠٠ ج-٨٠٠ د-٩٠٠

٢- إذا أُعطيت التسلسل.....,٧٠, ٨٠ , ٨٥ فان العدد السادس هو.....
أ- ٥٠ ب- ٥٥ ج-٦٠ د-٦٥

٣- إذا كانت الأعداد:.١١٨, ٣٢٦, ٦٦٤, ٦٧٢, ٨٨٠ تقبل القســمة على ٢ بدون باقي فأي الأعداد التالية تقبل القسمة على ٢ بدون باقٍ من هذه الأعداد:٢٢٠, ٢٢٣,٢٢٥,٢٢١ هو ....
أ- ٢٢١ ب- ٢٢٣ ج-٢٢٥ د-٢٢٠

٤- إذا كان ٢ +٢ +٢ +٢ + ٢ = ٥ x ٢
٣ +٣ +٣ + ٣ = ٤ x ٣

٤ +٤ + ٤ = ٣ x ٤

فأن .....= ٢ x ٧

أ- ٧ + ٧ ب- ٢ +٢ ج- ١٤ +١٤ د-٥+ ٥

٥- إذا كان ٧٧٦٠=١٠x٧٧٦, ٥٦٠=١٠x٥٦ , ٩٠ =١٠x٩ فأن... ١٠ x ٨٨٧٦ =
أ- ٨٨٧٦ ب- ٨٨٧٦٦٠ ج-٨٨٧٦٠ د-٨٨٧٦٠٠

٦- تأمل الأمثلة الآتية ثم اوجد المثال الخامس
٢+ ١+ ٠ =٣

٣ + ٢ + ١ =٦

٤+ ٣ + ٢ =٩

٥ + ٤ + ٣ =١٢

سيكون المثال الخامس هو.....

أ- ٧+٤+ ٣=١٣ ب- ٦+٥+ ٣=١٥ ج- ٦+٥+ ٣=١٥ د-٦+٥+ ٤=١٥

٧- تأمل الأمثلة الآتية ثم اوجد المثال التاسع
١١١ =١ x ٣ x ٣٧

٢٢٢ =٢ x ٣ x ٣٧

٣٣٣ =٣ x ٣ x ٣٧

٤٤٤ =٤ x ٣ x ٣٧ سيكون المثال التاسع هو.....

أ- ٥٥٥ ب- ٦٦٦ ج-٨٨٨ د-٩٩٩

٨- لاحظ: ١ عدد فردي + ٣ عدد فردي = ٤ عدد زوجي
كذلك ٣ عدد فردي + ٥ عدد فردي = ٨ عدد زوجي

كذلك ٥ عدد فردي + ٧ عدد فردي = ١٢ عدد زوجي

كذلك ٧ عدد فردي + ٩ عدد فردي = ١٦ عدد زوجي لذا يكون....

أ- عدد زوجي+عدد زوجي= عدد فردي ب- عدد فردي+عدد فردي= عدد فردي ج- عدد فردي+عدد فردي= عدد زوجي د- عدد فردي+عدد زوجي= عدد زوجي

٢. تفكير استنتاجي :

تامل الاعداد التالية

١,٣,٥,٧,٩,.....٣٩

تمثل متتالية عددية عدد حدودها (٢٠) وحدها الاول هو (١) وحدها الاخير (٣٩) وحسب قانون مجموع حدود متتالية عددية الاتي : $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

نحصل على : $S_{20} = \frac{20}{2}(1+39)$

$= 10 * 40$

$= 400$

مثال١: لاحظ الامثلة الاتية وستنتج المثال الخامس

٣٣ = ٣ . ١١

٣٦٣ = ٣٣ . ١١

٣٦٦٣ = ١١,٣٣٣

٣٦٦٦٣ = ٣٣٣٣ . ١١

??? = ٣٣٣٣٣ . ١١

يتوصل الطالب إلى معرفة الحد الخامس ٣٦٦٦٦٣ =٣٣٣٣٣ . ١١

مثال٢: يتوصل التلميذ من خلال دراسة حالات فردية للمثلث عن طريق القياس باستخدام الأدوات الهندسية إلى أن "مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمثلث = ١٨٠°.

أن تدريب الطلبة على عملية الاستقراء يجب إتباع الإجراءات التالية:

- اختيار عدد من الحالات الفردية في موقف معين والتي تجمع بينها خاصية مشتركة.
- دراسة تلك الحالات الفردية بهدف الوصول إلى الخاصية المشتركة بينها وصياغتها على صورة قاعدة عامة، وذلك عن طريق تجريد تلك الخاصة من الحالات الفردية.
- تطبيق القاعدة العامة التي تم الوصول إليها على أمثلة جديدة غير تلك التي تم استنتاج القاعدة منها، وذلك بهدف التأكيد على صحة هذه القاعدة وانطباقها على أمثلة أخرى.

مثال (٢): نحن نعلم ان :

مجموع زوايا اي مثلث =١٨٠

وعليه, مجموع زوايا اي شكل رباعي =°٢*١٨٠

وكذلك, مجموع زوايا المخمس = °٣*١٨٠

وبشكل عام فان :

مجموع الزوايا الداخلية لأي مضلع عدد أضلاعه n هو:

°a) n*١٨٠ b) (n−١)x١٨٠ c) (n−٢)*١٨٠

من الواضح ان الاختبار (c) هو الجواب الصحيح

نشاط (١) : استنتج تعميما من كل متتالية من الاعداد الآتية :

.....,a)٢.٥,١٠

.....,b)٢,٥,٢٦

نشاط (٢) : انت تعلم ان الثلاثي (٣,٤,٥) يمثل اطوال اضلاع مثلث قائم الزاوية كيف يمكن لطالب مرحلة متوسطة ان يستنتج ان الثلاثي (n,٤n,٥n٣) يكون كذلك.

نشاط (١): يقبل العدد القسمة على (٧) اذا كان ضعف رقم احاده مطروحا من العدد المتكون من بقية الارقام يقبل القسمة على (٧).

هل ان العدد (٥٤٦) يقبل القسمة على العدد (٧) من دون استخدام عملية القسمة ؟

نشاط (٢): اذا علمت ان مجموع حدود متتالية عددية (عدد حدودها n وحدها الاول هو a_1 وحدها الاخير هو a_n) هو :

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

جد مجموع الاعداد الفردية العشرين الأولى.

مثال : لماذا الصفر عدداً زوجياً؟

الجواب : لانه يمكن تمثيله على شكل ٠ = ٢ x ٠

اي انه ; الصفر يمكن تمثيله على شكل مضاعفات العدد ٢

مثال: حل طالب المعادلة $x^2 - x + 1 = 0$ بصورة الآتية:-

$x^2 = x - 1$ ..... (٢)

ومن المعادلة $x^2 - x = -1$ وبالتحليل عامل مشترك

$X(X-1) = -1$ نعوض عن القوس $(X-1)$ من معادلة (٢) فيكون

$x \cdot x^2 = -1$

$x^3 = 1$

$x = -1$ وعند التحقق بالتعويض بالمعادلة الاصلية لا يتحقق الحل فاين الخطاء الذي وقع فيه الطالب ؟

الجواب: الخطاء يكمن في الخطوة $x^{٢} = x$-١ حيث هذه الخطوة يصبح شرطها ان يكون المقدار (x- ١كمية موجبة اي x كبر من ١.

مثال (١): كيف يمكنك التعبير عن ان: (عملية جمع الاعداد تحقق الخاصية التبديلية) بالرموز ؟

الجواب : x+y=x+y

مثال (٢): عددان x,y مجموع مربعيهما هو ٤١ عبر عن ذلك بالرموز .

الجواب : $x^{٢}+y^{٢}=٤١$

مثال (٣) : عددان مجموعهما ١٩ , عبر عن حاصل ضربهما با الرموز.

الجواب :

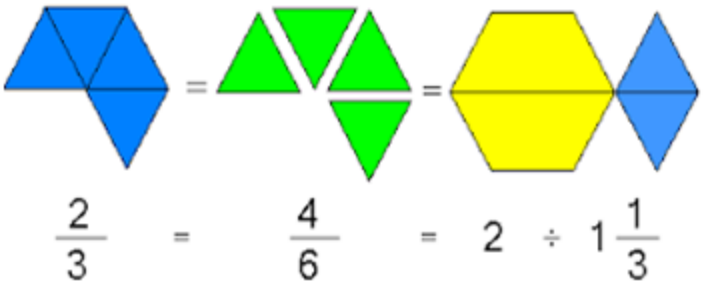
X.y=x (١٩–x)

نشاط (١) : عددان x,y مربع مجموعهما هو ٤٩ عبر عن دللك بالرموز .

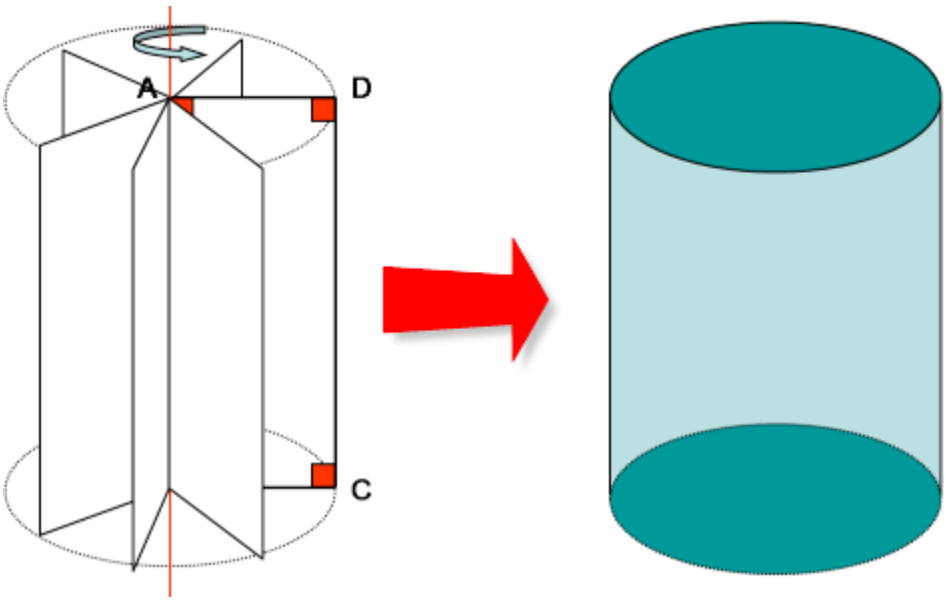
نشاط(٢): عمر احمد x من السنوات وعمر محمد ضعف عمر احمد وعمر محمود ١٥ سنة اقل من عمر احمد , اي مما يلي يمثل مجموع اعمار الاشخاص الثلاثة ؟

(d)٤x+١٥	(c)٤x–١	(b)٣x–١٥	a–(٣x+١٥)

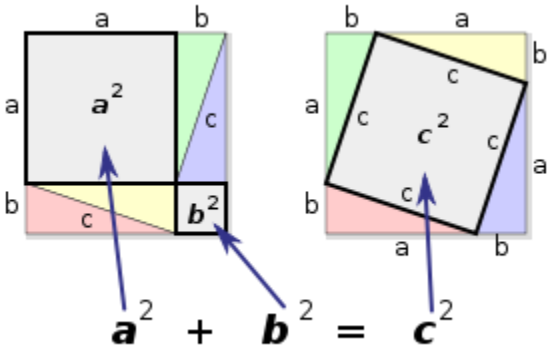
مثال (١): ارسم نمودج لتمثيل كل من الكسور $١\frac{١}{٣} \div ٢ = \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$



مثال (٢): اذا دار مستطيل احد اضلاعه منطبق على محور السينات حول المحور دورة كاملة فان الشكل الناتج يمثل نموذج الاسطوانة.



نشاط : ارسم نموذجا لتمثيل مبرهنة فيثاغورس.



٥- الحدس (Intuition) : هو تكوين تخمينات رياضية والتحقق منها.

مثال (١): جد ناتج قسمة العدد (١١٢٢)على العدد(١١) من دون اجراء عملية القسمة :

a)١٢٠ b) ١٢ c)١٠٢ d) ١٠٠٢

الجواب :الاختيار (c) هو الاختيار الصحيح

نشاط : تصب حنفيتا ماء في حوض اذا فتحت الحنفية الاولى وحدها فانها تملا الحوض في (٤) ساعات وتملوه الثانية وحدها في (٣) ساعات فاذا فتحت الحنفيتان معا فبعد كم ساعة يمتلئ الحوض ؟

a) ساعتان b) اكثر من ساعتين c) اقل من ساعتين

مثال (١) :- كل مربع هو مستطيل ، $p \rightarrow q$

وكل مستطيل هو متوازي اضلاع $r \rightarrow q$

هل ان : كل مربع هو متوازي اضلاع ؟ $P \rightarrow r$

الجواب :- كل مربع هو متوازي الاضلاع (حسب قانون القياس في المنطق)

مثال (٢) :- اذا كانت الدالة قابلة للاشتقاق فانها مستمرة ، $p \rightarrow q$

f دالة غير مستمرة $\sim q$

هل ان الدالة f دالة قابلة للاشتقاق؟ $\sim p$

a) نعم b) كلا c) ربما

الجواب :- (b) هو الاختيار الصحيح (حسب قانون المعاكس الايجابي في المنطق)

مثال(٣):- كل عدد صحيح هو عدد نسبي , الصفر عدد صحيح

هل ان الصفر عدد نسبي ؟ ولماذا ؟

نشاط (١) : اذا كانت الدالة قابلة للاشتقاق فأنها مستمرة

- لتكن (g) دالة مستمرة
- هل ان (g) دالة قابلة للاشتقاق ؟

نشاط (٢) : اذا كانت الدالة قابلة للاشتقاق فأنها مستمرة

- لتكن (h) دالة غير قابلة للاشتقاق
- هل ان (h) دالة مستمرة

نشاط (٣) : اذا كانت الدالة متباينة وشاملة فأنها متقابلة , f دالة غير متقابلة

هل ان f دالة شاملة ؟ ولماذا ؟

تلميح : نحتاج قانون دي موركان الذي ينص على ان : ~(p^q)Ξ ~p٧~q

مثال : هل يوجد مثلث قائم الزاوية ومتساوي الاضلاع في آنٍ واحد ؟

الجواب : (الطريقة الاولى)

ماذا يحدث لو كان يوجد ذلك ؟

نفرض يوجد مثلث قائم الزاوية ومتساوي الاضلاع في انٍ واحد .

∵المثلث قائم الزاوية . ∴احدى زواياه قياسها٩٠°

∵المثلث متساوي الاضلاع . ∴ جميع زواياه متساوية .

∵ مجموع *زوايا اي مثلث* ١٨٠° ∴قياس كل زاوية من زواياه ٦٠°

هل هذا معقول ؟! (احدى زواياه 60° و ٩٠° *في انٍ واحد)* ∴ هذا تناقض

فأن افتراضنا في البداية خاطئ ولا يوجد مثلث قائم الزاوية ومتساوي الاضلاع في انٍ واحد .

(الطريقة الثانية)

نفرض العكس يوجد مثلث قائم الزاوية ومتساوي الاضلاع

∵ المثلث متساوي الاضلاع, ليكن طول كل ضلع فيه هو X

∵ المثلث قائم الزاوية فإنه تنطبق عليه مبرهنة فيثاغورس, وعليه فإن :

$X^2 + X^2 = X^2 \Rightarrow 2X^2 = X^2 \Rightarrow 2 \neq 1$

هل هذا معقول ؟! هنا تناقض

وعليه فان افتراضنا خاطئ ولا يوجد مثلث قائم الزاوية ومتساوي الاضلاع في انٍ واحد.

الفصل الثالث

الاستنتاجات والتوصيات

٣-١ الاستنتاجات

١.التعرف على الاستقراء الرياضي

٢.توصلنا الى أن الاستقراء الرياضي مهم جدا في سبيل الوصل الى مفهوم المبرهنات والاستنتاجات والتقصي

٣.يمكن للاستقراء المصاحب للطالب ان يساهم في مواجهة المشكلات والمسائل الرياضية في محاولة لحلها، وتحدده عدة اعتبارات تتعلق بالعلميات العقلية التي تتكون منها عملية الحل

٣-٢ التوصيات

١.توفير مصادر ومراجع حديثة تتناول الاستقراء الرياضي

٢.عمل دراسة وبحوث في الاستقراء الرياضي

٣.الإهتمام بتطبيقات المختلفة للاستقراء الرياضي بكل انواعه

٤.التوسع بدراسة الاستقراء الرياضي نسبة لأهميتها في الحياة من خلال تطبيقاتها العملية

المصادر

المصادر العربية

إبراهيم، محمد عبدالله أحمد، (٢٠٠٧), جامعة السودان كلية التربية

إبراهيم، مجدي، (٢٠٠٩) ,التفكير الرياضي وحل المشكلات, القاهرة: عالم الكتب للتوزيع والطباعة

ابو زينة، فريد كامل, (٢٠١١) ، الرياضيات مناهجها وأصول تدريسها ، مكتبة الفلاح ،عمان

أبو زينة فريد كامل و عبدالله يوسف عبابنة (٢٠١٠) ,تطوير المناهج الرياضيات طرائق التدريس ,عمان ,دار وائل للنشر و التوزيع

أبو زينة فريد كامل و عبدالله يوسف عبابنة (٢٠١٠), ص ٢٧٦ ,عمان, دار وائل للنشر والتوزيع

الحسني ، فاتن (٢٠١١), طالبات الصف الخامس الأساسي بغزة (رسالة ماجستير غير منشورة) , الجامعة الإسلامية غزة

الخطيب , خالد محمد (٢٠٠٩) ,الرياضيات المدرسية مناهجها تدريسها و التفكير الرياضي ، عمان, مكتبة المجتمع العربي للنشر و التوزيع

الخطيب ,خالد محمد (٢٠٠٩) ,ص ٣٧, عمان, مكتبة المجتمع العربي للنشر و التوزيع

الخطيب, خالد محمد(٢٠٠٩) ,ص ٤٤,

عمان, مكتبة المجتمع العربي للنشر و التوزيع

الزهيري, حيدر عبد الكريم محسن(٢٠١٣),

أثر التمثيل الرياضي في إنجازات المرحلة المرحلة المتوسطة في الرياضيات وتفكيرهم البصري , مجلة كلية التربية الأساسية

العبسي، محمد (٢٠١٠). طرق تدريس الرياضيات لذوي الاحتياجات الخاصة. عمان: دار المسيرة للنشر والطباعة

العمري، ناعم بن محمد (٢٠٠٩)، المناهج وطرق تدريس الرياضيات، كلية المعلمين، جامعة الملك سعود

الكبيسي, عبد الواحد حميد (٢٠٠٨) ,مجلة أبحاث البصرة العلوم الإنسانية

المنصور, غسان (٢٠١١), كلية التربية، جامعة دمشق ,مجلة جامعة دمشق للعلوم التربوبة و النفسية

باسكا جويس فانتيس و تامارا ستامبيث, (٢٠١٣), المنهاج الشامل للطلبة الموهوبين,

ترجمة(أميمة عمور و أخرون), ط١, دار الفكر للنشر و التوزيع, عمان

باسم, محمد أحمد (٢٠١١) ,مجلة جامعة فلسطين للأبحاث و الدراسات

تغريد , خضير حسن الوائلي (٢٠١٠),

مادة الرياضيات والتفكير الابتكاري لدى طلاب الصف الثاني المتوسط

حمادة, محمد (٢٠٠٩), التعلم النشط في نوادي الرياضيات المدرسية في تنمية مهارات التفكير الرياضي و حل المشكلات الرياضية باستخدام بعض مهارات التفكير (الاستدلال –البرهنة),مجلة جامعة حلوان

سعادة ,جودت (٢٠٠٣), تدريس مهارات التفكير , دار الشروق للنشر و التوزيع, الاردن

خير سليمان شواهين (٢٠١٠),

تعليم العلوم والرياضيات باستخدام وسائل تعليمية عادية و رقمية,

عمان, دار المسيرة للطباعة و النشر

سامي سلطي عريفج ونايف أحمد سليمان,(٢٠١٠) , أساليب تدريس

الرياضيات والعلوم,

الاردن, دار صفاء للنشر والتوزيع

محمد محمود حمادة (٢٠٠٥), مجلة تربويات الرياضيات ,الناشر: المجلة المصرية لتربويات الرياضيات

المصادر الأجنبية

Breen&Oshea,(٢٠١٠) mathematics teachers ' beliefs about teaching and learning mathematics and instructional practices . Mathematics Education Research Journal , Education learner Students " , Sonoma , County Office of Education

Fisher , R. , (٢٠٠٥) , Teaching Children to Think , ٢ND Editions . . Nelson Thornes , United Kingdom

Harel&Sowder,(٢٠٠٥)Thinking Maps : Visual tools for activating

Kaye,(٢٠٠٨) Thinking Represents Thinking Maps . In

PBS Teacherline,(٢٠١١) Thinking Maps on Enthusiasm , Attitude and Learning Style An Action Research Study of Students in Management Course , Science Journal of Education

Sinead&Ann,(٢٠١٠) mathematics education Mathematics Education Research Journal

Turner,١٩٩٧:٦٦–٧٢. Analyzing some Iranian – high school teachers ' beliefs on mathematics . mathematics learning and mathematics teaching . Journal of Environmental & science Education