وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة ديالى

كلية التربية المقداد

قسم الرياضيات

بحث مقدم الى مجلس كلية التربية المقداد / جامعة ديالى
قسم الرياضيات وهو جزء من متطلبات
نيل شهادة البكالوريوس في الرياضيات

بعنوان

حل المعادلات التفاضلية الاعتيادية

إعداد الطالبتان

حنان حسيب عبدالله

بشرى كامل غيدان

باشراف

م.م هند ابراهيم

1443 هـ 2022 م

الآيـــــة الكريمة

بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

((أَمَّــنْ هُــوَ قَانِــتٌ آنَــاءَ اللَّيْــلِ سَــاجِدًا وَقَائِمًــا يَحْــذَرُ الْآخِــرَةَ وَيَرْجُــو رَحْمَــةَ رَبِّــهِ ۗ قُــلْ هَــلْ يَسْــتَوِي الَّــذِينَ يَعْلَمُــونَ وَالَّــذِينَ لَا يَعْلَمُونَ ۗ إِنَّمَا يَتَذَكَّرُ أُولُو الْأَلْبَابِ))

صدق الله العظيم

الزمر (9)

الاهــــــــــداء

الـــى مـــن بلـــغ الرســـالة ونصـــح الامـــة وتركهـــا علـــى المحجـــة البيضـــاء ، ليلهـــا كنهارها قاصداً خير الخلق محمد ﷺ .

الـــى مـــن كللـــه الله بالهيبـــة والوقـــار ، الـــى مـــن علمنـــي مرحـــب العطـــاء بـــدون انتظـــار ، الـــى مـــن احمـــل اســـمه بكـــل افتخـــار الـــى والـــدي الطيـــب ، الـــى جنتـــي فـــي الارض الـــى بســـمة الحيـــاة الـــى اول مدرســـة الـــى والـــدتي اطـــال الله فـــي عمرهـــا ، بعـــد انتهـــاء مســـيرتي الدراســـية ، فـــإنني اولاً اهـــدي تخرجـــي ونجـــاحي الـــى زوجـــي الـــذي ســـاندني ، مثلـــي الاعلـــى فـــي الحيـــاة ، واعـــز مـــا املـــك ، فانـــت المشـــجع والـــداعم الاول ، بـــدونك لمـــا كنـــت حققـــت هـــذا النجـــاح واجتـــزت هـــذه الخطـــوات الصـــعبة ، ادامـــك الله ورفـــع قـــدرك الـــى رفـــاق دربـــي وســـند حيـــاتي الـــى اخـــواني واخـــواتي حفظهـــم الله الـــى كـــل مـــن قـــدموا لـــي ادنـــى نصـــيحة جـــزاهم الله خيـــراً الـــى مـــن علمـــوني حرفـــاً حتـــى اصـــبحت اســـتاذة الـــى معلمينـــي ومدرســـيني واســـاتذة جـــامعتي رحـــم الله ميـــتهم ، واطال في باقيهم وعلى رأسهم الاستاذة هند ابراهيم محمد

الباحثة :

الشكر والعرفان

الشكـر الله عـز وجـل الـذي أنـار لـي الـدرب وفـتـح لـي أبـواب العلـم و أمـدنـي بالصبـر والإرادة.

حينمـا نعبـر شـط العمـل الـدؤوب لا يهـيم فـي داخلنـا سـوى أولئـك الذيـن غرسـوا زهـراً جميـلاً فـي طـريقنـا ، أولئك الذيـن منحـونـا العزم تلـو العـزم ، لنتخطـى الصعـاب ، ونقـف واثقـي الخطـى ، نشاطـرهـم الإبـداع حـرفـاً ولـغـةً .

لا يسـع حـروفـي إلا أن تـمـتـزج لـتـكـون كـلـمـات شـكـر وعـرفـان

ليـس لأحـد معيـن إنمـا لكـل مـن سـاهـم فـي هـذا العمـل مـن خـلال الأسـاتذة والمـشـرفيـن والأصدقاء.

لكم الف شكر وتحية

مستخلص البحث :

يناقش هذا البحث المعادلات التفاضلية العادية من الرتبة الأولى وبعض طرق حلها وتطبيقاتها .

إستعرضنا في الفصل الأول من هذا البحث المقدمة و أهداف البحث والمفاهيم الأساسية التي كان الهدف منها التعرف على معنى المعادلات التفاضلية ورتبتها ودرجتها ، ومشكلة البحث والمنهج المستخدم في البحث.

أما الفصل الثاني فقد استعرضنا بعض أنواع المعادلات التفاضلية العادية من الرتبة الأولى وبعض طرق حلها، والتي من ضمنها حل المعادلة التفاضلية العادية بإستخدام المعادلات ذات المتحولات المنفصلة والمعادلة التفاضلية المتجانسة ومعادلة ريكارتي والمعادلة الخطية من الدرجة الأولى.

أما في الفصل الثالث تناولنا بعض طرق حل المعادلات التفاضلية العادية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى بإستخدام طريقة فصل المتغيرات والمعادلة المتجانسة والمعادلة التامة وطريقة ليبنز ماكلورين ومعادلة بيرنولي .

أما في الفصل الرابع إستعرضنا بعض تطبيقات المعادلات التفاضلية العادية من الرتبة الأولى مثل المسارات المتعامدة والمسارات الغيرمتعامدة و مسائل النمو والاضمحلال و مسائل درجة الحرارة ومسائل الجسم الساقط.

الفهرس

الرقم	الآية الكريمة	1
	الاهداء	2
	الشكر والعرفان	3
	مستخلص البحث	4
	الفهرس	5
	Abstract	7
	Abstract	8
(1 – 1)	الفصل الاول – المقدمة - تمهيد	9
(2 – 1)	مشكلة البحث	10
(3 – 1)	اهداف البحث	10
(4 – 1)	اهمية البحث	10
(5 – 1)	مصطلحات البحث	10
(6 – 1)	منهج البحث	11
(7 – 1)	الدراسات السابقة	
(1 – 2)	الفصل الثاني – نواع المعادلات التفاضلية	12
(2 – 2)	حل المعادلات التفاضلية العادية	12
(3 – 2)	انواع المعادلات التفاضلية العادية ذات الرتبة الاولى المحلولة بالنسبة للمشتق وبعض طرق حلها	14
(1 – 3 – 2)	معادلة تفاضلية عادية ذات متحولات منفصلة	14
(2 – 3 – 2)	المعادلات التفاضلية المتجانسة	14
(3 – 3 – 2)	معادلة ريكارتي	16

(2 – 3 – 4)	المعادلة الخطية من الجرجة الاولى	17
(2 – 4)	بعض طرق حل المعادلات التفاضلية العادية من الرتبة الاولى والدرجة الاولى	19
(2 – 4 – 1)	الطرقة الاولى – فصل المتغيرات	19
(2 – 4 – 2)	الطريقة الثانية – المعادلة التفاضلية المتجانسة	21
(2 – 4 – 3)	الطرقة الثالثة – المعادلات التامة	24
(2 – 4 – 4)	الطريقة الرابعة – طريقة ليبنز ماكلورين	29
(2 – 4 – 5)	الطريقة الخامسة – معادلة بيرنولي	30
	النتائج والتوصيات	35
	المصادر	36

Abstract

In this research the normal differential equations from the first degree have been discusses well as some of ways of their solution beside some applications.

We well review in the first chapter the plan of the research, introduction, the aim, basic concept which was intended recognized the meaning of the normal differential equations, rank and degree, problems and the concept which was used.

In the second chapter we review some types of the normal differential equations of the first order and some ways to solve them such and solving the normal differential equation by using the equations discrete variable, differential equations homogenous, Reckarte equation and linear equation of the first degree.

In the third chapter we review some method of solving the normal differential equations from the first rank and 7 degree using method of separation of variable s, homogenous equation, full equation, method of Maclaurin and Bernoulli equation.

In the fourth chapter we talked about some of the applications of the normal differential equations of the first rank like orthogonal tracks and non-orthogonal tracks, growth and decay issues, the temperature issues and falling object issues.

But in the fifth chapter we dealt with the results, recommendations of this research and references.(1)

---

[1] Mohammed Ahmed Safi 2004, "on the Fractional Differ integrated from solution of some Special Differential Equations, radiate Studies, the University of Jordan," 2004.

الفصل الاول

المقدمة

الاطار العام

(1-1) تمهيد

ظهر مفهوم المعادلة التفاضلية منذ طرح مفهوم التفاضل وبدأ على نحو أقوى مع بداية القرن السادس عشر وتطورت موضوعات المعادلات التفاضلية بسرعة فائقة وذلك لكثرة تطبيقاتها وارتباطها المباشر بعدد من فروع الرياضيات مثل الحسبان التفاضلي والتكاملي والمعادلات التكاملية وحسبان التغيرات ومسائل التقريب والحلول المثلى والشروط الحدية وكثير من البحوث الفيزيائية والكيميائية.

المعادلة التفاضلية هي معادلة تحتوي مشتقات وتفاضلات لبعض الدوال الرياضية وتظهرفيها بشكل متغيرات المعادلة ويكون الهدف من حل هذه المعادلات هو إيجاد هذه الدوال الرياضية التي تحقق مشتقاتها هذه المعادلات .

تبرز هذه المعادلات التفاضلية بشكل كبيرفي تطبيقات الفيزياء والهندسة وحتى النماذج الرياضية المتعلقة بالعمليات الحيوية والكيميائية والإجتماعية والإقتصادية.

وهي علاقة تربط بين متغير مستقل واحد او أكثر والدالة المبحوث عنها التابعة لهذه المتغيرات التي يفترض أنها متغيرات حقيقية كذلك الدالة.

وعندما تكون الدالة متعلقة بمتغير واحد فالمعادلة التفاضلية تمثل معادلة تفاضلية عادية ، أما عندما تكون الدالة متعلقة بعدد من المتغيرات فالمعادلة التفاضلية تدعى معادلة تفاضلية جزئية .

وكما في المعادلات الجبرية هنالك جملة معادلات تفاضلية عادية وكذلك جملة معادلات تفاضلية جزئية .[1]

---

[1] المعادلات التفاضلية العادية حلول وتطبيقات ، د/إسماعيل بوقفه ، د/عائش الهنادو، المعادلات التفاضلية – الكتاب الأول ، د/قيصر قبارز مينسكي ، المركز العربي للتعريب والترجمة والتأليف والنشر.

(2-1) مشكلة البحث :

المعـادلات التفاضـلية وتعـدد أنواعهـا تشـكل غمـوض فـي كيفيـة الحـل وكيفيـة التفريـق بـين أنواعهـا المختلفة ، وكذلك توجد صعوبة في تطبيق هذه المعادلات في مختلف المجالات الفيزيائية والكيميائيـة وغيرها لاختلاطها بالعلوم الأخرى ولصعوبة هذه المجالات نفسها لأنها متعددة الفروع وشـاملة من العلوم لذلك تطبيق هذه المجالات ليس بالأمر السهل.

(3-1) اهداف البحث :

1- التعرف على المعادلات التفاضلية العادية من الرتبة الأولى .
2- التعرف على بعض طرق حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى.
3- تطبيق مفهوم المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى في بعض المجالات المختلفة.

(4-1) اهمية البحث :

- يبين البحث المعادلات التفاضلية بطريقة سهلة مبسطة تساعد في تكوين خلفية علمية ثابتة.
- توضيح التطبيقات التي تؤكد أن للرياضيات أهمية كبرى في الحياة العامة.[1]

(5-1) مصطلحات البحث :

- **المعادلة :**

هي عبارة رياضية مؤلفة من رموز رياضية تنص على مساواة تعبيرين رياضيين ويعبر عن هذه المساواة عن طريق علامة التساوي. (=)

---

[1] المعادلات التفاضلية وتطبيقاتها الهندسية ، د/محمد محمد عباسي ، منشأة المعارف ، 1980 م ، الأسكندرية ، مصر.

- **المعادلة التفاضلية :**

هي علاقة تربط بين متغير مستقل واحد أو أكثر والدالة المبحوث عنها التابعة لهذه المتغيرات " التي يفترض أنها متغيرات حقيقية كذلك الدالة " .

- **رتبة المعادلة التفاضلية :**

تعرف على أنها رتبة أعلى رتبة للمشتقة الموجودة في المعادلة فإذا حوت المعادلة مشتق أول و مشتق ثاني فقط تكون المعادلة من الرتبة الثانية وإذا حوت المعادلة مشتقات أولى فقط تكون المعادلة من الرتبة الأولى.

- **درجة المعادلة التفاضلية :**

هي الأس أو القوة التي يرفع إليها أعلى تفاضل في المعادلة.

<u>(6-1) منهج البحث :</u>

المنهج الوصفي التحليلي:

يعتمد على دراسة الظاهرة كما توجد في الواقع ويهتم بوصفها وصفاً دقيقاً ويعبر عنها كيفياً وكمياً ، فالتعبير الكيفي يصنف الظاهرة ويوضح خصائصها أما التعبير الكمي يعطيها وصفاً رقمياً يوضح مقدار هذه الظاهرة ودرجة إرتباطها مع الظواهر الأخرى.

(7-1) الدراسات السابقة :

- ✓ حسين سليمان ومريم علي (2021) : قدما بعض انواع المعادلات التفاضلية العادية من الرتبة الاولى وبعض طرق حلها، والتي من ضمنها حل المعادلة التفاضلية العادية باستخدام المعادلات ذات المتحولات المنفصلة والمعادلة التفاضلية المتجانسة ومعادلة ريكارتي والمعادلة الخطية من الدرجة الاولى وبعض طرق حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الاولى والدرجة الاولى باستخدام طريقة فصل المتغيرات والمعادلة المتجانسة والمعادلة التامة وطريقة ليبنز ماكلورين ومعادلة بيرنولي .
- ✓ د/اسماعيل بوقفه ،د/عائش الهنادو : وضح في كتابه المعادلات التفاضلية العادية حلول وتطبيقات

الفصل الثاني

بعض أنواع المعادلات التفاضلية العادية
من الرتبة الأولى وبعض طرق حلها

(1-2) انواع المعادلات التفاضلية :

1- المعادلة التفاضلية العادية :

هي المعادلة التي تعتمد على متغير مستقل واحد [1]. مثل :

1- $\frac{dy}{dx} + y = 3x^2$

2- $x\frac{d^3 y}{dx^3} + (2\sin x)\frac{d^2 dy}{dx^2\, dx} = (3 - x^2)y$

2- المعادة التفاضلية الجزئية :

هي المعادلة التي تحتوي على أكثر من متغير مستقل ومشتقاته الجزئية . مثل:

1- $\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{d^2 z}{dy^2} + \frac{d^2 z}{dt^2} = 0$

(2-2) حل المعادلات التفاضلية العادية :

تعريف : نقول عن المتغيرالتابع $y = f(x)$ أنه حل للمعادلة التفاضلية إذا تحقق الشرطان[2] :

1- $\left(x, f(x), f'(x), \dots\dots f^{(n)}(x) \in D, \forall x \in I\right)$

2- $f\left(xf(x)f'(x) \dots\dots f^{(n)}(x) = 0, \forall x \in I\right)$

[1] مقدمة في المعادلات التفاضلية ، إبراهيم ديب سرميني وآخرون ، 1996 ، الرياض ، المملكة العربية السعودية.

[2] المعادلات التفاضلية "الجزء الأول" ، د/حسن مصطفي العويضي ، مكتبة الرشيد.

حيث تنقسم حلول المعادلة التفاضلية العادية إلى :

1- الحل العام للمعادلة التفاضلية العادية :

وهو الحل الذي يحوي ثوابت إختيارية في المعادلة التفاضلية ويكون في الشكل:

$Q(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{c}_1 \ldots$

مثال (1)

الحل العام للمعادلة :

$$y'' + 4y = 0$$

$$y = c_1 \sin 2x + \ c_2 \cos 2x$$

2) الحل الخاص للمعادلة التفاضلية العادية :

هو الحل الذي نحصل عليه بإعطاء قيم عددية للثوابت الموجودة للحل العام للمعادلة التفاضلية.[1]

مثال (1)

الحل الخاص للمعادلة :

$$y'' + 4y = ($$

$$y = \sin 2x -$$

$$c_1 = \ c_2 = 1$$

ملاحظة هامة :

نستطيع الحصول على حل شاذ للمعادلة وهو الحل الذي لا يمكن الحصول عليه من الحل العام وإنما نحصل عليه أثناء حل المعادلة.

[1] الانظمة الخطية للمعادلات التفاضلية، حمزة بشير واخرون ، بحث تخرج ، جامعة السودان للتكنلوجيا .

(2-3) أنواع المعادلات التفاضلية العادية ذات الرتبة الأولى المحلولة بالنسبة للمشتق وبعض طرق حلها :

(2-3-1) معادلة تفاضلية عادية ذات متحولات منفصلة :

هي كل معادلة تفاضلية في الشكل y'=f(x,y) حيث يمكن إعادة صياغتها بحيث تجتمع dx,x في أحد طرفيها وdy.y في الطرف الأخر حيث تكتب بالشكل[1] :

M(x)dx + 1

و هي قابلة للتكامل مباشرة

$$\int m(x)dx + \int n(y)dy = c$$

(2-3-2) المعادلات التفاضلية المتجانسة :

تسمي المعادلة من الشكل M(x,y)dx + N(x,y)dy=0 معادلة متجانسة من الدرجة الأولى إذا كان التابعان N,M متجانسان من الدرجة نفسها.[2]

حيث يمكن تعويض كل x بـ λx و y بـ λy

وللتعرف على المعادلة المتجانسة يجب التعرف على التابع المتجانس حيث التابع المتجانس هو كل تابع معرف على مجال غير تافه حيث يكون من الرتبة K اذا استطعنا أن نستبدل كل x بـ λx و y بـ λy

[1] المعادلات التفاضلية العادية حلول وتطبيقات ، د/إسماعيل بوقفه ، د/عائش الهنادو، المعادلات التفاضلية – الكتاب الأول ، د/قيصر قبارز مينسكي ، المركز العربي للتعريب والترجمة والتأليف والنشر.

[2] المعادلات التفاضلية وتطبيقاتها الهندسية ، د/محمد محمد عباسي ، منشأة المعارف ، 1980 م ، الأسكندرية ، مصر.

بحيث يحقق المتطابقة

F(λx, λy)=

مثال (1)

حل المعادلة التالية :

$$y' = \frac{y}{x}\left[1 -\right.$$

الحل :

لنضع $z = \frac{y}{x}$ فيكون $y=x.z$ و عليه فإن

y'= z+xz'

xz'=(1-z)

ولهذه المعادلة متحولات منفصلة هما z=0 , z=1 وهذا يعطي للمعادلة حلين شاذين هما y=0 , y=x لنفترض أن ، $z \neq 1$ $z > 0$ من الواضح هنا أن تغيير التابع المجهول[1] ثم نقوم بمكاملة هذه المعادلة $z = w^2$

2xw' = 1-

$$\frac{2w'}{(w+1)^2}x + \frac{w-1}{w+1} = 0$$

$$x\frac{w-1}{w+1} = \lambda$$

$$z = w^{\ 2} = \left[\frac{x}{x}\right.$$

[1] المعادلات التفاضلية ، أحمد حمزة الشيحة ، الدار العربية للنشر والتوزيع ، دار الكتب الوطنية بنغازي ، 1996 م.

وعليه فإن

$$y' = x\left[\frac{x+\lambda}{x-\lambda}\right.$$

(2-3-3) معادلة ريكارتي :

المعادلة التفاضلية الأتية :

y' = p(x) +

حيث P, Q, R دوال في X $\qquad$ $p(x) \neq 0$

تسمى معادلة ريكتارتي

مثال (1)

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - 2$$

اذا كانت $y_1 = e^x$ حلاً لها

بإستخدام التعويض الأتي :

$$y = e^x + \frac{1}{z} \rightarrow \frac{dy}{dx} = e^x - \frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx}$$

والتعويض عن ذلك في المعادلة المعطاة نحصل على

$$\frac{dz}{dx}(2e^x - 2e^x)z = -1$$

$$\therefore \frac{dz}{dx} - 1$$

(4-3-2) المعادلة الخطية من الدرجة الأولى :

الصورة العامة للمعادلات الخطية من الرتبة الأولى يمكن كتابتها على الصورة[1] :

$$y' + p(x)y$$

حيث P , Q دوال متصلة في X او ثوابت

طريقة حل المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى:

مثال (1) :

أوجد الحل العام للمعادلة :

$$y' + \frac{x}{y} = e^{x}$$

$$p(x) = \frac{1}{x} \qquad\qquad Q(x) = e^{x}$$

نوجد معامل المكاملة

$$U(X) = e^{\int \frac{dx}{x}}$$

$$U(x) = e^{\ln x} = x$$

ويكون الحل العام

$$xy = \int x\, e^{x}\ dx + c$$

$$xy = xe^{x} - e^{x} + c$$

$$\therefore y = e^{x} - \frac{e^{x}}{x} + \frac{c}{x}$$

[1] الانظمة الخطية للمعادلات التفاضلية، حمزة بشير واخرون ، بحث تخرج ، جامعة السودان للتكنلوجيا .

مثال (2) :

أوجد الحل العام للمعادلة :

$$y' + \frac{y}{x} = e^{x}$$

الحل :

$$p(x) = \frac{1}{x}$$

نوجد معامل المكاملة

$$U(x) = e^{\int \frac{dx}{x}}$$

$$U(x) = e^{\ln x}$$

ويكون الحل العام للمعادلة هو :

$$xy = \int x\, e^{x}$$

$$xy = xe^{x} -$$

$$\therefore y = e^{x} - \frac{e^{x}}{x} + \frac{c}{x}$$

(2-4) بعض طرق حل المعادلات التفاضلية العادية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى

(2-4-1) الطريقة الأولى - فصل المتغيرات :

تستخدم هذه الطريقة لحل المعادلات التفاضلية على الصورة الأتية [1] :

$$m(x,y)dx -$$

القابلة للفصل التي يمكن ان تأخذ الصورة الاتية :

$$m_1(x)N_2(y$$

هذه المعادلة يمكن حلها بالتكامل إذا أمكن التخلص من الحدان $M_2(x), N_2(y)$ من المعادلة

ويمكن تحقيق ذلك بضرب طرفي المعادلة في الحد $\frac{1}{M_2(x)\,N_2(y)}$ وهذا الحد يسمى معامل التكامل

أو factor Integrating وحينئذ تصبح المعادلة على الصورة الاتية :

$$\int \frac{m_1(x)}{m_2(x)}\,dx$$

$$m_2 \neq 0\,, N_2$$

وهذا الحل الذي حصلت عليه هو حل عام يمثل عائلة من المنحنيات وبه ثابت إختياري واحد حيث أن المعادلة التي نحن بصدد حلها من الرتبة الأولى .

ونلاحظ أن طريقة فصل المتغيرات تعتبر من أبسط طرق الحل إذا كانت ممكنة ونلاحظ أنه من البديهي هنا أن تكون الدالتان $M_2(x)N_2(y)$ غير صفريتان . وألا تكون الدوال متصلة كما أننا نلاحظ :

[1] المعادلات التفاضلية "الجزء الأول" ، د/حسن مصطفي العويضي ، مكتبة الرشيد.

1) لابد من تحقيق صورة المعادلة أولاً حتى تتمكن من استخدام هذه الطريقة[1] .

2) لا يمكن استخدام هذه الطريقة إذا كانت المعادلة على الصورة الأتية :

$[M_1(x) \pm N_1$

ونستثني من ذلك الحالة الخاصة الأتية :

$M_2(x) = c_1 \qquad N_1(y) = c_2$

مثال (1)

أوجد حل المعادلة التفاضلية الأتية :

$$xydx + y\ \sin y\ dy\ = 0$$

الحل :

بقسمة طرفي المعادلة على y نحصل على

$$xdx + \ \sin y\ dy\ = 0$$

وبتكامل الطرفين نحصل على

$$\int x\ dx + \int \sin y\ dy = 0$$

$$\therefore \frac{x^2}{2} - \ \cos y\ = c$$

و هو الحل العام للمعادلة التفاضلية.

[1] المعادلات التفاضلية "الجزء الأول" ، د/حسن مصطفى العويضي ، مكتبة الرشيد.

(2-4-2) الطريقة الثانية : المعادلة التفاضلية المتجانسة :

المعادلة التفاضلية المتجانسة من الرتبة الأولى [1] :

$$y' = \frac{dy}{dx} = f$$

تكون المعادلة متجانسة من الرتبة الأولى إذا تحقق عندما تكون

$$f(x\,,y) = \emptyset$$

أي أن المعادلة على الصورة

$$\frac{dy}{dx} = \emptyset\left[\frac{y}{x}\right]$$

وبوضع $\lambda = \frac{1}{x}$ في الدالة

$$f(\lambda x\,,\lambda \mathrm{y})$$

نحصل على

$$f(x\,,y) = f\,\Big|$$

هذه المعادلة غير مفصولة المتغيرات ولكن باستخدام التعويض.

$$v = \frac{y}{x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = v$$

[1] المعادلات التفاضلية " الجزء الثاني" ، د/حسن مصطفي العويضي ، مكتبة الرشيد ، 2006م ، الرياض ، المملكة العربية السعودية.

بالتعويض في المعادلة نحصل على :

$$v + xv' = f$$

و هذه المعادلة يمكن فصل متغيراتها كالآتي[1] :

$$\frac{dv}{f(i,v) - v} = \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \int \frac{dv}{f(i,v) - v} = \int \frac{dy}{dx}$$

ثم بإجراء التكامل نحصل على الحل العام وإذا كانت المعادلة التفاضلية على الصورة

$$M(x,y)dx$$

لكي تكون المعادلة متجانسة هو ان كل من N(y,x) ،M(y,x) دوال متجانسة من نفس الدرجة كل من y,x .

والنظرية الأتية تبين طريقة حل المعادلة المتجانسة من الرتبة الأولى .

النظرية :

إذا كانت المعادلة التفاضلية

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

متجانسة فإن التعويض $y = vx$ يجعل هذه المعادلة قابلة للحل بفصل المتغيرات .

[1] المعادلات التفاضلية " الجزء الثاني" ، د/حسن مصطفي العويضي ، مكتبة الرشيد ، 2006م ، الرياض ، المملكة العربية السعودية.

البرهان :

حيث أن المعادلة التفاضلية المتجانسة يمكن كتابتها على الصورة

$$\frac{dy}{dx} = \emptyset\left[\frac{y}{x}\right]$$

باستخدام التعويض   y = xv

$$\therefore \frac{dy}{dx} = v +$$

تأخذ المعادلة الصورة الأتية

$$V + \frac{xdv}{dx} = \emptyset(v)$$

أي ان

$$(\emptyset(v) - v)dx = xdv$$

و هي معادلة تفاضلية قابلة للحل بطريقة فصل المتغيرات وذلك بالضرب في عامل التكامل

$$\frac{1}{(\emptyset(v) - v)dx}$$

نحصل على معادلة مفصولة المتغيرات على الصورة

$$\int \frac{dv}{(\emptyset(v) - v)}$$

$$\int \frac{dv}{(\emptyset(v) - v)}$$

$$\int \frac{dv}{(\emptyset(v) - v)} = f(v)$$

فإن الحل يأخذ الصورة

$$f(v) + \ln x = c$$

و هذا يمثل عائلة المنحنيات

$$f\left(\frac{y}{x}\right) + \ln x = c$$

(3-4-2) الطريقة الثالثة : المعادلات التامة :

تعريف : المعادلة التفاضلية[1] :

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

تسمى معادلة تامة إذا وجدت دالة $f(x,y)$ بحيث أن

$$df(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

وفي هذه الحالة يكون الحل على الصورة

$$f(x.y) = c$$

مثال (1)

المعادلة التفاضلية :

$$xdy + ydx = 0$$

معادلة تامة لأن

$$xdy + ydx = d(x^2, y^2)$$

بعد التأكد من أن المعادلة تامة بتحقق الشرط الآتي :

$$\frac{am}{ay} = \frac{an}{ax}$$

[1] المعادلات التفاضلية وتطبيقاتها الهندسية ، د/محمد محمد عباسي ، منشأة المعارف ، 1980 م ، الأسكندرية ، مصر.

يمكن إيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية التامة بإحدى الطرق الأتية :

1) الطريقة الاولى :

وتتلخص في الخطوات الأتية[1] :

1- بأجراء تكامل M بالنسبة لـ X باعتبار ان Y ثابت التكامل للدالة

$$f(x,y) = \int M(x,y)dx + \emptyset(y)$$

2- بالتفضيل الجزئي بالنسبة الى Y

$$\frac{af}{ay} = \frac{a}{ay}\int M(x,y)dx + \emptyset'(y)$$

3- باستخدام المقارنة مع العلاقة

$$\frac{af}{ay} = N$$

ومنها نحصل على $\emptyset'(y)$ ثم بالتكامل نحصل على قيمة $\emptyset(y)$

4- بالتعويض عن $\emptyset(y)$ نحصل على الحل العام

$$f(x,y) = c$$

[1] المعادلات التفاضلية وتطبيقاتها الهندسية ، د/محمد محمد عباسي ، منشأة المعارف ، 1980 م ، الأسكندرية ، مصر.

مثال (1)

حل المعادلة التفاضلية :

$$\left(y^2 + e^{xy^2} + 4x^3\right)dx + \left(2xye^{xy^2} - 3y^2\right)dy = 0$$

الحل :

من المعادلة نجد ان

$$\frac{am}{ay} = \frac{a}{ay}\left(y^2 e^{xy^2} + 4x^3\right) = 2ye^{xy^2} + 2xy^3 e^{xy^2}$$

$$\frac{am}{ax} = \frac{a}{ax}\left(2xye^{xy^2} + 3y^2\right) = 2xy^3 e^{xy^2} + 2ye^{xy^2}$$

$$\frac{aM}{ay} = \frac{aN}{ay} \therefore$$

الشرط تحقق و المعادلة تامة[1]

يمكن الحصول على الحل بالطريقة الاولى :

$$f(x,y) = \int M(x,y)d = \int (y^2 e^{xy^2} + 4x^3)dx$$

$$= 3ye^{xy} + 2xy^3 e^{xy^2}$$

$$= e^{xy^2} + x^4 + \emptyset(y)$$

لإيجاد $\emptyset(y)$ نفاضل جزئيا بالنسبة الى Y نحصل على :

$$\frac{af(x,y)}{ay} = 2xye^{xy^2} + \emptyset'(y) = N$$

$$for \left[\frac{af}{ay} = N\right]$$

[1] مقدمة في المعادلات التفاضلية ، إبراهيم ديب سرميني وآخرون ، 1996 ، الرياض ، المملكة العربية السعودية.

وباستخدام العلاقة $\frac{af}{ay} = N$ نحصل على

$$2xye^{xy^2} + \emptyset'(y) = 2xye^{xy^2} - 3y^2$$

$$\emptyset'(y) = -3y^2$$

$$\emptyset'(y) = -3y^2 + c$$

وبالتالي فان :

$$f(x, y) = e^{xy^2} + x^4 - y^3 + c$$

ويكون على الصورة

$$e^{xy^2} + x^4 - y^3 + c = 0$$

2) الطريقة الثانية :

وتتلخص في الخطوات التالية [1]:

1- بأجراء التكامل N بالنسبة الى Y باعتبار ان x ثابت للدالة

$$f(x, y) = \int N(x, y)dy + \emptyset(x)$$

2- بالتفضيل الجزئي بالنسبة الى x

$$\frac{af}{ax} = \frac{a}{ax}\int N(x, y)dy + \emptyset'(x)$$

[6] المعادلات التفاضلية ، أحمد حمزة الشيحة ، الدار العربية للنشر والتوزيع ، دار الكتب الوطنية بنغازي ، 1996 م.

3- باستخدام المقارنة حيث ان

$$\frac{af}{ax} = M$$

ومنها نحصل على $\emptyset'(y)$ ثم بالتكامل نحصل على قيمة $\emptyset(y)$

4- بالتعويض عن $\emptyset(y)$ نحصل على الحل العام[1]

$$f(x, y) = c$$

مثال (1)

أوجد حل المعادلة التفاضلية

$$y \sin 2x\, dx - (y^2 - \cos 2x)dy = 0$$

الحل :

$$\frac{am}{ay} = \frac{a}{ay}(y \sin 2x) = \sin 2x$$

$$\frac{aN}{ax} = \frac{a}{ax}(y^2 \cos 2x) = \sin 2x$$

[1] المعادلات التفاضلية ، أحمد حمزة الشيحة ، الدار العربية للنشر والتوزيع ، دار الكتب الوطنية بنغازي ، 1996 م.

(4-4-2) الطريقة الرابعة : طريقة ليبنز _ ماكلورين[1] :

يمكن عادة حل المعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات المتغيرة بفرض حل على صورة متسلسلة لا نهائية في قوى x وأبسط هذه الطرق هي استعمال طريقة ليبنز _ ماكلورين.

مثال (1)

حل على صورة متسلسلة لانهائية المعادلة التفاضلية

-1 $$\frac{d^2y}{dx^2} - 5x\frac{dy}{dx} - 3y = 0$$

الحل :

نفاضل المعادلة أولاً n من المرات باستعمال نظرية ليبنز_ماكلورين ونحصل على :

-2 $$(1 - x^2)y_{n+2} - (2n + 5)xy_{n+1} - (n + 1)(n + 3)y_n$$

$$y_n \quad \frac{d^n y}{dx^n}$$

نفرض حلاً للمعادلة (1)على صورة متسلسلة مكلورين :

-3 $$y = y(0) + y_1(0) + \frac{x}{2!}y_2(0) + \cdots + \frac{x^n}{r!}y_r(0) + \cdots$$

حيث ان $y_r = (0)$ هي قيمة $\frac{d^r y}{dx^r}$ عند $x = 0$

بوضع $x = 0$ تؤول العلاقة التكرارية (2) الى

-4 $$y_{n+2}(0) = (n + 1)(n + 3)y_n(0)(n \geq 0)$$

$$\therefore y_2(0) = 1 . 3 .\ y(0)$$

$$y_3(0) = 2 . 4 .\ y_1(0)$$

$$y_4(0) = 3 . 5 .\ y_2(0) = 1 .\ 3^2 . 5 . y(0)$$

$$y_5(0) = 4 . 6 .\ y_3(0) = 2 .\ 4^2 . 6 . y_1(0)$$

$$y_6(0) = 5 . 7 .\ y_4(0) = 1 .\ 3^2 . 5^2 . 7 . y(0)$$

[1] المعادلات التفاضلية "الجزء الأول" ، د/حسن مصطفي العويضي ، مكتبة الرشيد.

وبذلك أمكننا التعبير عن جميع المعاملات التفاضلية عند $x = 0$ بدلالة $y(0)$, $y_1(0)$

وتؤول (3) الى :

$$y = y(0)\left[1 + \frac{1.3}{2!}x^2 + \frac{1.3^2.5}{4!}x^4 + \frac{1.\ 3^2.5^2.7}{6!}x^6 + \cdots\right]$$

$$+y_1(0)\left[x + \frac{1.\ 4}{3!}x^3 + \frac{2.4^2.6}{5!}x^5 + \frac{2.4^2.6^2.8}{6!}x^6 + \cdots\right] \qquad (6)$$

ويمكن اعتبار المعادلة (6) بأنها الحل العام للمعادلة (1) لأنها تحتوي على ثابتين إختياريين $y_1(0)$, $y(0)$ ويمكن تعيينها من الشروط الحدية للمسألة.

(5-4-2) الطريقة الخامسة : معادلة بيرنولي[1]:

تسمى المعادلة على الصورة

$$\frac{dy}{dx} + py = Qy^n$$

حيث كل من P , Q دالة في x فقط (أو كمية ثابتة) بمعادلة بيرنولي فإذا كانت $n = 1$ فإنه يمكن حل المعادلة بفصل المتغيرات أما إذا كانت $n \neq 1$ فإنه يمكن تحويل المعادلة إلى الصورة الخطية كما يأتي :

نقسم طرفي المعادلة على y^n

[1] المعادلات التفاضلية " الجزء الثاني" ، د/حسن مصطفي العويضي ، مكتبة الرشيد ، 2006م ، الرياض ، المملكة العربية السعودية.

$$\frac{1}{y^n}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{y^{n-1}}p=Q$$

(1)

$$put\ v=\frac{1}{y^{n-1}}$$

$$v=y^{n-1}$$

$$\frac{dy}{dx}=(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dv}{dx}=(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

$$\therefore\ \frac{1}{y^n}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1-n}\frac{dy}{dx}$$

بالتعويض في المعادلة (1) ينتج

$$\frac{1}{1-n}\frac{dy}{dx}+pv=Q$$

$$\frac{dy}{dx}+(1-n)pv=(1-n)Q$$

وهي معادلة خطية [1] في v

[1] المعادلات التفاضلية " الجزء الثاني" ، د/حسن مصطفي العويضي ، مكتبة الرشيد ، 2006م ، الرياض ، المملكة العربية السعودية.

مثال (1)

حل المسألة التفاضلية :

$$\frac{3}{2}y^{1/2}y' + y^{3/2} = 1$$

Y(0)=0

الحل :

نفرض ان $z' = \frac{3}{2}y^{1/2}y'$ ، $z = y^{3/2}$ وتصبح المعادلة التفاضلية على الشكل[1] :

$$z' + z = 1$$

لحل المعادلة المتجانسة $z' + z = 0$ نجد ان

$$c = \pm e^{a} \quad \Rrightarrow z = ce^{x} \qquad \Rrightarrow \ln|z| = -x + a$$

$$\frac{dz}{z} = -dx \quad \Longrightarrow z' = -z$$

وبملاحظة أن $z = 1$ ب حل خاص فإن الحل العام للمعادلة هو

$$y^{3/2} = 1 + ce^{-x}$$

وحسب الشروط الابتدائية فإن :

$$(4)^{3/2} = 1 + c \quad \Longrightarrow 8 = 1 + c \qquad \therefore c = 7$$

فالحل الخاص هو

$$y^{3/2} = 1 + 7e^{-x} \quad \Longrightarrow y = (1 + 7e^{-x})^{3/2}$$

---

[1] المعادلات التفاضلية " الجزء الثاني" ، د/حسن مصطفي العويضي ، مكتبة الرشيد ، 2006م ، الرياض ، المملكة العربية السعودية.

مثال (2)

أوجد الحل العام لمعادلة بيرنولي[1]

$$2y' - \frac{1}{x}y = -y^3 \cos x$$

الحل :

بالقسمة على y^3

$$2y^{-3}y' - \frac{1}{x}y^{-2} = -\cos x$$

باستخدام التعويض

$$z = y^{-2} \quad , \quad z' = -2y^{-3}y'$$

$$\therefore -z' - \frac{1}{x}z = -\cos x$$

$$x' + \frac{1}{x^2} = \cos x$$

وهي معادلة خطية في z فيها

$$p(x) = \frac{1}{x} \qquad , \qquad Q(x) = \cos x$$

عامل التكامل هو

$$u = e^{\int \frac{dx}{x}} = \ln x = x$$

اذا الحل العام هو

$$zx = \int x \cos x dx = x \sin x + \cos x + c$$

[1] الانظمة الخطية للمعادلات التفاضلية، حمزة بشير واخرون ، بحث تخرج ، جامعة السودان للتكنلوجيا .

الملاحق

النتائج والتوصيات والمراجع

النتائج و التوصيات:

النتائج :

من خلال البحث توصل الباحثون إلى بعض النتائج التي يمكن تلخيصها في الأتي :

1- .إمكانية توضيح المعادلات بتدرج يسهل إختيار (تحديد) نوع حل المعادلة التفاضلية حيث نبدأ بفصل المتغيرات وننتهي بالمعادلات الخطية.

2- تبرز أهمية المعادلات التفاضلية العادية من الرتبة الأولى في حل المسائل في العلوم في عدة مجالات وأبرزها في مجال الفيزياء حيث هنالك مسائل يسهل حلها بالمعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى

التوصيات :

1- التوسع في المعادلات التفاضلية من الرتب العليا ، بيان لأهمية المعادلات التفاضلية.

2- توضيح أن خل المعادلات التفاضلية يتدرج من الأسهل إلى الأصعب.

3- .بيان التطبيقات التي تدخل فيها المعادلات التفاضلية لتوضيح أهمية ومكان الرياضيات وخاصة المعادلات التفاضلية.

المصادر

[1] حسين سليمان ومريم حسين (2021) : بحث تخرج لقسم الرياضيات في كلية تربية المقداد،2021 .

[2] المعادلات التفاضلية العادية حلول وتطبيقات ، د/إسماعيل بوقفه ، د/عائش الهنادو.

[3] المعادلات التفاضلية "الجزء الأول" ، د/حسن مصطفي العويضي ، مكتبة الرشيد.

[4] المعادلات التفاضلية " الجزء الثاني" ، د/حسن مصطفي العويضي ، مكتبة الرشيد ، *2006*م ، الرياض ، المملكة العربية السعودية.

[5] https://ar.wikipedia.org/wiki/

[6] المعادلات التفاضلية ، أحمد حمزة الشيحة ، الدار العربية للنشر والتوزيع ، دار الكتب الوطنية بنغازي ، 1996 م.

[7] المعادلات التفاضلية العادية حلول وتطبيقات ، د/إسماعيل بوقفه ، د/عائش الهنادو، المعادلات التفاضلية – الكتاب الأول ، د/قيصر قبارز مينسكي ، المركز العربي للتعريب والترجمة والتأليف والنشر.

[8] المعادلات التفاضلية وتطبيقاتها الهندسية ، د/محمد محمد عباسي ، منشأة المعارف ، 1980 م ، الأسكندرية ، مصر.

[9] مقدمة في المعادلات التفاضلية ، إبراهيم ديب سرميني وآخرون ، 1996 ، الرياض ، المملكة العربية السعودية.

[10] الانظمة الخطية للمعادلات التفاضلية، حمزة بشير واخرون ، بحث تخرج ، جامعة السودان للتكنلوجيا .

[11] Mohammed Ahmed Safi 2004, "on the Fractional Differ integrated from solution of some Special Differential Equations, radiate Studies, the University of Jordan," 2004.