وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

جامعة ديالى

كلية التربية المقداد

قسم الرياضيات

الاستقراء الرياضي

بحث مقدم

الى مجلس كلية التربية المقداد /جامعة ديالى قسم الرياضيات وهو جزء من متطلبات نيل شهادة البكالوريوس

من قبل الطالبان

مريم بهجت حميد

مريم أحمد علي

اشراف

م. م هند ابراهيم محمد

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

﴿وَفَوْقَ كُلِّ ذِي عِلْمٍ عَلِيمٌ﴾

صدق الله العظيم

سورة يوسف (الآية:76)

الاهـــــــــداء

إلى من جرع الكأس فارغاً ليسقيني قطرة حب

إلى من كلت أنامله ليقدم لنا لحظة سعادة إلى من حصد الأشواك

عن دربي ليمهد لي طريق العلم

إلى القلب الكبير (والدي العزيز)

إلى من أرضعتني الحب والحنان

إلى رمز الحب وبلسم الشفاء

إلى القلب الناصع بالبياض (والدتي الحبيبة)

إلى القلوب الطاهرة الرقيقة والنفوس البريئة

إلى رياحين حياتي (إخوتي)

الآن تفتح الأشرعة وترفع المرساة لتنطلق السفينة في

عرض بحر واسع مظلم هو بحر الحياة

وفي هذه الظلمة لا يضيء إلا قنديل الذكريات ذكريات الأخوة

البعيدة إلى الذين أحببتهم وأحبوني (أصدقائي)

شكر وتقدير

* نشكر الله عز وجل خالقنا ركيزتنا القوية وحكمتنا ومعرفتنا وفهمنا وإبداعنا الذي بتوفيق منه و بفضل منه تمكنا من إنجاز هذه البحث

* نود أن نعرب عن امتناننا العميق لمشرفتنا " م. م هند ابراهيم محمد" لمساعدتنا في استكمال أعمالنا الأولى البحث في مسيرتنا العلمية ، ولم نكن لنكمل هذا البحث دون بذل جهودها ومتابعتها المستمرة.

* كما نشكر كثيرا جميع الأساتذة و الزملاء الذين قدموا لنا المساعدة مما كانت طبيعتها ، وإلى كل من قدم لنا تشجيعا مهما بلغت درجته .

* كما نتوجه بخالص الشكر إلى كافة أساتذتنا الكرام بقسم الرياضيات جامعة ديالى كلية التربية المقداد على ما قدموه لنا طيلة فترة الدراسة.

*كما نوجه شكرنا وتقديرنا لعوائلنا الذين دعمونا بكل ما فعلناه.

المستخلص

ان الاستقراء الرياضي هو أحد أنواع البرهان الرياضي تستخدم عادة لبرهنة أنّ اي معادلة أو متباينة ما سليمة لمجموعة لانهائية من الأعداد، كالأعداد السليمة. يعتمد البرهان على مبدأ وقوع أحجار الدومينو، ويتم على مرحلتين: في الأولى، يبرهن أنّ أوّل رقم في المجموعة يحقّق المطلوب، وفي الثانية نفرض أنّ المطلوب يتحقّق لعدد ما من المجموعة، ونبرهن، جبريًا، مثلاً، أنّه يتحقّق أيضًا للعدد الذي يليه في المجموعة استنادًا على الفرض وعلى الأساس، و وفي هذا البحث سنبين مفهوم الاستقراء الرياضي ، مزاياه وعيوبه وانواعه وتفسيره بشكل مفصل معزز بالامثلة المحلولة الواضحة.

المحتويات

الفصل الاول: الاطار العام

1-1 المقدمة

الاستقراء الرياضي هو أحد أنواع البرهان الرياضي تستخدم عادة لبرهنة أنّ معادلة أو متباينة ما صحيحة لمجموعة لانهائية من الأعداد، كالأعداد الصحيحة. يعتمد البرهان على مبدأ وقوع أحجار الدومينو، ويتم على مرحلتين: في الأولى، يبرهن أنّ أوّل رقم في المجموعة يحقّق المطلوب، وفي الثانية نفرض أنّ المطلوب يتحقّق لعدد ما من المجموعة، ونبرهن، جبريًا، مثلاً، أنّه يتحقّق أيضًا للعدد الذي يليه في المجموعة استنادًا على الفرض وعلى الأساس.

يذكر، لمنع حصول التلابسات، أنّ الاستقراء الرياضي يختلف عن الاستنتاج الاستقرائي – فالأخير لا يعتبر برهانًا كافيًا ودقيقًا في عالم الرياضيات. الأصح هو القول أنّ الاستقراء الرياضي هو ضرب من الاستنتاج الاستدلالي (deductive reasoning).

2-1 تاريخ الاستقراء الرياضي

ربما كانت محاورة أفلاطون سنة 370 قبل الميلاد قد حوت أول إثبات بالاستقراء الرياضي على الإطلاق. يمكن ملاحظة اثارالاستقراء الرياضي المبكرة في إثبات إقليدس بأن عدد الأعداد الأولية لانهائي. كما أن أول إثبات ضمني بالاستقراء الرياضي للمتوالية الحسابية كان على يد العربي البغدادي الكرخي حوالي سنة 1000 ميلادية، والذي استخدمها لإثبات نظرية ذات الحدين، مثلث باسكال، وصيغة المجموع لتكامل المكعبات. (1)

كان إثباته هو الأول الذي استخدم المبدأين الأساسيين في الإثبات الاستقرائي, "وهما صواب التعبير من أجل $n = 1$ (لاحظ أن $1^3=1$) واشتقاق الصواب من أجل $n = k$ من تلك لقيمة $n = k - 1$. بالطبع الجزء الثاني غير نقدي لأنه بشكل أو باخر حجة الكراجي معكوسة; من هنا يبدأ الكراكي لـ$n = 10$ ومن ثم النزول حتى 1 بدلا من الاستمرار". (2) ومن بعده مباشرة جاء الحسن ابن الهيثم لإثبات مجموع قوى الدرجة الرابعة بطريقة الاستقراء. لقد قام بإثبات ذلك على أعداد صحيحة معينه فقط ولكن إثباته لهذه الأعداد كان بالاستقراء وشاملا. كما أن السموأل بن يحيى بن عباس كان أقرب إلى الإثبات الحديث بالاستقراء الرياضي عندما استخدمه في توسيع إثبات مثلث باسكال وذات الحدين. (3)

1-3 مشكلة البحث

يتم استخدام مبدأ الاستقراء الرياضي لإثبات أن اقتراحًا معينًا (الصيغة ، المساواة ، عدم المساواة ...) لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة الأكبر من أو تساوي بعض الأعداد الصحيحة N. دعونا نشير إلى الاقتراح المعني بواسطة P (n) ، حيث n عدد صحيح موجب.

1-4 اهداف البحث

الاستقراء الرياضي هو طريقة إثبات رياضية تُستخدم عادةً لإثبات أن جملة معينة صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الطبيعية (الأعداد الصحيحة غير السالبة).

1-5 اهمية البحث

لا يمكن التقليل من أهمية الاستقراء الرياضي. تستخدم جميع مجالات البحث في الرياضيات تقريبًا الاستقراء. إنها حقًا أداة لا غنى عنها لعلماء الرياضيات. باستخدام الاستقراء ، يمكننا أن نستنتج بشكل غير محدود صحة العديد من العبارات.

1-6 منهج البحث

هو عبارةٌ عن عمليةٍ دقيقةٍ تهدفُ إلى جمع البيانات، وملاحظة الظواهر المرتبطة بها من أجل الربط بينها بمجموعةٍ من العلاقات الكلية العامة، وأيضاً يُعرفُ المنهج الاستقرائي بأنّه الأسلوب البحثيّ الذي يستخدمهُ الباحث في تعميم دراسته الخاصة على الدراسة العامة المرتبطة بالموضوع الذي يبحثُ فيه، أي يربطُ بين الدّراسةِ التي عمل على تنفيذها بصفتها جُزءاً من كُل،. يعتمدُ المنهج الاستقرائي على استخدامِ مجموعةٍ من الاستنتاجات القائمة على الملاحظات، والتقديرات.

7-1 مصطلحات البحث

- **يعرف الاستقراء الرياضي:**

هو طريقة إثبات رياضية تُستخدم عادةً لإثبات أن جملة معينة صحيحة لجميع الأعداد الطبيعية (الأعداد الصحيحة غير السالبة)، يتم ذلك عن طريق إثبات أن العبارة الأولى في التسلسل اللانهائي من العبارات صحيحة، ثم إثبات أنه إذا كانت أي جملة واحدة في التسلسل اللانهائي من العبارات صحيحة، فإن الجملة التالية تكون كذلك . (4)

- **يعرف الاستقراء الرياضي بالإنجليزية (Mathematical induction:** بأنه أسلوب رياضي يتم استخدامه لإثبات النتائج التي يتم الحصول عليها من خلال إثبات الفرضيات الرياضية التي تكون إما نظرية أو صيغة معينة للأعداد الطبيعية أي$n = 0, 1, 2, , 3$, ... ؛ حيث يقوم على خطوتين أساسيتين وهما:

1. إثبات أن العبارة صحيحة للقيمة الأولية التي يتم استخدامها والتي عادة ما تكون.$n = 1$

2.إثبات أن العبارة التي كانت صحيحة عند استخدام القيمة الأولية ستبقى صحيحة عند القيام بتعويض رقم طبيعي آخر أي $n = k+1$ ؛ حيث أن قيمة k هي القيمة التي تم إثباتها بالخطوة الأولى(5).

- **مفهوم الاستقراء الرياضي:** إحدى الطرق المختلفة لإثبات الافتراضات الرياضية، بناءً على مبدأ الاستقراء الرياضي.
- **مبدا الاستقراء الرياضي** هو: إذا كان العدد الصحيح 0 ينتمي إلى الفئة F وكان F وراثيًا، فكل عدد صحيح غير سالب ينتمي إلى F، بدلاً من ذلك، إذا كان العدد الصحيح 1 ينتمي إلى الفئة F و F هو وراثي، فإن كل عدد صحيح موجب ينتمي إلى F، يتم ذكر المبدأ في بعض الأحيان

في شكل واحد، وأحيانًا في الآخر، نظرًا لأنه من السهل إثبات أي شكل من أشكال المبدأ كنتيجة للآخر، فليس من الضروري التمييز بين الاثنين. (6)

8-1 الدراسات السابقة

اولا:وفي دراسة قام (Barkai and Others, 2002) بدراسة طبيعة البرهان الرياضي المستخدم من قبل ٢٧ معلمة لمادة الرياضيات في المرحلة الابتدائية | التفسير مجموعة من الفرضيات الرياضة النظرية الأعداد (مثال: مجموع أي خمسة أعداد صحيحة متتابعة يقبل القسمة على خمسة)، حيث طلب منهم (أن يقرروا ما إذا كانت الفرضية صحيحة أو لا، و٢) تقديم تبرير لصحة أو عدم صحة الفرضية، و3) التحديد من وجهة نظرهم الخاصة ما إذا كان تبريهم المقدم يعد برهانا رياضيا. وقد أظهرت النتائج أن نصف المعلمين قدموا حلوة جبرية منظمة تحمل طابع الرسمية وتناسب تدريس مراحل أعلى من المرحلة الابتدائية وعدد آخر قليل قدم حلولا غير رسمية تناسب التدريس في المرحلة الابتدائية. رغم ذلك، الأغلبية استخدموا إجراءات غير كافية لإثبات صحة الفرضيات أو عدم صحتها وكذلك كان لديهم عدم يقين ما إذا كانت الإجراءات التي استخدموها تمثل برهانة رياضيا.

ثانيا:. وقد قام (الجوعاني ومحمد، ٢٠١٣) بتطبيق اختبار لقياس مهارات البرهان الرياضي تكون من 14 فقرة على عينة مكونة من ٢١٧ طالبة و160 طالبت بمجموع ٣٧٧ من طلبة الصف الثالث المتوسط بهدف: (١) تعرف مهارات البرهان الرياضي التي يمتلكها طلبة الصف الثالث المتوسط، و (٢) ما إذا كان هناك فروق ذات دلالة إحصائية في اختبار مهارات البرهان الرياضي بحسب متغير النوع. ومع أن النتائج أظهرت وجود فروق ذو دلالة إحصائية عند مستوى دلالة (0.05) بين أداء الطلاب والطالبات في اختبار مهارات البرهان الرياضي لصالح الطالبات إلا أن الدراسة أكدت على وجود ضعف في مهارات البرهان الرياضي عند كل من الطلاب والطالبات، وقد عزت الضعف إلى عدة أسباب من أهمها

عدم تمكن بعض المعلمين من مهارات البرهان الرياضي وهذا ما انعكس على عدم قدرتهم على نقلها وتدريسها لطلبتهم بالشكل الصحيح، وكذلك استخدام هؤلاء المعلمين الأساليب تدريس تقليدية يكون فيها الطالب متلقية للمعلومة دون المشاركة في إنتاجها، وابتعادهم عن استخدام أساليب تنمي التفكير المنطقي أو تطبيق الأسلوب الاستدلالي أو الاستنتاجي للوصول إلى المطلوب واقناع الآخر بصحته.

ثالثا:ودراسة (أبو عقيل، ٢٠١٠) هي معرفة طبيعة معوقات تدريس البراهين الرياضية في المرحلة الأساسية العليا والتي تخص كلا من الطالب والمنهج المدرسي والمعلم وذلك من وجهة نظر 64 (معلمين ومعلمة لمادة الرياضيات، وقد أظهرت النتائج أنأهم معوقات تدريس البراهين الرياضية لدى الطلاب تمثلت في: عدم قدرة الطلبة على البدء بالبرهان، وعدم قدرة الطالب على تبرير كل خطوات البرهان، وصعوبة في استخدام اللغة الرياضية، صعوبة في كتابة البرهان الرياضي، وعدم امتلاك المعرفة الكافية للمفاهيم والنظريات الرياضية المساندة للإثبات، وعدم وجود اهتمامات كبيرة نحو البراهين. أما بخصوص المنهج المدرسي فتمثلت أهم المعوقات في الكثير من البراهين لا تعني شيء للطالب، والبراهين المكتوبة لا تثير اهتمام الطلبة ولا تحفز فيهم التحدي الفكري واستكشاف الجديد. وأما بخصوص المعلم فتمثلت أهم المعوقات في: عدم وجود المعرفة الكاملة لدى المعلم بطرق البرهان الرياضي وأنواعه، وعدم استخدام وسائل محببة وفعالة في غرس مفاهيم البرهان الرياضي مثل استراتيجية التدريس الحلزوني، وعدم تقديم أفكار كاملة عن البرهان الرياضي قبل شرحه، وعدم كتابة البرهان الرياضي بلغة واضحة، وعدم إشارة المعلم لبداية البرهان ونهايته. وقد أوصى الباحث بخصوص المعلم أن يتم عقد دورات تدريبية للمعلمين لتزويدهم بكافة أنواع البرهان الرياضي وأساليبه وطرق تدريسه.

1.2 الاستقراء الرياضي:

الاستقراء الرياضي هو أحد أنواع البرهان الرياضي تستخدم عادة لبرهنة أنّ معادلة أو متباينة ما صحـــيحة لمجموعة لانهائية من الأعداد، كالأعداد الصحـــيحة. يعتمد البرهان على مبدأ وقوع أحجار الدومينو، ويتم على مرحلتين: في الأولى، يبرهن أنّ أوّل رقم في المجموعة يحقَّق المطلوب، وفي الثانية نفرض أنّ المطلوب يتحقّق لعدد ما من المجموعة، ونبرهن، جبريًا، مثلاً، أنّه يتحقِّق أيضًا للعدد الذي يليه في المجموعة استنادًا على الفرض وعلى الأساس.

يذكر ، لمنع حصول التلابسات، أنَ الاستقراء الرياضي يختلف عن الاستنتاج الاستقرائي فالأخير لا يعتبر برهانًا كافيًا ودقيقاً في عالم الرياضـــيات. الأصـــح هو القول أن الاستقراء الرياضي هو ضرب من الاستنتاج الاستدلالي (Deductive reasoning). (7)

2.2 مزايا الاستقراء الرياضي:

1- انها تساعد على بقاء المعلومات في الذاكرة مدة اطول من المعلومات التي تكسب بالقراءة او الأصغاء لان الطالب يتوصل اليها بنفسه.

2- انها تقوم على تنظيم المعلومات الجديدة وترتيب الحقائق ترتيباً منطقياً وربطها بالمعلومات القيمة فيبنى على ذلك وضوح معناها وسهولة تذكرها وحفظها.

3- انها تجعل التعليم محبب للطلبة.

4- انها اكثر الطرائق شيوعاً في التدريس لكونها محددة وواضحة لدى المدرسين وان السير في مراحلها يناسب الطلبة ويعودهم على الدقة والملاحظة.

2.3 عيوب الاستقراء الرياضي:

1- لم يوضح هربارت حقيقة العقل ولا كيفية وجود الافكار به.

2- طريقة هربارت لا تتفق هي وطريقة العقل في ادراك الحقائق .

3- من الناحية التربوية نجد ان هذه الطريقة تؤكد التربية الادراكية في دروس كسب المعرفة وتهمل التربية الوجدانية في دروس كسب المهارة .

4- لا تمثل تفكير المتعلم الذي ينبغي ان يكون محور العملية التربوية .

2.4 أنواع الاستقراء الرياضي :

1.4.2 الاستقراء الكامل:

$4 < n < 20$ فليكن مطلوباً إثبات أن كل شيء طبيعي رقم زوجين خلال

14=7+7; 16=11+5; 18=13+5; 4=2+2; 6=3+3; 8=5+3; 10=7+3; 12=7+5; 20=13+7

توضح هذه المعادلات التسع أن كل رقم من الأرقام التي تهمنا يتم تمثيله بالفعل على أنه مجموع حدين أوليين.

وبالتالي ، فإن الاستقراء الكامل هو أن البيان العام يتم إثباته بشكل منفصل في كل من عدد محدود من الحالات المحتملة.

له تطبيقات محدودة في الرياضيات. تغطي العديد من العبارات الرياضية المثيرة للاهتمام عددًا لا حصر له من الحالات الخاصة.

2.4.2 الاستقراء الغير كامل:

في بعض الأحيان يمكن التنبؤ بالنتيجة الإجمالية بعد النظر في ليس كل شيء ، ولكن يكفي عدد كبيرحالات خاصة (ما يسمى الحث غير الكامل).

ومع ذلك ، تظل النتيجة التي تم الحصول عليها عن طريق الاستقراء غير الكامل مجرد فرضية حتى يتم إثباتها من خلال التفكير الرياضي الدقيق ، الذي يغطي جميع الحالات الخاصة. بعبارة أخرى ، لا يعتبر الاستقراء غير المكتمل في الرياضيات طريقة شرعية لإثبات صارم ، ولكنه طريقة قوية لاكتشاف الحقائق الجديدة.

دعنا ، على سبيل المثال ، مطلوب إيجاد مجموع أول ن أرقام فردية متتالية. ضع في اعتبارك حالات خاصة

1+3+5+7+9=25=5 2

بعد النظر في هذه الحالات الخاصة القليلة ، فإن الاستنتاج العام التالي يقترح نفسه:

$1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) = n^2$

أولئك. مجموع أول n من الأعداد الفردية المتتالية هو n^2

بالطبع ، لا يمكن أن تكون الملاحظة التي تم إجراؤها بمثابة دليل على صحة الصيغة المذكورة أعلاه.

لا يمكننا اختبار عدد لا حصر له من الحالات. غالبًا ما يؤدي الاستقراء غير الكامل إلى نتائج خاطئة.

في كثير من الحالات ، يكون المخرج من هذا النوع من الصعوبة هو اللجوء إلى طريقة تفكير خاصة تسمى طريقة الاستقراء الرياضي. وهي كالاتي.

فليكن من الضروري إثبات صحة عبارة معينة لأي عدد طبيعي n على سبيل المثال ، من الضروري إثبات أن مجموع أول n من الأعداد الفردية يساوي n^2 من المستحيل التحقق المباشر من هذه العبارة لكل قيمة n ، لأن مجموعة الأعداد الطبيعية لانهائية. لإثبات هذه العبارة ، تحقق أولاً من صلاحيتها لـ n = 1 ثم ثبت أنه بالنسبة لأي قيمة طبيعية لـ k ، فإن صحة العبارة قيد النظر لـ n = k تعني صلاحيتها لـ n = k + 1 أيضًا. (8)

3.4.2 النزول اللانهائي:

شكل آخر من أشكال الاستقراء وهو النزول اللانهائي، إحدى وسائل بيير دي فيرما المفضلة. هذا النوع من الاثبات يعمل بشكل عكسي، ويمكن أن يفترض نماذج مختلفة قليلاً. على سبيل المثال، قد يبدأ ببيان أنه إذا كان التعبير صحيحا لعدد طبيعي n لزم أن يكون صحيحا أيضا لأعداد طبيعية أصغر m حيث (n > m) . باستعمال الاستقراء الرياضي (ضمنيا) مع الفرضيات الأستقرائية بخطأ التعبير لجميع الأعداد الطبيعية أقل أو تساوي m , يمكن الأستنتاج بأن التعبير لايمكن أن يكون صحيحا لأي عدد طبيعيn .

4.4.2 استقراء تام:

توجد طريقة أخرى للتعميم، تدعى الأستقراء التام أوالأستقراء الشديد أو استقراء مجموعة جرعات, تنص على أنه في الخطوة الثانية يمكننا افتراض ليس بقاء صحة الشرط لقيم m = n فحسب بل أيضا لقيم n أقل أو تساويm ليس ضروريا ذكر حالة الأساس في الاستقرار التام كافتراض منفصل. عندما نأخذ بعين االعتبار الحالة الاولى، فأن اعتبار صحة الشرط لجميع الحالات السابقة أمر صحيح لا داعي لذكره.

فخطوة الاستقراء للاستقراء التام في هذه الحالة مقابلة لحالة الاساس في الاستقراء العادي. وعلى ذلك ينبغي للاثبات بخطوة الاستقراء في الاستقراء التام أن تكون قادرة على العمل مع شرط خالي شبيه لما سبق.الاثبات الاول في السابق ليس من هذا النوع (لكن يمكن تحويله).

إن الاستقراء التام مفيد جدا عندما يتطلب الامر مراحل عديدة من فرضيات الاستقراء لكل خطوة على حدة. مثال يمكن استخدام الاستقراء التام لتوضيح أن:

$$F(n)=\frac{(\varphi_+)^n-(\varphi_-)^n}{(\varphi_+)-(\varphi_-)}$$

حيث F(n) هو عدد فيبوناكسي النوني و $\varphi_+=(1+\sqrt{5})/2$ النسبة الذهبية و $\varphi_-=(1-\sqrt{5})/2$ جذور $x^2-x-1=0$ باستعمال التعريف $\mathbf{F}(n+1)=\mathbf{F}(n)+\mathbf{F}(n-1)$ يمكن التحقق من المتطابقة السابقة مباشرة بالتفاضل والتكامل($F(n+1)$ إذا افترضنا صحتها لكل من $\mathbf{F}(n-1),\mathbf{F}(n)$ لاستكمال الاثبات، يجب تحقيق المتطابقة باستخدام كلا حالتي الأساس $n=1,n=0$ (9)

الأساس: لنوضح أن التعبير صحيح من أجل $n=1,n=0$

$$F(0)=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0}{\sqrt{5}}=\frac{1-1}{\sqrt{5}}=0$$

$$F(1)=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1}{\sqrt{5}}=\frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}}=\frac{\frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}}=\frac{\frac{\sqrt{5}+\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}}=\frac{\frac{2\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=1$$

خطوة الأستقراء : تبين انه اذا كان $F(n-1),F(n)$ صحيحة فان $F(n+1)$ صحيحة أيضا. يتم ذلك على النحو الاتي :

$$F(k+1)=F(k)+F(k-1)$$

$$=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k}{\sqrt{5}}+\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}}{\sqrt{5}}$$

$$=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}}{\sqrt{5}}$$

$$=\frac{\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k+1\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}-\left(\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)+1\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\left(\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} - \left(\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} - \left(\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}}{\sqrt{5}}$$

يوجد اثبات آخر بالاستقراء الرياضي يستخدم الفرضيتين بصحة التعبير لكل قيم n الصغرى تماما. لنعتبر التعبير بأن "كل عدد طبيعي أكبر من 1 هو حاصل ضرب أعداد أولية", وبافتراض أنه بدلالة m>1 يكون صحيحا لجميع قيم الصغرى n < 1 اذا كان m عدد أولي فمؤكد أنه حاصل ضرب أعداد أولية وإذا لم يكن كذلك، فإنه من التعبير حاصل ضرب : $m = n_1 n_2$

حيث أن أي من المعامالت ال يساوي 1 ,وعليه ولا يساوي, m وبالتالي كليهما أقل من m الآن يتم تطبيق فرضية الاستقراء n_2, n_1, وبالتالي فكل منهما حاصل ضرب أعداد أولية. ومن ثم m حاصل ضرب مضاريب أعداد أولية، أي ضرب أعداد أولية. الحظ أن حالة الاساس m=2 لم يتم اعتبارها بشكل صريح مطلقا.

5.4.2 الاستقراء المحدود:

يمكن إعادة صياغة الخطوتين الاخيرتين في خطوة واحدة:

.بتوضيح أنه إذا كان التعبير صحيحا لجميع قيم n<m فإن نفس التعبير صحيح أيضا من أجل n=m .

في الحقيقة هذا هو الشكل العام الغالب في الاستقراء الرياضي ويمكن أثبات أنه ليس صالحا لتعابير الاعداد الطبيعية فحسب بل لعناصر أي مجموعة مؤسسة جيداً، وبتعبير آخر زمرة غير انعكاسية < تلك التي لا تحوي سلاسل تنازلية لا نهائية.

عند تطبيق هذا النوع من الاستقراء على الترتيبات (التي تشكل ترتيب حسن وعليه صنف مؤسس جيداً), تدعى استقراء محدود ويعد اثباتا له

أهميته في نظرية المجموعات والطوبولوجيا والمجالات الاخرى. وبشكل عام يميز الاستقراء المحدود ثلاث حالات:

1. عندما يكون m عنصرا صغريا أي أنه لايوجد عنصر أصغر من m
2. عندما تمتلك m سلفا مباشرا، أي مجموعة من العناصر أقل من m لها عنصر أعظمي .
3. عندما لا يكون لـ mسلفا مباشرا، أي أن m تدعى نهاية ترتيبية.

وبمعنى أدق، من اللازم في الاستقراء المحدود أن يتم إثبات الاساس، لانه لاجدوى من حالة خاصة للاقتراح إذا كان P صحيحا لكل قيم $n<m$ فان P صحيحاً في m .

5.2 تفسير الاستقراء الرياضي:

يتم تشبيه عملية الاستقراء الرياضي بقطع الدومينو؛ إذ إنّ سقوط القطعة الأولى في الدومينو يتسبب بسقوط القطع التي تكون خلفها والتي بدورها تسقط قطع الدومينو الأخرى المتواجدة في الخلف وبالنهاية كل قطع الدومينو سيتم هدمها؛ حيث لا يحدث هذا التأثير إلا بسقوط القطعة الأولى والذي يشبه بذلك مبدأ عمل الاستقراء الرياضي. (10)

6.2 أمثلة الاستقراء الرياضي:

هذه بعض الأمثلة المحلولة على الاستقراء الرياضي:

مثال (1):

أثبت أن 1 + 3 + 5 +.....+ (2n-1) = 2 ^ (n) عندما تكون ..... ,n= 1,2,3   (11)

خطوات الحل:

- أثبت أن الجملة صحيحة عندما تكون n = 1
- عوض فيها (2n-1) = 2 ^ (n)
- 2×1-1 = (1) ^ 2
- 1 = 1 ؛ هذه الجملة صحيحة
- افرض أن الجملة صحيحة عندما تكون n = k
- 1 + 3 + 5 +.....+(2k-1) =2 ^ k
- أثبت أن الجملة صحيحة عندما تكون n = k+1 بعد تعويضها
- 1 + 3 + 5 +.....+2) (2k-1)+ (1 – (1+ k) ×2)=2 ^ (1+ k)

- نعوض مكانها لتسهيل الحل حيث تصبح:
- $k^2 + (2 \times (k+1) - 1) = (k+1)^2$
- $k^2 + 2K + 2 - 1 = k^2 + 2k + 1$
- $k^2 + 2K + 1 = k^2 + 2k + 1$
- بما أن حدّي الجملة متساويان؛ تكون بذلك الجملة صحيحة.

<u>مثال (2) :</u>

أثبت ان $(a)^n \times (b)^n = (ab)^n$ لكل الاعداد الطبيعية. (12)

<u>خطوات الحل:</u>

- أثبت أن الجملة صحيحة عندما تكون $n= 1$
- $(a)^1 \times (b)^1 = (ab)^1$
- $ab = ab$؛ هذه الجملة صحيحة
- افترض أن الجملة صحيحة عندما تكون $n = k$
- $(a)^k \times (b)^k = (ab)^k$
- أثبت أن الجملة صحيحة عندما تكون $n = k+1$ بعد تعويضها
- بما أنه تم إثبات بالخطوة الأولى أن $(a)^k \times (b)^k = (ab)^k$ يمكن استخدامها في الحل حيث أن:
- $(a) ^ (k) \times (b) ^ (k) = (ab) \times (k)^(ab) = (ab) \times (k)^(ab)$ ؛ عن طريق ضرب الحدين ب(ab)
- ومنه ينتج بعد التوزيع $(a) ^ (k+1) \times (b) ^ (k+1) = (ab) ^ (k+1)$; أي أن الجملة صحيحة بتساوي الحدّين.

الفصل الثالث: عرض النتائج وتفسيرها

رغم الصعوبات التي واجهتنا وذلك من خلال عدم وجود المصادر الكافية على موضوع الاستقراء الرياضي على شبكه الانترنت والمكاتب العامه ونوصي الباحثين العراقيين والعرب بضروره دراسة موضوع الاستقراء الرياضي بشكل اعمق وادق لتكوين دراسات عربية ملمة بهذا الموضوع.

ومن خلال البيانات التي تم جمعها قمنا باستخلاص النتائج التالية:

1. أرى انه يجب استخدام الأمثلة لتبسيط الاستقراء الرياضي وتوضيحه لطلبة قسم الرياضيات وخاصة تلك التي توضح النظريات الرياضية وبالتالي فلابد من استخدام الأمثلة لتوضيح الاستقراء الرياضي ومما يدعم هذا التفسير.
2. يجب التركيز على الاستقراء الرياضي اكثر من الأمثلة في المحاضرة وهذا يدل على ان الطلبة يفضلون استخدام الأمثلة في المحاضرة التي تفسر النظريات الرياضية لان النضري تبقى صماء ان لم توضح بالأمثلة.
3. تفحص الطريقة الرياضية عددًا لا نهائيًا من الحالات لإثبات جملة عامة ، ولكنها تفعل ذلك من خلال سلسلة محدودة من التفكير الاستنتاجي تتضمن المتغير n، والذي يمكن أن يأخذ عددًا غير محدود من القيم .
4. هو نهج تعليمي قائم على النظرية ، والذي يحول مسألة الاستقراء الرياضي من التطور المعرفي إلى حل المشكلات العام.

الفصل الرابع: الاستنتاجات والمقترحات

1-4 الاستنتاجات

- ✓ نستنتج ان هناك اهتمام بموضوع الاستقراء الرياضي في تعلم الرياضيات وتعليمها ومحاولة تعزيز الاتجاهات باستخدام أساليب تربوية حديثه في البرهنة الرياضية من قبل الباحثين الاجانب لكثرة المصادر والكتب .
- ✓ هناك صعوبة في فهم مفهوم الاستقراء الرياضي من قبل الاشخاص من غير ذوي الاختصاص بصورة عامة ومن ذوي الاختصاص بصورة عامة لذا لجأ الباحثون الى العمل على تطوير المناهج بصورة عامة وتضمينها تدريبات متنوعة في الاستدلال المنطقي وحل المشكلات.
- ✓ هناك اهتمام كبير في الاونة الاخيرة بمواضع الاستقراء وكل ما ينعلق بمهارات التفكير وحل المشكلات والاستدلال.
- ✓ توضح معنى الاستقراء الرياضي ووظائفه للطلاب او بيان فوائده في تنمية شخصية الطالب الفكرية وفي تعزيز قدرة الطالب معلم المستقبل على مواجهة التحديات المهنية.

2-4 المقترحات

- ✓ اجراء بحوث ودراسات من شأنها رفع مستوى الطالب الجامعي بمهارات التفكير وحل المشكلات ورصد المعوقات المختلفة امام تطبيق الخطب والإجراءات المنهجية للتدريب عليها.
- ✓ نوصي الباحثين بضروره دراسة موضوع الاستقراء الرياضي بشكل اعمق وادق من قبل الباحثين العراقيين والعرب لتكوين دراسات عربية ملمة بهذا الموضوع لعدم وجود مصادر كافية على شبكه الانترنت والمكاتب العامة.

- ✓ الاهتمام باتجاهات الطلبة نحو الاستقراء الرياضي في تعلم الرياضيات وتعليمها ومحاولة تعزيز الاتجاهات باستخدام أساليب تربوية حديثه في البرهنة الرياضية .
- ✓ القيام بدراسات مماثله تتناول الصعوبات التي يواجها الطلبة في البرهنة الرياضية وبحث علاقتها بمتغيرات اخرى .

المصادر

1. أبوعقيل، إبراهيم (٢٠١٠). معوقات تدريس البراهين الرياضية في المرحلة الأساسية العليا من وجهة نظر معلمي الرياضيات. المجلة التربوية، جامعة الكويت، ٢٩، ٢٠٩-٢١.
2. الجوعاني، مجبل ومحمد، فاضل (٢٠١٣). مهارات البرهان الرياضي لدى طلبة الصف. مجلة القادسية في الآداب والعلوم التربوية، جامعة القادسية.
3. Mathematical Induction: The Basis Step of Verification and Validation in a Modeling and Simulation Course Archived October 19, 2013 at the Wayback Machine.
4. Katz (1998), p. 255
5. O'Connor, John J.; Robertson, Edmund F., "Abu Bekr ibn Muhammad ibn al-Husayn Al-Karaji", Mactotor History of Mathematics Archive "Al-Karaji also uses a form of mathematical induction in his arguments, although he certainly does not give a rigorous exposition of the princip.
6. Cajori (1918), p. 197
7. "Strong Induction | Brilliant Math & Science Wiki", brilliant.org (in English), Archived from the original on November 11, 2020, accessed on December 02, 2020.
8. https://ar.wikipedia.org/wiki/%D8%A7%D8%B3%D8%AA%D9%82%D8%B1%D8%A7%D8%A1_%D8%B1%D9%8A%D8%A7%D8%B6%D9%8A.
9. https://goaravetisyan.ru/ar/metod-matematicheskoi-indukcii-math-us-metod-matematicheskoi/.
10. https://brilliant.org/wiki/strong-induction/. "Strong induction. [ed.] Patrick Bourg, George Wang, and 3 others contributed Mursalin Habib. 1996, pp. 490-498.
11. https://mawdoo3.com/%D8%AA%D8%B9%D8%B1%D9%8A%D9%81_%D8%A7%D9%84%D8%A7%D8%B3%D8%AA%D9%82%D8%B1%D8%A7%

D8%A1_%D8%A7%D9%84%D8%B1%D9%8A%D8%A7%D8%B6%D9%8A.

12. "Mathematical Induction". , math's is fun, Retrieved. 6/2/2022. Edited.
13. "Mathematical Induction". tutorialspoint, Retrieved. 6/2/2022. Edited.