وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة ديالى
كلية التربية المقداد
قسم الرياضيات

استخدام الطرق العددية في حل معادلات تفاضلية

بحث وصفي
مقدم الى قسم الرياضيات /كلية التربية المقداد
الجامعة وهو جزء من متطلبات نيل درجة شهادة البكالوريوس

من قبل الطالبان
مريم ابراهيم حسن محمد
مروج عبد القادر اسماعيل

إشراف
م . م هند ابراهيم محمد

1443هـ   2022 م

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

﴿ قُلْ هَلْ يَسْتَوِي الَّذِينَ يَعْلَمُونَ وَالَّذِينَ لا يَعْلَمُونَ إِنَّمَا يَتَذَكَّرُ أُولُو الْأَلْبَاب ﴾

صدق الله العظيم

سورة الزمر (الآية:9)

الاهـــــــــداء

كل من علمني حرفاً في هذه الدنيا الفانية وعلمني النجاح والعبر.
واخص بالشكر الى والدي العزيز على دعمه المعنوي ومساعدته لي في اكمال دراستي .
الى امي العزيزة الغالية قدوتي الاولى ونبراسي الذي ينير دربي
الى اخوتي واصدقائي الذين احاطوني بالمحبة الطيبة ...
يسعدني و انا انتهي من بحثي هذا ان اتقدم بو افر الشكر والعرفان بالجميل الى الاستاذة (هند ابراهيم محمد) الذي كان لي شرف التعلم على يديه الكريمتين ...
لهم جميعاً اهدي ثمرة جهدي وهذا العمل المتواضع ...

واسأل الله ان يجعله نبراساً لكل طالب علم .

شكر وتقدير

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على أشرف الأنبياء والمرسلين سيدنا محمَّد وعلى آله وصحبه ومن تبعهم بإحسان إلى يوم الدين، وبعد ..

فيسرني و انا اضع اللمسات الاخيرة في هذا البحث ان اقدم شكري وامتناني الى مشرفي بالبحث الاستاذة (هند ابراهيم محمد) لاختياره موضوع البحث ولما بداه لي من توصية وارشاد ومتابعة علمية .

وأود ان اقدم شكري الى اساتذتي الافاضل في جامعة ديالى / كلية التربية المقداد الذين مدوا لي يد العون فجزاهم الله تعالى خير الجزاء و اقدم شكري الى جميع زملائي في الدراسة .

وفي الختام احترامي وتقديري الى كافة الجهود الخيرة التي اسهمت في انجازهذا البحث .

والله ولي التوفيق

المستخلص

لقد استحوذ موضوع حل المعادلات التفاضلية على اهتمام الرياضين منذ بداية القرن السابع عشر وحتى ايامنا هذا سواء من ناحية الدراسه وجود حل من ناحية خصائصه وطبيعته او من ناحية الحصول عليه ولم يقف الرياضي طويلا امام المعادلات التفاضلية التي يصعب حلها على صورة مغلقة بل تجاوز ذلك إلى الحل التقريبي والحل العددي وان المعادلات التفاضليه تضهر عند معالجة بعض مسائل الفيزيائية والهندسية وغيرها من العلوم الأخرى، هذا البحث يقدم الطرق العددية لحل منظومة من المعادلات التفاضلية العادية أولها طريقة تايلور وهي تحتاج إلى مشتقات الدالة ، من رتب عليا والتي تكون صعبة الايجاد لبعض الدوال معقدة البنية الجبرية كما احتوى ع طريقه اويلر التي تعتبر أقدم وابسط الأساليب العددية لحل مسائل القيم الابتدائية ثم طريقه اويلر المعدلة وهي من طرق التنبؤ والتصحيح لأنه يتم تصحيح القيم المحسوبة بأحدى الطرق الأخرى وأخيرا خوارزميات رونج-كوتا.

المحتويات

الفصل الاول: الاطار العام

1.1 المقدمة

يمكن القول بدون تجاوز او مبالغة ان المعادلات التفاضلية تحتل المكانة المرموقه في كل فروع علم الهندسة والفيزيائية حيث اغلب العلاقات والقوانين الحاكمة بين متغيرات مسألة فيزيائية او هندسية تظهر على صورة معادلات تفاضلية ولفهم هذه المسألة فلا بد من ان حل هذه المعادلات التفاضلية او على الاقل معرفة كثير من الخصائص هذا الحل ليست دوماً بالمسالة اليسيرة بل ان كثيرا من المعادلات التفاضلية غير قابل للحل لذا تعد الطرق العددية حلاً مثاليا لاغلب المعادلات التفاضلية.

2.1 مشكلة البحث

الطرق العددية وتعدد انواعها تشكل صعوبة في كيفية الحل وكيفية التفريق بين انواعها المختلفة، وكذلك توجد صعوبة تطبيقها في مختلف المجالات الفيزيائية والكيمائية وغيرها ولصعوبة هذة المجالات نفسها لأنها ليس بالأمر السهل لا توجد طرق رياضية عامه لحل المعادلات التفاضلية وهناك بعض الطرق يمكن تعميمها على مجمو عة خاصة من المعادلات التفاضلية حتى الطرق العددية وطريقة العناصر المنتهية ليستا طرق عامة لحل جميع المعادلات التفاضلية في كل الشرائط متعددة الفروع وشاملة العلوم لذالك تطبيق المجالات وما زالت المعادلات التفاضليه منذ عهد نيوتن تستخدم في فهم العلوم الفيزيائية والهندسية والكيميائية والحيوية بالإضافة إلي مساهمتها في دراسة التحليل الرياضي وامتدت استخداماتها في العلوم الاقتصادية والاجتماعية وتطورت المعادلات التفاضلية وتزاينت اهميتها في جميع مجالات العلوم وتطبيقاتها

3.1 أهداف البحث

التعرف على الطرق العددية لحل المعادلات التفاضلية والتوسع في دراستها لحل مسائل اكثر صعوبة للطرق العددية.

4.1 أهمية البحث

يبين البحث الطرق العددية بطريقة سهلة مبسطة تساعد في تكوين خلفية علمية ثابتة

5.1 مصطلحات البحث

- المعادلة :

هي عبارة رياضية مؤلفة من رموز رياضية تنص على مساواة تعبيرين رياضيين ويعبر عن هذة المساواة عن طريق علامة التساوي.[1]

- المعادلة

هي عبارة عن تشابه اي تعبير رياضي مساو لتعبير رياضي آخر عندما تكتب المعادلة سيكون لدينا تعبير عن الطرف الايسر وتعبير آخر عن الطرف الايمن بحيث

يكون بينهما علامة يساوي لان التعبيرين يجب أن يكون متساويين لبعضهما البعض.[2]

- المعادلة التفاضلية : هي علاقة تربط بين متغير مستقل واحد او اكثر والدالة المبحوث عنها التابعة لهذة المتغيرات التي تفترض انها متغيرات حقيقية كذالك الدالة [3].
- معادلات تفاضلية اعتيادية :

هي التي تحتوي على توابع ذات متغير مستقل واحد ومشتقات هذا المتغير.[4]

- المعادلات التفاضلية:

هي عبارة عن علاقة تجمع بين دالة واحدة أو أكثر من المشتقات، ومن الممكن تعريفها أيضاً بأنها معادلات يكون فيها المتغير دالة، وفي أغلب التطبيقات تكون الدالة عبارة عن كميات مادية، وتقسم إلى قسمين: معادلات عادية وجزئية، ومعادلات خطية وغير خطية، تعتبر المعادلات التفاضلية من الرتبة

الأولى بأنها تحتوي على مشتقات أولى فقط.[5]

الدراسات السابقة :

اولا: جواد كاظم الزركاني (2015) :عرض في كتابه بعض التعاريف والمفاهيم الاساسية مثل تصنيف المعادلة التفاضلية من حيث الرتبة والدرجة ومفهوم الحل العام والحل الشاذ لمعادلة التفاضليةوكذالك قدم الطرق حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الاولئ مثل فصل المتغيرات ـــحل المعادلة التفاضلية المتجانسة من الرتبة الاولئـــالمعادلة التفاضلية التامة حل المعادلات الغير تامة باستخدام عامل المكاملة ـــمعادلة برنولي [6]

ثانيا: د. زينب علي و أ. سمية رجب(٢٠١٦): وضحت الباحثتان دراسة لبعض الخوارزميات العددية لحل منظومة من المعادلات التفاضلية العادية، و درست طريقة تايلور التي تعتمد هذه الطريقة على متسلسلة تايلور وهي طريقة ليست عددية بالمعنى القاطع والصريح، ولكنها تعتبر الحجر ألساس للطرق العددية الاخرى وهي طريقة دقيقة ولكنها غير عملية بسبب حاجتها إلى مشتقات من رتب عليا، والتي قد تكون صعبة إليجاد لبعض الدوال معقدة البنية الجبرية، كما قدمت الباحثتان طريقة أويلر التي تعتبر أقدم وأبسط األساليب العددية لحل مسائل القيم أالبتدائية وطريقة أويلر المعدلة، وهي من طرق التنبؤ والتصحيح ألنه يتم تصحيح القيمة المحسوبة بإحدى الطرق السابقةو تعميم خوارزميات رونج- كوتا لحل مسألة قيمة ابتدائية [7]

1.2 المقدمة

قبل البدء في ايجاد حل اي مسالة ابتدائية يجب التاكد من المسالة هي نوع المتغير الامر الذي يعني وجود وانه مستقر . ان الحل المضبوط لمسالة كوشي يعني الحصول على الدالة $y(t);t>t0$ التي تحقق المعادلة التفاضلية العادية من الرتبة nالتي علا الشكل [3]

$$y^{(n)}(t_0)=y_o\ ;y(t_0)=y_0\ \ldots\ .,y^{(n-1)}(t_0)=y_0(n-1)\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots(1)$$

كما تحقق ايضا الشروط الابتدائية

$$y(t_0)=Y_0,y(t_0)=y_0,\ldots\ \ldots,\ y^{(n+1)}(t_0)=y^{(n-1)}(t_0)=y_0^{(n+1)}\ \ldots\ \ldots\ \ldots(2)$$

غير اننا نركز اهتمامنا على ايجاد الحلول العددية لتغير مسالة كوشي الابتدائية من المرتبة الاولى

$$Y(t)=f(t,y);y(t_0)=y_0;t\ €\ [a,b] \qquad \ldots\ \ldots.\ \ldots(3)$$

حيث الدالة $f(t\ ,y)$ هي الدالة معرفة ومتصلة على المستطيل

$$\{\ t-t_0\le a\ ,\ y-y0\le b\}$$

هذا والمعروف ان مسالة كوشي تعتبر مسالة مستقرة او غير مستقرة اذا حقق شرطين

1- الحل (t) موجود وفي حالة وجودة فهو وحيد

2- يوجد لاي ε>0 عدد ثابت k>0 دالة متصلة s (t)حيث اذا كان

[Eol< , 18(t)| << eVt € [a,b |

فأنه يوجد حل وحيد z(t) للمسألة

zo + E0 = (إلى) ض ؛ (z) + 8 (t ،ź (t) = f (t

وذلك بحيث يكون

[b ،t) <evt E [a) 6 ،> ||

2.2 طريقة تايلور Taylor ,s method (8)

هذة الطريقة تعتمد على متسلسلة تايلور وهي طريقة ليست عددية بالمعنى القاطع و الصريح وفكرة هذة الطريقة هي استخدام مفكوك الدالة y(x) وحول a التي لانعرفها ولكن نعرف مشتقاتها من مسالة القيمة الابتدائية (1), فيتم ايجاد باقي المشتقات عند a , وتكتب y(x) على الشكل

$$Y(x)=y(a)+hy(a)+ \frac{h}{2}\ y(a)+\ldots+\ \frac{h}{n}\,y^{(n)}(a)$$

حيث h=x-a ويمكن كتابتها بصورة اكثر عمومية :

$$Y(x^{n+1})=y(x_n)+hy(x_n)+\ldots+\frac{h}{n}\,y^{(n)}(x_n)$$

حيث $h=x_{n+1}-xn$.

و هنا تسمى طريقة متسلسلة تايلور من الرتبة (n).

'طريقة تايلور لحل المنظومة (1) مثل طريقة تايلور لحل معادلة تفاضلية واحدة ,

وذلك عن طريق التغير عن الدالتين x=f(t) , y=g(t) عن طريق معرفة المشتقة الاولى لكل من الدالتين, حيث :

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x,y). \qquad \frac{dy}{dt}\ =g(t,x,y).$$

حول t=to على نحو التالي :

$$X(1)=x0+(t-t0)x+\frac{(t-t0)2}{2}\ \ x+\ldots.$$

$Y(t)=y0+(t\_t0)y+\frac{(t-t0)2}{2}y+....$

واذا ثم وضع h=t-t0 فان المتسلسلتين اعلاه تاخذان الشكل التالي

$X(t)=x0+hx+\frac{h}{2}x+...$

$Y(t)=yo+hy+\frac{h}{2}Y+...$

واللتان تعتبران حلا للمنظومة (1) .

مثال 1

استخدام طريقة تايلور لحل المنظومة :

$\frac{dx}{dt}=4x-2y+2t \qquad :x(0)=0-$

$\frac{dy}{dt}=8x-4y+1 \qquad :y(0)=0.$

بطول خطوة h=0.1على الفترة , وقارنه بالحل الفعلي :

$X(t)=\frac{4}{3}t^2$

$Y(t)=t-2t^2+\frac{8}{3}t^3$

الحل

X'=4x-2y+2t, y'=8x-4y+1

X"=4x'-2y'+2, y"=8x'-4y'

X'"=4x"-2y", y'"=8x"-4y"

X(4)=4x'"-2y'", y(4)=8z'''-4y'''

عند t=0:

X(0)=0. Y(0)=0

X'(0)=0, y'(0)=1

X"(0)=0, y"(0)=-4

X"'(0)=8, y'''(0)=16

$X^{(4)}(0)=0, \quad y^{(4)}(0)=0$

$$X(0.1)=0+(0.1)\ \frac{0.1}{2}(0)+\ \frac{0.1}{6}\ (0)+\ \ (8)+\frac{0.1}{24}\ \ (0)=0.0013333$$

$$y\ (0.1)=0+(0.1\ \ )(1)\ \frac{0.1}{2}(-4)+\ \frac{0.1}{6}\ (16)+\ \ (8)+\frac{0.1}{24}\ \ (0)=\ 0.0826667$$

عند t= 0-1 :

والنتائج العددية التي ثم حصول عليها تتضح من الجدولين (1) و (2)

جدول (1)

t	x(t) الحل العددي	x(t) الحل الفعلي	مقدار الخطار
0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
1.000000E+01	8.266667E-02	1.333333E-03	0.000000E+00

2.000000E-01	1.413333E-01	1.066667E-02	0.000000E+00
3.000000E-01	1.920000E-01	3.6000001E-02	0.000000E+00
4.000000E-01	2.5066667E-01	8.533334E-02	7.450581E-09
5.000000E-01	3.333333E-01	1.666667E-01	1.490116E-08
6.000000E-01	4.560000E-01	2.880000E-01	2.980232E-08
7.000000E-01	6.346667E-01	4.573334E-01	5.960464E-08
8.000000E-01	8.853334E-01	6.826667E-01	1.192093E-07
9.000000E-01	1.224000	9.720001E-01	1.788139E-07
1.000000	1.666667	1.333334	3.576279E-07

جدول (2)

t	الحل العددي x(t)	الحل الفعلي x(t)	مقدار الخطار
0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0
1.000000E+01	8.266667E-02	8.266667E-02	0.000000E+00
2.000000E-01	1.413333E-01	1.413333E-01	0.490116E-08
3.000000E-01	1.920000E-01	1.920000E-01	0.000000E+00
4.000000E-01	2.5066667E-01	2.506667E-01	0.000000E+00
5.000000E-01	3.333333E-01	3.333333E-01	0.000000E+00
6.000000E-01	4.560000E-01	4.560000E-01	0.000000E+00
7.000000E-01	6.346667E-01	6.346667E-01	5.960464E-08
8.000000E-01	8.853334E-01	8.853335E-01	1.788139E-07
9.000000E-01	1.224000	1.224000	2.384186E-07
1.000000	1.666667	1.666667	3.576279E-07

3.2 طريقة أويلر

وهي أبسط الطرق العددية لحل مسألة القيمة الابتدائية (1) وتسمى أيضاً بطريقة المماس

وتعطى بالصيغة: (+ x) hf، y وهي خطية في , و f(x,y)، حل المنظومة (1) باستخدام

طريقة أويلر يتم كالآتي: X = x + hx

Y = y + hy

1.1.2 طريقة أويلر Euler's Method (9)

تعتمد هذه الطريقة على إعطاء الثابت h فيما صغيرة بحيث يمكن حذف حدود سلسلة تايلر

إبتداءا من الحد الذي يحوي (x) من سلسلة تايلر للنقطة (x =h) والذي يعرف كالأتي :]

[3

$$Y(x+h)=y(x)+hy(x)+ \frac{h2}{2}\ y^{n}(x)+\ldots+ \frac{h}{2}\ y^{n}(x)$$

وبحذف الحدود اعتباره من الحد $\frac{h}{2}\, y^{n}$ ينتج ان :

$$Y(x+h)=y(x)+hy(x)=y(x)+hf(x,y)$$

نبدا من النقطة (X0,y0) وبالتويض في العلاقة اعلاه ينتج ان

$$Y1=y(x_0+h)$$

$$=Y(x_0)+hy(x_0)$$

$$Y2=y(x_0+2h)$$

$$Y(x_0)+2hy(x_0)$$

$$Yn+1=yn + hf(xn,yn) \qquad n=0,1,2,3,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,M-1$$

اي ان الصيغة العامة لقانون أويلر هي

$$Y_{n+1}= y_n +hf(x_n,y_n)$$

When $x_n=x_0+nh$ $n=0,1,2,3,\dots \dots \dots \dots,M-1$

مثال :

أوجد الحل التقريبي للمعادلة التفاضلية $y = x + y$ حيث $(0) = 0$ خذ $h=0.2$ في الفترة $[0,1]$

الحل:

بإستخدام القانون (1) ومن الشرط $(0) =$ وينتج $x = 0, y = 0$ وبالتعويض في القانون نجد أن

$$x_n= x_o + nh = nh \qquad f(x_n,Y_n) = x_n + Y_n$$

$$y_1 = y_o + 0.2 (x + y_2) = 0$$

$$Y2=y1+0.2(x_1+y_1)=0+0.2(0.2+0)=0.4$$

$$y3 = ya + 0.2(x2 + yz) = 0.4 + 0.2(0.4 + 0.04) = 0.128$$

$$Y4=y3+0.2(x3+y3)=0.128+0.2(0.6+0.128)=0.274$$

$$Y5=y4+0.2(x4+y4)=0.48+0.2(0.8+0.489)=1.747$$

n	Xn=0-2n	Yn-1=yn+0.2(xn+yn)
0	0	0
1	0.2	0.04
2	0.4	0.128
3	0.6	0.275

4	0.8	0.489
5	1	1.747

مثال :

أوجد الحل التقريبي لمسألة الشرط الإبتدائي

$y = x + e^x$ ثم قارنه بالحل الصحيح $1 \geq x \geq 0$ and $y(0) = 0y = -y + x + 1$

نقصد بالمقارنة إيجاد الخطأ المرتكب ويمثل القيمة المطلقة للفرق بين الحل الصحيح والحل)

التقريبي ($E = y_{n+1} - z_{n+1}$

الحل :

$h = \frac{b-a}{n}$ $x_n = X_O + nh$

$f(x_n . Y_n) = -y_n + x_n + 1$

$Y_{n+1} = Y_n + 0.1(-y_n + x_n + 1)$

$y_1 = y_1 + 0.1(-Yo + Xo + 1) = 10.1(-1 + 0 + 1) = 1$

$Y_2 = Y_1 + 0.1(-y_1 + x_1 + 1) = 10.1(-1 + 0.1 + 1) = 1.01$

وهكذا تحصل على القيم التقريبية الموضحة في الجدول أدناه

n	Xn	$(Y_{n+1}\ Yn + 0.2(x + yn$
0	0	1
1	0.1	1.101
2	0.2	1.029

3	0.3	1.016100
4	0.4	1.90490
5	0.5	1.1311441
6	0.6	1.78297
7	0.7	1.230467
8	0.8	1.287420
9	0.9	1.348578

وللمقارنة بين الحل التقريبي والحل الصحيح

$$Z_{n+1} = xn + e\ (-xn)$$

$$z_1 = xo + e^{x0} = 0 + e^0 = 1$$

$$Z_2 = x_1 + e^{x^1} = 0.1 + e^{-0.1} = 1.04837$$

$$z_3 = x_2 + ex^2 = 0.2 + e\text{-}02 = 1.018731$$

$$Z_1 = X_1 + ex^3 = 0.3 + e^{-0.3} = 10.40818$$

وهكذا تتحصل على بقية القيم الصحيحة

n	y_{n+1}	z_{n+1}	Error= y_{n+1}-z_{n+1}
0	1	1	0.00000
1	1.01	1.04837	0.03837
2	1.029	1.048731	0.0217631
3	1016100	1.040818	0.024718

4	1.90490	1.070320	0.16542
5	1.131441	1.06531	0.066131
6	1.78297	1.148812	0.634158
7	1.230467	1.196585	0.033883

2.1.2 طريقة اويلر المحسنة (10)

ليكن المطلوب حل المعادلة التفاضلية

$$Y=f(x,y) \quad (1)$$

على الفترة $[x_o , x_n]$ من اجل الشرط الابتدائي

$$Y(x_o)=y_o \quad (2)$$

حيث $y(x)$ هي الدالة الاصلية للدالة (x) ومنه نجد ان

$$y(x_1) = y(xo) + \int_{x0}^{x1} f(x\, y(x))\, dx \quad (3)$$

الان يمكن استخدام طرق التكامل العددي لتقريب التكامل المحدد الموجود في الطرف الايمن من العلاقة (3) في استخدام طريقة شبه المنحرف من اجل الخطوة $h = xo - xn$ نجد

$$y(x_1) = y(x_0) + \frac{h}{2}[f(x_0 ،y(x_0)) + f(x1,y(x1))]$$

من هذه العلاقة نجد ان $y(x_1)$ قد حسبت بدلالة نفسها لذلك توجد قيمة تقريبية لها وذلك حسب طريقة ما . ولتكن طريقة أويلر ونرمز لها بـ yi فتكون القيمة في الطرف الايسر

$(y+1 = y+1)$ التي تعوضها من جديد في الطرف فتحصل على y4 وهكذا يصبح لدينا

$$Y_{i+1}=yi+\frac{h}{2}\ [f(x_i,y_i)+f(x_{i+1},y_{i+1})$$

I=0,1,2,…………….n-1 ……………………..(4)

حيث ان

$$y_{i+1}=y_i+hf(x_i,y_i) \quad , \quad X_{i+1} = x + h \quad (0)$$

اذن من كل خطوة تستخدم طريقة أويلر كتبو للقيمة الابتدائية للحل ثم تستخدم العلاقة (4)

وتكرر العملية

اوجد حل معادلة التفاضلية :

$$Y=\ \frac{x-y}{2} \quad , \quad y(0)=1$$

حيث $h=0.25$ وذلك حسب طريقة اويلر المحسنة

الحل :

$$F(x_0,y_0)=\ \frac{x0-y0}{2}=-0.5$$

نطبق اولا طريقة اويلر فنجد

$$y_1=Y0+Hf\ (X0,Y0)=1+0.25(0.5-)=0.875$$

ومنه

$$F(x_1,y_1^{(1)})=\ \frac{x1-y1}{2}\ =\frac{0.25-0.875}{5}\ = -0.3125$$

وهكذا تحصل على

$$Y1^{(1)}=y_0+\frac{H}{2}\,[f(x_0,y_0)+f(x_1,y_1^{(0)})]$$

$=1+\frac{0.25}{2}$ [-0.5-0.3125] =0.898438

وبتكرار العملية مرة أخرى تكتب

$$F(x_1,y_1^{(1)})= \frac{x1-y1}{2} = \frac{0.25-0898438}{5} = -0.324219$$

$$Y1^{(2)}=y_0+ [f(x_0,y_0)+f(x_1,y_1^{(1)})]$$

$=1+\frac{0.25}{2}$ [-0.5-0.324219] =896974ز0

3.2 طريقة رنج كوتا من الرتبة الرابعة (11) Runge-Kutta Method of order 4

(R.K.4)

إن طريقة أويلر لا تستعمل عمليا لكونها تحتاج الي خطوة صغيرة قيمة h يجب أن تكون صغيرة) للحصول على دقة معقولة، وطريقة تايلر من الرتب العليا غير مرغوبة كاسلوب عام لحل المعادلات التفاضلية لأنها تحتاج الى مشتقات كثيرة للدالة y(x) أما طريقة رنج كونا فتعتبر من أهم الطرق المستخدمة في إيجاد الحل التقريبي للمعادلات التفاضلية فهي تمكنا من الحصول على دقة عالية مع تجنب الحاجة الى إشتقاق للدالة (x) وتعتمد على تعويض الدالة (f(x, y في نقاط مختارة معادلات طريقة رنج كونا من الرتبة الرابعة (R.K.4) تعرف بالصورة الأتية:

$$Yn+1=yn+\frac{1}{6}(k1+2kn+kn)$$

(1)

حيث

$$K1=hf(xn,yn)$$

$K2=hf(xn+\frac{h}{2},ym+\frac{1}{2}\ k1)$

$K3=hf(xn+\frac{h}{2}\ .\ yn+\frac{1}{2}\ k2)$

$K4=hf(xn+h,yn+hk3)$

مثال:

بإستخدام طريقة R.K, 4 أوجد الحل التقريبي لمسلة الشرط الإبتدائي

$Y=-y+x+1$ $\qquad\qquad$ $0\leq\ \leq 1$

$h=0.1y(0)=1$

الحل:

يمكن كتابة معادلات رنج كوتا بالصورة الآتية:

(2) $Y_{n+1}=y_n+\frac{h}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4)$

بتطبيق معادلات رنج كونا حيث

$F(x,y)=-y+x+1$

$K_1 = f\ (xn,\ Yn)$

$K_2 = f\ (xn\ +.\ Yn + K_1\ h\ h)$

$K3 = f\ (xn + z_1 Yn + K_2\ h\ h)$

$k4=f(x_n+h,y_n+hk_3)$

ينتج

$K_1 = -yn + xn+1$

$K_2 = f\,(x_n\frac{h}{2}, y_n + 2\frac{h}{2}$

$= \frac{h}{2}(\frac{h}{2} - 1)\,yn + (-1\,\frac{h}{2})x + 1$

$= (1-\frac{h}{2})(1-\frac{h}{2})(Xn, yn) + 1$

$-:K4 = -y + h(1-\frac{h}{2}(\frac{h}{2}xn - yn) + 1 + xn + h + 1$

لكل

For each $n = 0,1,2,3,\ldots\ldots\ldots\ldots 9$

مثلا عند $n = 0$

$K1 = -yo + x + 1 = 0$

$K2 = (-0.95y + 0.95x, + 1) = 0.05$

$K3 = -0.9525\,(xn - yn) + 1 = 0.09525$

$K4 = -1-0-19525 = 0.09525$

ويتعويض هذه القيم في المعادلة

$Y_{n+1} = y_2 + h\,(K_1 + 2K_2 + 2K_2 + K_1)$

نتحصل على

$Y_1 = Yo + (K_1 + 2K_2 + 2K_2 + K_1)$

$(0.09525 + (1.09525) \times 2 + 0.05 \times 2 + 0) - 0.1 + 20\ 21 + 0 =$

$= 1.0048375009$

هكذا تستطيع أن نتحصل على القيم والجدول أدناه يمثل بعض القيم المحسوبة حاول ايجاد بقية القيم

Xn	Y_{n+1}
0	1.00000
0.1	1.0048375000
0.2	1.187309014
0.3	....

مثال :

الحل الصحيح للمعادلة التفاضلية + + $y = 3x$ هو $y = 13\ ex/2 - 6x - 12$ جد الحل التقريبي للمعادلة بالقيمة الإبتدائية $y(0)=1$ ويأخذ $h = 0.1$ للفترة $x = 0 = 1$ واثبت أن الدقة تزداد بنقصان الفترة .

الحل

بتطبيق معادلات رنج كونا حيث $f\ (x,y) = 3x + y / 2$ تصبح:

$$K1=hf(x0,y0)=h(0.1)=0.05$$

$$K2=hf(x0\frac{h}{2},y0+\frac{1}{2}\ k2=hf(0.05,1.25)=0.06625$$

$$K3=hf(x0+\frac{h}{2},y0+\frac{1}{2}k2)=hf(0.05,1.033125)=0.6665625$$

$$K4=hf(x0+h,y0+hk3)=hf(0.1,106665625)=0.0833328$$

وبتعويض هذه القيم في معادلة رنج كوتا

$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{h}{6}\ (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

$$y1=y0+\frac{1}{6}\ (0.05+2x\ 0.06625+2x0.6665625+0.083328)$$

ومن الحل الصحيح $y = 13^{ex/2} - 6x - 12$ نجد القيمة الصحيحة للنقطة إلا بتعويض قيمة x_1 هي $y(0.1) = 1.06652424866$ أي تصل الدقة الى ثمانية أرقام معنوية بأخذ $h=0.1$ وبمقارنة قيمة لا الناتجة من الحل سحيح مع قيمة لا الناتجة من الحل العددي بازدياد قيمة الفترة h تلاحظ أن قيمة الخطأ يزداد كم موضح في الجدول أدناه

قيمة ل بطريقة رنج كونا	قيمة لا من الحل الصحيح	الفترة المختارة h
Y(0.1)= 1.06652421856	Z(0.1)=1.06665242486	H=0.1
Y(0.2)=1.1672208333	Z(0.2)=1.16722193718	H=0.2
Y(0.4)=1.4782	Z(0.3)=1.47823585939	H=0.3

استخدم طريقة رنج كونا من الرتبة الرابعة لحل المعادلة التفاضلية

$$Y= \frac{(x-y)}{2}$$

في الفترة [0,3] والشرط الإبتدائي 1=(0) ويقيم $h = 1$, ثم قارن النتيجة بالحل الصحيح

$$y=13e^{-x/2} -2+x$$

الحل :

بتطبيق معادلات رنج كوتا

$$Y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(K_1+ 2K_2 + 2K_3 + K_1)$$

$$K_1 = f(xn , Yn)$$

$$K_2 = f(x_2 + Yn + K_2\, h\, h)$$

$$K_3= f(x_2 + y_2 + K_2)$$

$$K_4 = f(x + h.\, y + hK3)$$

تحصل على:

$$k1=\frac{0.0-1.0}{2}=-0.5$$

$$k2=\frac{0.125-(1+0.25(0.5)(-0.5))}{2}=-0.40625$$

$$k3=\frac{0.125-(1+0.25(0.5)(-0.5)}{2}=-0.4121094$$

$$k4=\frac{0.25-(1+0.25(-0.4121094))}{2}=-0.3234863$$

وعند $n = 0$

$$Y_1 = Yn + \frac{0.25}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

$$y_1 = 1.0 + 0.04167\,(-0.5 + 2\,(-0.40625) + 2\,(-0.4121094) - 0.3234863)$$

$$=0.8974915$$

وهكذا تتحصل على بقية القيم والجدول أدناه يوضح القيم المحسوبة:

xn	Yn+1				Z_{n+1}
	h=1	$h=\frac{1}{2}$	$h=\frac{1}{4}$	$h=\frac{1}{8}$	
0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
1.125				0.9432392	0.9432392
0.25			0.8974915	0.8974908	0.8974917
0.375				0.8620874	0.8320874
0.50			0.83644037	0.8364024	0.8364023
0.75		0.8364258	0.8118696	0.8118679	0.8118678

1.00	0.8203125		0.8195940	0.8195921	0.8195920
1.50		1.9171423	0.9171021	0.9170998	0.9170997
2.00	1.1045125	1.1036826	1.1036408	1.1036385	0.1036383
2.50		1.3595575	1.3955168	1.3595145	1.3595144
3.00	1.6701860	1,6694308	1.6693928	1.6693906	1.6693905

بمكاملة المعادلة = f(x,y)

باستخدام طريقة سميسن من x-1 إلى xi+1

نحصل على

$$\int_{xi-1}^{xi+1} f(x)dx \quad = \quad \int_{xi-1}^{xi+1} f(x,y)dx \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

وان

F(F (xi+1) F (xi-1) =$\frac{w}{3}$ [f(xi-1;yi-1)+4f (xi,yi)+f(xi+1,yi+1)………(2)

ولو افترضنا

yi+1≈F (xi+1),yi-1≈ f(xi-1)

فأن المعادلة (2) تصبح

y(i+1)=y(i+1)+$\frac{w}{3}$[2f(xi,yi)-f(xi-1,yi-1)+2f(xi+1,yi-1)…..(4)

ولايجاد قيمة المنبئ (y_{i+1}) قام ملف باشتفاق

Yi+1 = yi-3 +$\frac{4w}{3}$ [2 F(x,y) - F(x-1-yi-1) + 2 F(x1-2 , y1-2)…..(4)

والمعادلتان (3) و(4) يكونان طريقة ملن ومن الواضح ان طريقة ملن معرفة اربع قيم

Y(i-3) Y(i-2) Y(i-1) Yi وعليه طريقة ملن تحتاج استخدام طريقة قبلها للحصول على قيم (y) (اوپلر مثلا) .

ولهذا نجد طريقة غيرشائعة بالرغم من انها تعطي نتائج جيده [7]

الفصل الثالث : عرض النتائج وتفسيرها

3-1 النتائج

- ان الطرق العددية علم يهتم بإشتقاق وتحليل طرق إيجاد حلول عددية لمسائل رياضية يصعب حلها بالطرق التحليلية الجبرية .ففي بعض المسائل لايمكننا أن نتحصل على حل مضبوط بالطرق التحليلية والنظريات المعتادة ففي مثل هذه المسائل نلجأ إلى البحث عن خوارزميات أي طرق محددة الخطوات للحصول على حلول عددية تقريبية إلى الحلول المضبوطة إنطلاقا من المعطيات**.**
- طريقة رنج كوتا من الرتبة الرابعة تعتبر طريقة غير شائعة ولكنها تعطي نتيجة جيدة .
- ان العيوب المهمة في طريقة أويلر البسيطة أن الخطأ كبير جدًا ، في حين أنه من السهل ملاحظة أن الخطأ يميل إلى التراكم - كلما ابتعدنا عن النقطة ، زاد في الغالب يصبح التناقض بين النهج والحقيقة أكبر. يمكن تفسير ذلك بالمبدأ الذي استخدمه أويلر كأساس لطريقته: مقاطع الخط متوازية ملائم **ظل** على الرسم البياني للدالة بالنقاط. هذه الحقيقة ، بالمناسبة ، يمكن رؤيتها بوضوح من الرسم.

الفصل الرابع : الاستنتاجات والمقترحات

1.4 الاستنتاجات

مما سبق من دراسة لموضوع الطرق العددية لحل المعادلات التفاضلية الاعتيادية تم التوصيل إلى مجموعة من الاستنتاجات

1- للمعادلات التفاضلية الاعتيادية اهمية كبيرة في مجالات عديدة في مختلف العلوم (الفيزياء، الكيمياء ، الهندسة).

2- يتم اللجوء الى الحل العددي للمعادلة التفاضلية عندما يتعذر الحصول على تعبير مغلق للحل.

3- توجد طرق عددية عديدة لحل المعادلات التفاضلية الاعتيادية كطريقة اويلر ورانج كوتا وغيرها

4- ان الحل العددي يمثل حل تقريبي للمعادلة التفاضلية حيث يحتوي على نسبة خطأ.

5- ان طريقة تايلر وطريقة اويلر وطريقة رانج كوتا طرق ذات كفاءة في ايجاد الحل التقريبي للمعادلات التفاضلية الاعتيادية.

2.4 المقترحات

توصي الباحثتان:

1- ان يكون لدى الطالب فكرة واضحة من المعادلات التفاضلية الاعتيادية والمعادلات التفاضلية الجزئية.

2-ان يكون لدى الطالب معرفة مسبقة بقواعد التكامل وقوانين الاشتقاق .

3- التأني والتركيز عند اختيار الطرق العددية عند حل المعادلات التفاضلية الاعتيادية

4-التدرب بأستمرار على حل المعادلات التفاضلية الاعتيادية بطرق عددية ترفع مستوى الطالب في هذا المجال.

المصادر والمراجع

1- بوفقة , اسماعيل ,عانش الهتادو (2001) المعادلات التفاضلية .

2- صبحا , سليمان (2014) الرياضيات للعلوم الاقتصادية والادارية - دار الاكاديميون للنشر والتوزيع.

3- العويضي , حسن مصطفى (2006) المعادلات التفاضلية الجذر الثاني مكتبة الرشيد , الرياض , مملكة العربية السعودية

4- اسماعيل , بوفقه (15,2010) المعادلات التفاضلية الاعتيادية

5- العويفي , حسن مصطفى (2004) المعادلات التفاضلية دراسات السابقة

6- جواد كاظم الزركاني 2015 (تطبيقات معادلة التفاضلية)

7- زينب علي الشقماني/ أ- سمية رجب رفيدة

Scientific Journal of Faculty of Education, Misurata
Published on 2016, Dec. 6, No. 2University-Libya, Vol.
2016/12/01Web

8- Douglas ,fairs ,Richard ,L . Brden , ترجمة رمضان محمد للمهندسين ابو القاسم ابوديه , التحليل العددي

9- سعد محمد فضيلة – النفاتي محمد الروبعي – التحليل العددي للمهندسين منشورات جامعة الغاتم – كلية الهندسة

10- الشيخ احمد – عبد الطلب ابراهيم 1999(التحليل العددي – جامعة التكنولوجية)

11- كدين , علي محمود (2010)طرق عددية جامعة 7 اكتوبر محداتة