جمهورية العراق
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
جامعة ديالى / كلية التربية المقداد
قسم الرياضيات

الفضاء التبلوجي

بحث مقدم الى جامعة ديالى / كلية التربية المقداد / قسم الرياضيات
وهو جزء من متطلبات لنيل شهادة البكالوريوس في الرياضيات

أعداد الطالبات
علي محمد علي
عواطف عادل رشيد

إشراف
م.م .ياسمين مسعود عبد

1442ه 2022 م

الفصل الاول

علم التبولوجي

ما هو علم التبولوجي

التبولوجي كلمة مترجمة من الكلمة الانجليزية Topology وتنقسم كلمة التبولوجي الى مقطعين المقطع الاول Topo التي تعود الى اصل يوناني الى Topos والتي تعني مكان place ، والمقطع الثاني هو logy والتي تعود لأصل يوناني logys والتي تعني دراسة study فلو قمنا بربط المعنيين في الكلمة لوجدنا ان التبولوجي هو الهندسة الحديثة في دراسة جميع التراكيب والمكونات للفضاءات المختلفة .

اذن يعرف علم التبولوجي

هو احد فروع علم الرياضيات والذي يهتم في دراسة تراكيب ومكونات وخصائص جميع الفضاءات المختلفة بحيث تبقى هذه الخصائص متشابهة تحت عمليات التشكيل المتصلة Smooth Deformation دون ان يقوم بعملية تمزيق او يترك فتحات في الانتقال من احدهما الى الاخر وبالعكس ايضاً وكان التعريف يخبرنا ان الهندسة التي يتعامل بها التبولوجي ليست الهندسة التي نعرفها بل كأنها هندسة مطاطية ولكي يتضح المفهوم بشكل جيد لتدرس الاتي :

من المعلوم لدينا ان المستوى الاقليدي في الهندسة الاعتيادية والتي نعرفها انه بإمكاننا ان نقوم بعملية نقل الاشكال من مكان الى اخر عن طريق الازاحة و بإمكاننا ايضاً ان

نقوم بعملية دوران له وعكسه وقليه ولكن لا نستطيع القيام بعملية ثني له او القيام بعملية تمديد بشكل متصل .

مفهوم الهندسة المطاطية

بشكل موجز ان الاشكال عبارة عن قطع من المطاط قابلة للثني والتمدد وكل شكلين او اكثر بإمكاننا ان نحصل على احدهما من الاخر وبالعكس يكون متشابهين.

فمثلاً /

المثلث والدائرة والمربع كلها اشكال موجودة في المستوى الاقليدي بخصائص ونقول ان احدهما كافئ الاخر اذا كان نفس المساحة في الهندسة المطاطية جميع هذه الاشكال هي نفسها متشابهة فالدائرة هي نفسها المثلث والسبب يعود الى انه يمكن تشكيل المثلث من الدائرة بثني محيط الدائرة وجعلها كزوايا للمثلث وبالعكس يمكن اعادة تشكيل الدائرة من المثلث بعملية تمديد اضلاع المثلث الى دائرة وهذا ايضا ينطبق على المستطيل .

لاحظ انه عندما قمنا بتشكيل احد هذه الاشكال من الاخر لم نقم بعملية قطع cut لاحدها ولم نقم بعملية تمزيق للشكل من جهة اي ترك اي نقطة انفصال وبالتالي في الهندسة المطاطية (التبولوجي) يكون الاشكال المتشابهة اذا استطعنا الحصول على احدها من الاخر بعمليات متصلة وبالعكس وبالتالي الدائرة لا تشابه الشكل الذي يشبه الرقم 8 بسبب انه يمكن الحصول عليه من قبل الدائرة ولكن في العكس لا يمكن يل سنحتاج الى فصب منتصف الرقم 8 لم نحتاج الى اي نقطة انفصال من الدائرة الى الرقم 8 وقيس على ذلك بأمثلة عديدة .

نستطيع القول بأن الاشكال التي تشترك بنفس العدد من الفتحات (نقاط الانفصال) يكون كلاهما متشابه في الهندسة المطاطية اي كلاهما يشترك في نفس التبولوجي والتي لا تحوي على اي فتحة تدعى مترابط بشكل بسيط Simple connected space التبولوجي يدخل تقريبا في جميع فروع الرياضيات بلغته الخاصة والمميزة .

فروع التبولوجيا

يتفرع التبولوجيا لعدة فروع وهي :-

١. **التبولوجيا النقطية Point – set Topology** : وهو الفرع الذي يهتم بالتبولوجي العامة من ناحية الخصائص الفضاء من ناحية التراكيب كدراسة compactness التراص والترابط connectedness .

٢. **التبولوجي الجبرية Algebraic Topology** : وهو الفرع الذي يهتم بشكل عام في دراسة درجات الترابط من خلال التراكيب الجبرية مثل دراسة علم الهمولوجي Homology .

٣. **التبولوجي الهندسية Geometric Topology** : وهو الفرع الذي يهتم في دراسة Manifolds بنية رياضية كل نقطة فيها لها جوار يكون هيموفيك الى الفضاء الاقليدي ويهتم بالابعاد حسب ابعاد الفضاء الاقليدي .

٤. **التبولوجي التفاضلية Differential Topology**

تاريخ التبولوجي بشكل موجز

بدأ التفكير في التبولوجي من خلال مشكلة اويلر في المسألة المشهورة (السبعة الجسور في مدينة كونسبريك)(Seven Bridges of Konigsberg) وكانت ورقة اويلر عام ١٧٣٦ اول نتيجة على الفضاء التبولوجي .

اول من قدم مصطلح التبولوجي هم الالمان باسم Topology علم ١٨٤٧ بواسطة جوهان بندكت ومن ثم اظهر اصحاب التخصص في اللغة الانكليزية ان كلمة Topolgist هو كل شخص متخصص في التبولوجي اما التبولوجي الحديثة متعمد بشكل قوي جداً على مفاهيم نظرية المجموعات التي اسست من قبل كانتور في اواخر القرن التاسع عشر ، قام عدة علماء لوضع عدة تعاريف محددة له فقام العالم اسكولي وغيرهم بوضع اول تعريف للفضاء المتري الذي يعتبر حالة خاصة من التبولوجي حالياً في سنة ١٩٠٦ وبعرها قام العالم هاوسدورف بوضع تعريف له والذي يعرف حالياً بفضاء هاوسدورف المشهور جداً في سنة ١٩١٤ ولكن اتى العالم كزمبرز كورتوبسكي Kazimierz Kuratowski سنة ١٩٢٢ بوضع التعريف المعروف لدينا .

الاعداد الحقيقية Real nrmbers

ويرمز لها بالرمز R واشمل الاعداد الموجبة والسالبة والصفر ، الاعداد الحقيقية حقل مرتب كامل .

بديهة الحقل المرتب Oxdered field Axiom

لتكن $x, y \in R$ يكون $x, y \in R$ وان عملية الجمع والطرح نحققان الخواص الاتية :-

١. التبديل Commutative

$$X + y = y + x \qquad \forall x, y \in R$$

$$X.y = y.x \qquad \forall x, y \in R$$

٢. التجميع Associative

$$(x + y) + z = x + (y + z) \qquad \forall x, y \in R$$

$$(x.y).z = x.(y.z) \qquad \forall x, y \in R$$

٣. التوزيع Distributive

$$x.(y + z) = x.y + x.z \qquad \forall x, y, z \in R$$

٤. العنصر المحايد Identity elements

حيث ان $0,1$ ينتميان الى R

$$X + 0 = x \qquad \forall x \in R$$

$$X.1 = x \qquad \forall x \in$$

٥. النظائر الجمعية والضربية Inverse Elements

a. لكل x ينتمي الى R ويوجد y ينتمي الى R بحيث ان $x + y = 0$ يسمى y النظير الجمعي للعدد x وتكتب احياناً (−x) .

b. لكل x ينتمي الى R حيث x لا يساوي صفر يوجد y ينتمي الى R بحيث ان $x . y = 1$ يسمى y النظير الضربي للعدد x وتكتب احياناً x^{-1} او $\frac{1}{x}$.

ملاحظـــة // لكـل x,y ينتمـــي الـــى R فـــان واحـــدة فقـــط مـــن العلاقـــات التاليـــة تكـــون صحيحة :−

a. $x<y$

b. $y<x$

c. $x = y$

المجموعات المحددة Abounded sets

❖ تعريف يقال للعدد b بانه اعلى للمجموعة A Upper Bounded اذا كان $x \le b$ لكل $x \in A$

مثال / $A=\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}, \ldots\ldots\}$

❖ تعريف يقال للعدد c بانه حد ادنى للمجموعة A lower Bound اذا كان $x \ge b$ لكل $x \in A$

مثال / $A = \{x: 2<x<3\}$

ملاحظات // أ. الحد الادنى والحد الاعلى لأي مجموعة يكون وحيد .

ب. الحد الادنى والحد الاعلى لا يشترط ان بنتمي الى المجموعة .

❖ تعريف لتكن A مجموعة جزئية من R بقال للمجموعة A انها محددة من الاعلى اذا كانت لها حد اعلى ومحددة من الاسفل اذا كانت لها حد ادنى .

مثال / $A=\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}, \ldots,\frac{1}{n},\ldots\}$

❖ تعريف يقال للمجموعة انها محددة Bounded اذا كانت محددة من الاعلى والاسفل

مثال / $A = \{1,2,3,4\}$، هنا محددة من الاعلى بالعدد 4 ومحددة من الاسفل بالعدد 1

مثال / $A = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ ، هنا غير محددة

مثال / $A = \{x: x<1\}$ ، هنا محددة من الاعلى بأصغر قيد علوي وهو لا ينتمي الى المجموعة غير محددة من الاسفل .

مثال / $A = \{x: x \geq 1\}$ ، هنا محددة من الاسفل بأعلى قيد سفلي وينتمي الى المجموعة غير محددة من الاعلى .

القيمة المطلقة Absolute Value

القيمة المطلقة Absolute Value للعدد x ويرمز لها بالرمز | | تعرف كما يأتي :-

$$|x| = \begin{cases} x & if x \geq 0 \\ -x & if x < 0 \end{cases}$$

القيمة المطلقة هي القيمة العددية بغض النظر عن الاشارة هندسياً تعني ان النقطة تبعد بمقدار x عن نقطة الاصل دون الاهتمام الى كون النقطة يمين او يسار نقطة الاصل .

a. بصورة عامة يمكن كتابة المجموعة $\{x: |x| < c\}$ لكل $c > 0$ بالشكل التالي $\{x - c < x < c\}$.

مثال / لتكن $A = \{x: |x| < 2\}$ تكتب بالشكل التالي

$A = \{x: -2 < x < 2\}$

b. بصورة عامة تكتب $A = \{x: |x - a| < b\}$ بالشكل التالي $A = \{x: a - b < x < a + b\}$.

مثال / لتكن $A = \{x:/x - 3/< 2\}$ تكتب بالشكل التالي

$A = \{x: -2 < x - 3 < 2\}$

$A = \{x: 3 - 2 < x < 2 + 3\}$

$A = \{x: 1 < x < 5\}$

الخواص //

١. $|-x| = x$

٢. $-|x| \le x \le |x|$

٣. $|x|2 = x2$

$||x| - |y|| \le |x - y|$

الحل /

$|x| = |x - y + y| \le |x - y| + |y|$

$|x| - |y| \le |x - y| \longrightarrow 1$

$|y| = |y - x + x| \le |y||y - x| + |x|$

$|y| - |x| \le |-(x - y)|$

$|y| - |x| \le |x - y|$

$|x| - |y| \ge |x - y| \longrightarrow 2$

$||x| - |y|| \le |x - y|$

نظرية لكل من $x , y \in R$ فان

$\mathbf{1}.\ |\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}| \le |\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|$

الحل /

$x \le |x|$

$y \le |y|$

$x + y \leq |x| + |y| \longrightarrow 1$

$-x - y \leq |x| + |y|$

$-(x + y) \leq |x| + |y|$

$(x + y) \geq -(|x| + |y|)$

$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$

$|x + y| \leq |x| + |y|$

2. $|\boldsymbol{x}.\boldsymbol{y}| = |\boldsymbol{x}|.|\boldsymbol{y}|$

الحل /

$|x.y|^2 = (x.y)^2$

$= x^2.y^2$

$= |x|^2.|y|^2$

$|x.y|^2 = |x|^2.|y|^2$

$(|x.y|)^2 = (|x|.|y|)^2$ بالجذر

$|x.y| = (|x|.|y|)$

بديهية الكمال Completeness

١. يقال للعدد الحقيقي b بانه اصغر حد اعلى للمجموعة A اذا تحقق الشرطان :

أ. b هو حد اعلى للمجموعة A .

ب.اذا كان C حداً اعلى للمجموعة A فان $b \leq c$.

٢. يقال للعدد الحقيقي a بانه اكبر حد ادنى للمجموعة A اذا تحقق الشرطان :

أ. a هو حد ادنى للمجموعة A .

ب.اذا كان C حداً ادنى للمجموعة A فان $a \geq c$.

<u>مثال</u> / $A = \{2,4,6,8,10\}$

$2 \leftarrow$ اصغر عناصر المجموعة A وهو اكبر حد ادنى

$10 \leftarrow$ هو اكبر عناصر المجموعة A وهو اصغر حد اعلى

<u>ملاحظة</u> // المجموعة المنتهية تمتلك حد اعلى وحد اسفل ويكون منتمي الى المجموعة .

تعريف الفترة المفتوحة Open Interval

تسمى المجموعة $\{x: a < x < b\}$ حيث $a, b \in R$ وتكتب (a,b) أي ان $(a,b) = \{x: a < x < b, \forall x \in R, a, b \in R\}$ نلاحظ ان نقطتي النهاية للفترة المفتوحة لا ينتميان الى الفترة .

تعريف الفترة المغلقة Closed Interval

تسمى المجموعة $\{x: a \leq x \leq b\}$ حيث $a, b \in R$ وتكتب[a, b] أي ان $[a,b] = \{x: a \leq x \leq b, \forall x \in R, a, b \in R\}$ نلاحظ ان نقطتي النهاية للفترة المغلقة ينتميان الى الفترة .

تعريف جوار النقطة Neigh borhood of A point

لتكن $c \in R$ وليكن $\in > 0$ عددا حقيقياً موجباً فالفترة المفتوحة $(c - \in, c + \in)$ تسمى جواراً للنقطة c .

يسمى العدد $\in$ بنصف قطر هذا الجوار ويرمز عادة لجوار النقطة c بالرمز $N(c,\in)$

ولذا يكون وحيث ان النقطة c تمثل منتصف الفترة المفتوحة .

$$N(c,\in)=(c-\in,c+\in)=\{x: c-\in< x<c+\in\}$$

مثال /

$$N\left(1,\frac{1}{10}\right)=\left(1-\frac{1}{10},1+\frac{1}{10}\right)=\{x: c-\in< x<c+\in\}$$

اذا كانت $a_1,a_2\in R$ بحيث ان $a_1\neq a_2$ فيوجد $\in_1>0,\in_2>0$ بحيث

ان $N(a_1,\in_1)\cap N(a_2,\in_2)=\emptyset$ ؟

الحل / بما ان $a_1\neq a_2$

$$|a_1-a_2|>0$$

لتكن $\in=\in_1=\in_2=\frac{1}{3}|a_1-a_2|$

نفرض ان $N(a_1,\in)\cap N(a_2,\in)=\emptyset$

$$x\in N(a_1,\in)\cap N(a_2,\in)$$

$$x\in N(a_1,\in)$$

$$x\in N(a_2,\in)$$

$$|x-a_1|<\in$$

$$|x-a_2|<\in$$

$$\begin{aligned}|a_2-a_1|&=|a_1-x+x-a_2|\\&\leq|a_1-x|+|x-a_2|\\&=|x-a_1|+|x+a_2|\end{aligned}$$

$<\in +\in$

$= 2 \in$

$|a_1 - a_2| < 2 \in$

$|a_1 - a_2| < 2\left(\frac{1}{3}\right)|a_1 - a_2| \Rightarrow 1 < \frac{2}{3} < 1$

تعريف جوار محذوف النقطة

مجموعـــة النقـــاط x التـــي تنتمـــي الـــى N(a , ∈) حيـــث $x \neq a$ ويرمـــز لهـــا

بـــالرمز $N^*(a,\in)$ حيـــث نلاحـــظ ان $N^*(a,\in) = N(a,\in)/\{a\}$ وان $N^*(a,\in) =$

$(a{-}\in,a) \cup (a,a{+}\in)$

$N^*\left(1,\frac{10}{100}\right) = \left(1-\frac{1}{100},1\right) \cup \left(1,1+\frac{1}{100}\right)$ or $N\left(1,\frac{1}{100}\right)/\{1\}$

العنصر الملاصق Cluster point

يســـمى العـــدد الحقيقـــي a عنصـــراً ملاصـــقاً للمجموعـــة A اذا وفقـــط

كان $N^*(a,\in) \cap A \neq \emptyset$ لكل $\in > 0$

مثال / $A = [0,2]$, $A = \{X: 0 < X \leq 2\}$

0 ⟵ عنصر ملاحق $\qquad N(0,\in)/\{0\} \cap [0,2] \neq \emptyset \qquad a = 1$

2 ⟵ عنصر ملاحق $\qquad N(2,\in)/\{2\} \cap [0,2] \neq \emptyset \qquad a = 2$

مثال / جد العنصر الملاحق $A = \{1,2,3,4\}$

الحـــل / نلاحـــظ ان ايـــاً مـــن هـــذه العناصـــر ليســـا ملاحقـــة للمجموعـــة A وذلـــك

لان $N\left(1,\frac{1}{10}\right) \cap A = \emptyset$ ، وهـذا يصـح لبقيـة العناصـر اذن العناصـر الملاحقـة

للمجموعة هي $\emptyset$.

تعريف المجموعة المشتقة

المجموعـة التـي عناصـرها كـل النقـاط الملاحقـة للمجموعـة A تسـمى مجموعـة مشـتقة

للمجموعة A ويرمز لها بالرمز $\overline{A}$.

مثال / $A = \{X: 1 < X < 2\}$ نلاحظ ان كل نقاط المجموعة هي ملاحقة لها وكذلك 1,2

فان $\overline{A} = \{X: 1 < X < 2\}$ ، $\overline{A} = \{1,2\}$.

تعريف المجموعة المغلقة او انقلاب المجموعة A او Closure

تسمى المجموعة مع مشتقتها بغلق المجموعة A ويرمز لها بـ $\overline{A}$ أي ان $\overline{A} = A \cup \overline{A}$

مثال / لتكن $A = \{X: 1 < X < 2\}$ جد مجموعة المشتقة لـ A

الحل / بما ان $\overline{A} = \{X: 1 < X < 2\}$ $\overline{A} = \{1,2\}$

$$\overline{A} = A \cup \overline{A} = \{X: 1 < X < 2\} \cup \{X: 1 \leq X \leq 2\} = [1,2]$$

تعريف المجموعة المغلقة

تسـمى المجموعـة المغلقـة اذا وفقـط اذا كانـت تحتـوي علـى جميـع نقاطهـا الملاصـقة أي

تكون A

مغلقة اذا وفقط اذا كان $\overline{A}$ مجموعة جزئية من A .

تعريف العنصر المعزول Lsolated

وهو العنصر الذي ينتمي الى المجموعة ولا يكون ملاحقاً لها .

<u>مثال</u> / عناصر المجموعات الاتية عناصر معزول

$$N = \{1,2,3,\dots\}$$

$$A = \left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots\right\}$$

تعريف المجموعة معزولة العناصر او مجموعة متفردة Discreteset

يقال للمجموعة التي عناصرها عناصر معزولة فقط بانها متفردة او معزولة

فالمجموعتان A, N مجموعتان متفردتان .

تعريف المجموعة الكثيفة بنفسها Dense in itself

يقال للمجموعة التي عناصرها عناصر ملاحقة لها مجموعة كثيفة بنفسها اي تكون A

كثيفة بنفسها اذا كان A مجموعة جزئية من $\overline{A}$.

مثال /

١. $(2,4)$
٢. مجموعة الاعداد النسبية $\emptyset$
٣. R

جميعها مجاميع كثيفة بنفسها لان كل عنصر من عناصرها هو عنصر ملاحق لها

تعريف المجموعة التامة Perfect

هي المجموعة الكثيفة بنفسها والمغلقة .

<u>مثال</u> / المجموعة $[0,1]$ مجموعة تامة وكذلك R .

تعريف المجموعة المفتوحة

تكون المجموعة مفتوحة اذا كانت مكملتها مغلقة .

مثال / تكون R مفتوحة لان $\emptyset$ مغلقة .

وكذلك تكون R مغلقة لان $\emptyset$ مفتوحة اذن R و $\emptyset$ مفتوحة و مغلقة في ان واحد .

تعريف نقطة داخلية للمجموعة Interior point A

تكون النقطة x نقطة داخلية اذا وجد جوار لها بحيث ان $N(x,\in) \subset A$ ويرمز لها بالرمز A° .

مثال / كل نقطة من نقاط الفترة المفتوحة $(1,2)$ هي نقطة داخلية لها وكذلك كل نقطة من نقاط المجموعة المفتوحة A هي نقطة داخلية للمجموعة A .

تعريف النقطة الخارجية بالنسبة للمجموعةA Exterior points of A

تكون النقطة x نقطة خارجة بالنسبة للمجموعة A اذا وجد جوار للنقطة x بحيث ان $N(x,\in) \subset A^C$ ويرمز لها بالرمز $Ext(A)$.

مثال / لتكن $A = \{1,2,3,4,5\}$ فان كل نقطة من نقاط R/A هي نقطة خارجية بالنسبة للمجموعة A لاننا نستطيع ايجاد جوار لها لا يتقاطع مع A .

تعريف النقطة الحدودية بالنسبة للمجموعةA Boundary point

اذا كان كل جوار للنقطة يحقق الشرطين التاليين

$N(x,\in) \cap A \neq \emptyset , N(x,\in) \cap A^c \neq \emptyset$

<u>مثال</u> / ليكن $A = (0,1)$ نلاحظ ان أي جوار للنقطة 0 وللنقطة 1 يتقاطع كلا من A^C, A

لذلك فان مجموعة نقاط الحدود هي $\{0,1\}$.

<u>مبرهنة</u> / اتحاد عدد فئة من المجموعات المغلقة يكون مجموعة مغلقة

n من المجموعات المغلقة $F_1,F_2,\ldots\ldots,F_n$

البرهان مجموعة مغلقة $\cup_{i=1}^{n} f_i$

لذلك $_1^c, F_2^c, F_3^c, \ldots \ldots$ n من مجموعات مفتوحة

مجموعة مفتوحة $\cap_{i=1}^{n} \; _i^c$

قانون ديموركان $\cap_{i=1}^{n} f_i^c = (\cup_{i=1}^{n} f_i)^c$

مجموعة مغلقة $\cup_{i=1}^{n} \; _i$ $\Longrightarrow$ مجموعة مفتوحة $(\cup_{i=1}^{n} f_i)^c$

نظرية / تقاطع عدد منته من المجموعات المفتوحة يكون مجمعة مفتوحة

الحل / لتكن

عدد منته من المجموعات المفتوحة A1,A2,……,An

nالمجموعات المفتوحة

البرهان مجموعة مفتوحة $A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$

لتكن $A = \emptyset$

اذا كانت $A \neq \emptyset$على الأقل يوجد عنصر واحد موجود في كل المجاميع

$X \in A_i \quad \leftarrow \quad X \in A$

$\forall_i = 1,2,3, \dots \dots$

$\exists \in_1, \in_2, \dots \dots, \in_n$

$N(x, \in_1) \in A_1 , N(x, \in_2) \in A_2 \dots \dots \dots \dots N(x, \in_n) \in A_n$

$\in = \min(\in_1, \in_2, \in_3, \dots \dots)$

$N(x, \in) \subset A_1 \;,\; N(x, \in) \subset A_2 \;,\; \dots\dots\dots \;,\; N(x, \in) \subset A_n$

$\bigcap_{i=1}^{n} A_I = N(x, \in)$ مفتوحة . م

المجموعات والمجموعات الجزئية

بالرغم من ان الشائع في الرياضيات اعتبار كل مجموعة set وعنصر element مصطلح غير معروف undefined term الا انه من المفيد إعطاء تفسير حسي لهذين المصطلحين تمهيداً لدراسة اهم المفاهيم المرتبطة بهما .

يمكن وصف المجموعة على انها أي تجمع ((واضح التعريف)) لعناصر مميزة حيث بعبارة وتجميع واضح التعريف تعني انه يسهل علينا البت بشكل قاطع ما اذا كان أي شيء بلا تحديد هو من هذا التجميع ام لا بينما بعبارة (عناصر مميزة) تعني انها عناصر يمكن التمييز بين واحد والأخر .

نرمز للمجموعات عادة بالحروف اللاتينية الكبيرة C/B/A

ونركز لعناصر المجموعات بالحروف اللاتينية الصغيرة c/b/a

ونستخدم الرمز $x \in A$ ليؤدي معنى عبارة (ان X ينتمي الى A)

١. تعريف المجموعة الجزئية Subset

يقال للمجموعة B بانها مجموعة جزئية من مجموعة A اذا كان كل عنصر ينتمي الى المجموعة B هو أيضا ينتمي الى المجموعة A ونعبر عن هذه الحالة بالرمز $B \subseteq A$ ونقول ان B محتواة في A او A تحوى B .

٢. تعريف المجموعتان المتساوتين

نقول ان المجموعتين B,A متساويتان ونكتبها A=B اذا كانت $A \subseteq B$ وكذلك $B \subseteq A$ بعبارة أخرى المجموعتان *B,A* متساويتان اذا كانتا تحتوي على نفس العناصر .

٣. تعريف مجموعة الجزئية الفعلية *Proper*

اذا كانت $A \subseteq B$ ولكن $A \neq B$ فعندئذ نقول ان B مجموعة جزئية فعلية من A ونعبر عن هذه الحالة $A \subset B$

٤. المجموعة الاسية Power set

مجموعة كل المجموعات الجزئية لمجموعة ما مثل A تسمى مجموعة اسية للمجموعة A ويستخدم لها الرمز P(A) او 2^A

٥. المجموعة الخالية Empty set

وهي المجموعة التي لا تحتوي على اية عناصر ويرمز لها بالرمز Ø

٦. المجموعة الشاملة Universal set

وهي جميع المجاميع ويرمز لها بالرمز U وهنالك عدة طرق للتعبير عنها

١. التعبير المباشر : مثل القول ان A هي مجموعة الجامعات العراقية عام ١٩٨٠ .

٢. كتابة عناصر المجموعة واغلاقها بقوسين بالشكل التالي

{جامعة بغداد ، جامعة الموصل ، جامعة البصرة ، الجامعة التكنولوجية }

٣. التعبير الرمزي : حيث نختار رمز يعطي الصفة المميزة لعناصر المجموعة بالشكل التالي :

A={ X:X جامعة العراقية عام ١٩٨٠ }

يستعمل الرمز $\forall$ ...... معناه لكل .... $\forall x \in A$

يستعمل الرمز $\exists$ ...... هنالك او يوجد .... $\exists x \in A$

عمليات على المجموعات

لتكن كل من B,A مجموعة

١. التقاطع Intersection : مجموعة كل العناصر التي تنتمي الى A وكذلك الى B ويرمز لها بالرمز $A \cap B$ بعبارة أخرى $\{x \in B, x \in A: x\} = A \cap B$

٢. الاتحاد union : مجموعة كل العناصر التي تنتمي الى المجموعة A او المجموعة B ويستعمل لها هذا الرمز $A \cap B$ أي ان

$$\{x \in B \ or \ x \in A: x\} = A \cap B$$

٣. المتممة Complement

اذا كانت A مجموعة جزئية من مجموعة شاملة U فان مجموعة كل العناصر التي تنتمي الى U ولا تنتمي الى A تسمى متممة ويستعمل لها هذا الرمز U/A او A^C أي ان

$\{x \notin A, x \in U: x\} = U/A$

٤. المجموعة المؤشرة indexing set

لتكن Λ مجموعة ولنفرض ان $\lambda \in \Lambda$ توجد مجموعة جزئية A_λ من مجموعة شاملة U ويقال لعائلة هذه المجموعات الجزئية بانها مؤشرة من قبل Λ وتكتب على شكل $\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ او $\{A_\lambda\}\lambda \in \Lambda$

ونعبر عن تقاطع هذه المجموعات على شكل

$$\bigcap \{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \qquad \text{او} \qquad \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$$

اما اتحادها فنعبر عنه على شكل

$$\bigcup \{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \qquad \text{او} \qquad \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$$

<u>مبرهنة</u> / اذا كانت كل من X,C,B,A مجموعة فان

1. $X \backslash (X \backslash A) = A \cap X$

2. $B \cup A = A \cup B$

$B \cap A = A \cap B$

خاصية التبديل
Commnlitive

3. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

خاصية التجميع
associative

4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

خاصية التوزيع
distribntive

5. $X \backslash (A \cup B) = (X \backslash A) \cap (X \backslash B)$

$X \backslash (A \cap B) = (X \backslash A) \cup (X \backslash B)$

قانون ديمورغان
De Morgan laws

الفصل الثاني

قبل ان نبدأ بتعريف التبولوجي والفضاء التبولوجي سنستذكر تعريف مجموعة القوى

مجموعة القوى powersets

لتكن x مجموعة ما غير خالية نعرف مجموعة القوى على المجموعة x بأنها مجموعة كل المجموعات الجزئية من المجموعة x ويرمز لها بالرمز p(x) .

ملاحظة / اذا كان عدد عناصر المجموعة x يساوي n فيكون عدد عناصر المجموعة p(x) يساوي 2^n .

مثال / لتكن $x = \{1,2\}$ احسب p(x)

الحل / نلاحظ عدد عناصر x يساوي 2 فان عدد عناصر p(x) يساوي $A = 2^2$

اذن $P(X) = \{X, \emptyset, \{1\}, \{2\}\}$

مثال / لتكن $x = \{1,2,3\}$ احسب p(x)

الحل / نلاحظ عدد عناصر x يساوي 3 فان عدد عناصر p(x) يساوي $2^3 = 8$

اذن $P(X) = \{X, \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$

وهكذا لاي مجموعة نستطيع ان نجد مجموعة القوى .

المستخلص // سنقدم في هذا الباب مفهوم الفضاء التبلوجي ثم نتعرض لبعض أنواع الفضاءات التبولوجية ثم ندرس المفاهيم الأساسية المتعلقة بالفضاء التبلوجي ونسوق بعض الأمثلة التي توضح هذه المفاهيم .

الفضاء التبولوجي Topological spaces

نفرض ان x مجموعة غير خالية ونفرض T تجمع من المجموعات الجزئية من X التي تحقق الشروط الاتية

1. $X, \emptyset \in T$
2. $IF\ A, B \in T \qquad A \cap B \in T$
3. $IF A_i \in T \qquad \cup_{i=1}^{\infty} A_i \in T$

نلاحظ ان

١. الشرط الأول يعني ان T تحتوي X , $\emptyset$.

٢. الشرط الثاني يعني ان تقاطع عنصرين من عناصر T يعطي عنصراً في T .

٣. الشرط الثالث يعني ان اتحاد أي عدد من عناصر T يعطي عنصراً في T .

تسمى T توبولوجي Topology على X ويسمى الزوج المرتب (X, T)فضاء توبولوجي واختصاراً نقول ان X فضاء تبولوجي ويسمى كل عنصر في T مجموعة مفتوحة Open set

ملاحظة /

١. يتضح من التعريف ان

$\mathrm{T} \subseteq P(X), T \in P\big(P(X)\big)$

U مجموعة مفتوحة $\Leftrightarrow U \in T$

٢. نرمز P(X) الى مجموعة القوة للمجموعة X والتي تعرف على النحو التالي

$P(X) = \{U : U \subseteq X\}$

٣. الشرط الثاني يكافئ القول بان تقاطع عدد فمنته من عناصر T هو عنصر في T أي

ان $A_1, A_2, \dots\dots, A_n \in T \implies A_1 \cap A_2 \cap \dots\dots \cap A_n \in T$

مثال / لتكن $x = \{a, b\}$ فان التجمعات التالية تشكل بتولوجي على x

1. $T_1 = \{x, \emptyset\}$
2. $T_2 = \{x, \emptyset, \{a\}\}$
3. $T_3 = \{x, \emptyset, \{b\}\}$
4. $T_3 = \{x, \emptyset, \{a\}, \{b\}\} = P(X)$

مثال / لتكن $x = \{a, b, c\}$ ، $T = \{x. \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

اولاً : هل T تبولوجي على X ؟

الحل / نعم تمثل وذلك لتحقيق شروط الفضاء التبولوجي الثلاثة حيث

١. $X, \emptyset \in T$

٢. اتحاد أي عنصر من عناصر T يكون عنصراً في T

٣. تقاطع أي عنصرين من عناصر T يكون عنصراً في T

ثانياً : هل المجموعة $\{a, b\}, \{a, c\}, \{c\}$ مجموعة مفتوحة ؟

الحل / $\{a, c\}, \{c\}$ ليس مجموعات مفتوحة لانهما لا ينتميان الى T لكن المجموعة $\{a, b\}$ مجموعة مفتوحة لانها تنتمي الى T .

مثال / بين أي المجموعات التالية تشكل تبولوجي على المجموعة $x = \{1,2,3\}$

1. $T_1 = \{x, \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

2. $T_2 = \{x, \emptyset\}$

3. $T_3 = P(X) = \{x, \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$

4. $T_4 = \{\emptyset, \{1\}, \{1,3\}\}$

5. $T_5 = \{x, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

6. $T_6 = \{x. \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,3\}\}$

الحل /

١. T_3, T_2, T_1 تشكل تبولوجي على X تحقيق الشروط الثلاثة ويسمى $T_2 = \{X, \emptyset\}$ بالتبولوجي الغير متقطع Indiscrete topology و $T_2 = p(x)$ بالتبلوجي المتقطع discrete topology ومن ثم فان كل من $(x, T_1), (x, T_2), (x, T_3)$ تشكل فضاء تبولوجي .

٢. T_4 لا تشكل تبولوجي على x وذلك لان $X \in T_4$ أي ان T_4 لا تحقق الشرط الأول من التعريف .

٣. نلاحظ ان T_5 لا تشكل تبولوجي على X لان $\emptyset \in T_5$ أي ان T_5 لا تحقق الشرط الاول من التعريف .

٤. T_6 لا تشـــــــكل تبولـــــــوجي علــــــى X لان $\{1\},\{2\} \in T_6$ لكـــــــن

$T_6 \notin \{1,2\} = \{2\} \cup \{1\}$ أي ان T_6 لا تحقق الشرط الثاني من التعريف .

<u>نستنتج</u> // من المثال انه نستطيع ان نجد اكثر من تبولوجي على المجموعة الواحدة .

<u>مثال</u> / جد جميع التبولوجيات الممكنة على المجموعة $x = \{a, b\}$

الحل / اولاً نجد $p(x) = \{x, \emptyset, \{a\}, \{b\}\}$ ، وعليه :

1. $T_1 = \{x, \emptyset\}$ Indiscrete topology
2. $T_2 = \{x, \emptyset, \{a\}, \{b\}\}$ discrete topology
3. $T_3 = \{x, \emptyset, \{a\}\}$
4. $T_3 = \{x, \emptyset, \{b\}\}$

<u>مثال</u> / لتكن $x = \{a, b, c, d\}$ بين أي من التجمعات التالية تشكل تبولوجي على x

1. $T_1 = \{x, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$
2. $T_2 = \{x, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{b, d\}, \{a, b, d\}\}$
3. $T_3 = \{x, \emptyset, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, d\}, \{a, b, c\}\}$
4. $T_4 = \{x, \emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \{b, c, d\}\}$

<u>الحل</u> /

١. واضـــــح ان T_1 لا تشـــــكل تبولـــــوجي علـــــى x لان $\{a, b\}, \{b, c\} \in T_1$ ولكـــــن

$T_1 \notin \{a, b, c\} = \{b, c\} \cup \{a, b\}$ أي ان T_1 لا تحقق الشرط الثالث .

٢. T_2 تشكل توبولوجي على x لان T_2 تحقق الشروط الثلاثة وبذلك يكون (x, T_2) فضاء تبولوجي .

٣. T_3 لا تشـــــكل تبولـــــوجي علـــــى x لان $\{a, b\}, \{a, c\} \in T_3$ ولكـــــن

$\{a, b\} \cap \{a, c\} = \{a\} \notin T_3$

٤. T_4 تشكل تبولوجي على x لان T_4 تحقق جميع الشروط .

تعريف / حيث ان رتبة المجموعة هي عدد عناصرها فان رتبة التبولوجي المكون من عدد منته من العناصر هي عدد العناصر المكونه له .

كما في الأمثلة السابقة في المثال (١) ان رتبة T_1 هي 2 ورتبة T_2 هي 3 ورتبة T_4 هي 4 والمثال (٢) رتبة T_4 هي 6 .

مثال / لتكن $x = \{a, b, c\}$

1. $T_1 = \{\emptyset, x, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ T_1 تبولوجي على x

2. $T_2 = \{\emptyset, x, \{a\}\}$ T_2 تبولوجي على x

3. $T_3 = \{\emptyset, x, \{a, c\}\}$ T_3 تبولوجي على x

4. $T_4 = \{\emptyset, x, \{a\}, \{b\}\}$ T_4 تبولوجي على x

ملاحظة / ان تقاطع أي تبولوجي على x يكون تبولوجي كذلك على x ومثال على ذلك .

مثال / تقاطع T_3, T_1

$T_1 \cap T_3$

$T_1 = \{\emptyset, x, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

$T_3 = \{\emptyset, x, \{a, c\}\}$

$T_1 \cap T_3 = \{\emptyset, x\}$

الشروط //

1. $x, \emptyset \in T_1 \cap T_2$
2. $\emptyset \cap x = \emptyset$ فضاء تبولوجي $x, T_1 \cap T_3$
3. $x \cup \emptyset = \{x, \emptyset\}$ تبولوجي على x T

لتكن x مجموعة غير خالية فان تقاطع أي عدد من التبولوجيات على x يكون تبولوجي على x .

البرهان / لتكن أي عدد من التبولوجيات المعرفة على x .... T_1, T_2, T_3

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} T_i$$ لاثبات

1. $\mathrm{x}, \emptyset \in T_i \forall_i$ بتولوجيات على x T_i

$$\mathrm{x}, \emptyset \in \bigcap_{i=1}^{\infty} T_i$$

2. $A_1, A_2 \in \cap_{i=1}^{\infty} T_i \Longrightarrow A_1 \cap A_2 \in \cap_{i=1}^{\infty} T_i$

$A_1, A_2 T_i \forall_i \Longrightarrow A_1 \cap A_2 \in T_i$

$$\therefore A_1 \cap A_2 \in \cap_{i=1}^{\infty} T_i$$

3. $A_S \in \cap_{i=1}^{\infty} T_i \Longrightarrow \cup_{i=1}^{\infty} A_S \in \cap_{i=1}^{\infty} T_i$

$A_S \in T_i \forall_i$

$\cup A_S \in T_i \forall_i$

$$\therefore \cup A_S \in \bigcap_{i=1}^{\infty} T_i$$

∴ تقاطع عدد من التبولوجيات على x يكون تبولوجي على x .

ملاحظة / اتحاد تبولوجي ليس ضروري ان يكون تبولوجي على x ومثال على ذلك .

مثال / $T_2 \cup T_4$

$T_2 = \{\emptyset, x, \{a\},\}$

$T_4 = \{\emptyset, x, \{b\}\}$

$T_2 \cup T_4 = \{\emptyset, x, \{a\}, \{b\}\}$

1. $x, \emptyset \in T_2 \cup T_4$

2. $x \cap \emptyset = \emptyset \in T_2 \cup T_4$

$x \cap \{a\} = \{a\} \in T_2 \cup T_4$

$\{a\} \cap \emptyset = \emptyset \in T_2 \cup T_4$

$\{b\} \cap \{a\} = \emptyset \in T_2 \cup T_4$

$x \cap \{b\} = \{b\} \in T_2 \cup T_4$

3. $x \cup \emptyset = x \in T_2 \cup T_4$

$x \cup \{a\} = x \in T_2 \cup T_4$

$x \cup \{b\} = x \in T_2 \cup T_4$

$\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\} \notin T$

x ليس تبولوجي على $T_2 \cup \ T_4$

(x, T) ليس فضاء تبولوجي

المجموعة المفتوحة OPEN SET

ليكن (X,T) فضاءاً تبولوجياً كل مجموعة من التبولوجيا T تدعى مجموعة مفتوحة ان عناصر T هي المجموعة المفتوحة في الفضاء التبولوجي (X,T) .

تعريف مكافئ لتعريف التبولوجي

لتكن X مجموعة غير خالية و T عائلة من مجموعات جزئية من X ، T تبولوجيا على X اذا وفقط اذا حققت الخصائص التالية :−

١. كلا من $X, \emptyset$ مجموعات مفتوحة .

٢. تقاطع أي عدد منتهي من مجموعات مفتوحة يكون مجموعة مفتوحة .

٣. اتحاد أي عدد من مجموعات مفتوحة يكون مجموعة مفتوحة .

مثال / لتكن $x = \{a, b, c\}$ ، $T_1 = \big\{\emptyset, x, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\big\}$

س/ هل المجموعات $\{a, b\}, \{a, c\}, \{c\}$ هي مجاميع مفتوحة

$1. \ \{c\} \notin T$ مجموعة غير مفتوحة

$2. \{a, c\} \notin T$ مجموعة غير مفتوحة

$3. \{a, b\} \in T$ مجموعة مفتوحة

ان عائلة كل المجموعات المغلقة في أي فضاء تبولوجي (X,T) تحقق الخصائص التالية :

١. كلا من $X, \emptyset$ مجموعات مغلقة .

٢. اتحاد أي عدد منتهي من مجموعات مغلقة يكون مجموعة مغلقة.

٣. تقاطع أي عائلة عدد من مجموعات مغلقة يكون مجموعة مغلقة.

البرهان /

١. X مجموعة مغلقة لان $x^c = \emptyset$ مجموعة مفتوحة .

٢. $\emptyset$مجموعة مغلقة لان $\emptyset = {}^c$ مجموعة مفتوحة .

٣. A,B مجموعة مغلقة نبرهن $A \cup B$مجموعة مغلقة و $(A \cup B)^C$ مفتوحة .

$(A \cup B)^C = (A \cap B)^C$

لذلك $^C, B^C$ مجموعة مفتوحة .

لذا فان $^C \cup B^C$ مفتوحة (من خصائص المجموعة المفتوحة) .

اذا $(A \cup B)^C$ مفتوحة ، $A \cup B$ مغلقة .

٤. لتكن $_\lambda$ مغلقة لكل λ ونبرهن $\cap_\lambda A_\lambda$ مغلقة

دي موركان $(\cap_\lambda A_\lambda) = \cup_\lambda A_\lambda$

اذن A_λ^C مفتوحة لكل λ

لذلك A_λ^C $\cup_\lambda$ مجموعة مفتوحة (من خصائص المجموعات المفتوحة)

$(\cap_\lambda A_\lambda)^C$ مفتوحة

لذلك $(\cap_\lambda A_\lambda)^C$ مغلقة

المجموعات المغلقة Closed set

ليكن (X,T) فضاء تبولوجي $A \subseteq X$ يقال بان A مجموعة مغلقة في الفضاء X اذا كانت A^C مجموعة مفتوحة $A^C \in T$.

مثال / لتكن $x = \{1,2,3\}$ ، $T = \{\emptyset, x, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

بين المجموعات الاتية اذا كانت مفتوحة او مغلقة $\{1,3\}, \{1\}, \{3\}$

مجموعة غير مفتوحة	$\{3\} \notin T$
مجموعة مغلقة	$\{3\}^C = \{1,2\} \in T$
مجموعة مفتوحة	$\{1\} \in T$
مجموعة غير مغلقة	$\{1\}^C = \{2,3\} \notin T$
مجموعة غير مفتوحة	$\{1,3\} \notin T$
مجموعة مغلقة	$\{1,3\}^C = \{2\}$

أنواع الفضاءات

١. الفضاء المنفصل المنقطع $\boldsymbol{T = P(X)}$

$(X, P(X))$

$x = \{a, b\}$

$T = P(X) = \{\emptyset, x, \{a\}, \{b\}\}$

٢. الفضاء الغير منفصل غير المنقطع $\boldsymbol{(X, I)}$

$x = \{a, b, c\}$

$I = T = \{\emptyset, x, \{a\}, \{b\}\}$

٣. فضاء المكملات المنتهية$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{C})$

$C = T = \{\emptyset, U \subseteq X, U^c$منتهية$\}$

$= \{\emptyset, U \subseteq X, |x - U| < \infty\}$

ابرهن على ان (X, C) فضاء تبولوجي :

١. $\emptyset \in T$

منتهية $x^c = \emptyset$ و $x \subseteq x$

$\therefore x \in T$

٢. $U_1, U_2 \in T$ ابرهن $U_1 \cap U_2 \in T$

$U_1 \in T \implies U_1 \subseteq X, U_1^c$ منتهية

$U_2 \in T \implies U_2 \subseteq X, U_2^c$ منتهية

$U_1^c \cup U_2^c$منتهية

$U_1^c \cup U_2^c \longrightarrow (U_1 \cap U_2)^c$منتهية

$\therefore = (U_1 \cap U_2)^c$منتهية

$\therefore = U_1 \cap U_2 \in T$ منتهية

٣. الاتحاد $i = 1,2,3, \dots \dots \dots$ $U_i \in T$ ابرهن $\cup U_i \in T$

$U_i \in T \implies U_i \in X, U_i^c$ منتهية

$\cap U_i^c$ منتهية

$\cap U_i^c = (\cup U_i)^c$ منتهية

$\therefore \cup U_i \in T$

(X, C) فضاء تبولوجي

٤. فضاء المكملات القابلة للعد

$T = \left\{\emptyset, A \subseteq X, A^c \text{ قابلة للعد}\right\}$

لبرهان ان هذا يمثل فضاء تبولوجي

١. $\emptyset \in T$

قابلة للعد $x^c = \emptyset$ و $\mathrm{x} \subseteq x$

$\therefore \mathrm{x} \in T$

٢. $U_1, U_2 \in T$ ابرهن $U_1 \cap U_2 \in T$

$U_1 \in T \implies U_1 \subseteq X , U_1^c$ قابلة للعد

$U_2 \in T \implies U_2 \subseteq X , U_2^c$ قابلة للعد

$U_1^c \cup U_2^c$ قابلة للعد

$U_1^c \cup U_2^c \longrightarrow (U_1 \cap U_2)^c$

$\therefore U_1 \cap U_2 \in \mathrm{T}$

٣. الاتحاد $i = 1,2,3, \dots \dots \dots$ $U_i \in \mathrm{T}$ ابرهن $\cup U_i \in \mathrm{T}$

$U_i \in T \implies U_i \in X , U_i^c$ قابلة للعد

$\cap U_i^c$ قابلة للعد

$\cap U_i^c = (\cup U_i)^c$ قابلة للعد

$\therefore \cup U_i \in T$

٥. الفضاء التبولوجي الاعتيادي (R,T)

$T = \{\cup \subseteq R, \forall X \in \cup\, \exists \delta > 0, s.t(x + \delta, x - \delta) \subseteq \cup\}$

١. $\mathrm{R}, \emptyset \in T$ من التعريف

٢. لتكن $A, B \in T$ البرهان $A \cap B \in T$

لذلك $A(a,b) \qquad a,b \in R$

$B(c,d) \qquad c,d \in R$

اذا كان $A \cap B = \emptyset \in T$

اما اذا كان $A \cap B \neq \emptyset$

$(a,b) \cap (c,d) = (k,h)$

$k = \max\{a,c\} \in R$

$h = \max\{b,d\} \in R$

$\therefore \mathrm{A} \cap \mathrm{B} \in T$

٣. الاتحاد

$\mathrm{A}_i \in T \qquad \mathrm{i} \in T \longrightarrow \cup_{\mathrm{i} \in T} \mathrm{A}_i \in T$

$\mathrm{A}_i = (a_i, b_i) \qquad a_i, b_i \in R$

$$\bigcup_{\mathrm{i}=1} \mathrm{A}_i = \bigcup_{\mathrm{i}=1} (a_i, b_i) = (k,h)$$

$k = \min a_i \qquad i \in l \in R$

$h = \min b_i \qquad i \in l \in R$

$\therefore \cup_{\mathrm{i}=1} \mathrm{A}_i \in T$ فضاء التبولوجي (R,T)

<u>ملاحظة</u> / يمكن اتخاذ المجموعات المغلقة كمفهوم أساسي لتعريف الفضاءات التبولوجية كما اتخذنا المجموعات المفتوحة مفهوم أساسي لتعريف الفضاءات التبولوجية .

أمثلة هامة للفضاءات التبولوجية Important example of topological spaces

١. الفضاء المنفصل او المتقطع Discrete space

نفرض ان X مجموعة غير خالية T=P(X) هي مجموعة جميع المجموعات الجزئية من X من الواضح ان T تشكل تبولوجي على X يسمى التبولوجي بالتبولوجي المنفصل وهو أوسع (اكبر او اقوى) تبولوجي يعرف على X ويسمى (X,T) بالفضاء المنفصل ويرمز له بالرمز (X,D) .

ملاحظة / يجب ان نلاحظ هنا ان الفضاء المنفصل (X,D) ينفرد بخاصية هامة جداً وهي تطابق مجموعاته المفتوحة مع مجموعاته الجزئية من X أي ان كل مجموعة جزئية من X هي مجموعة مفتوحة .

٢. الفضاء الغير منفصل (غير المنقطع) Indiscrete space

نفرض ان X مجموعة غير خالية $T = \{x, \emptyset\}$ اذا T تشكل تبولوجي على X يسمى هذا التبولوجي بالتبولوجي الغير منفصل وهو اصغر توبولوجي يعرف على X ويسمى (X,T) بالفضاء الغير المنفصل ويرمز له بالرمز (X,I) .

٣. فضاء المكاملات المنتهية Confinite topological space

نفرض ان X مجموعة لا نهائية ونفرض

$T = \{\emptyset, U \subseteq X : U^c \text{ Finite}\}$

$T = \{\emptyset, U \subseteq X : |x - U| < \infty\}$

أي ان T هي عائلة كل المجموعات الجزئية من X والتي مكملاتها تكون منتهية بالإضافة الى المجموعات الخالية Ø ويسمى هذا التبولوجي بالتبولوجي المكملات المنتهية ويسمى الزوج (X,T) بفضاء المكملات المنتهية Confinite topological space وسوف نرمز لهذا الفضاء بالرمز (x,c) .

٤. فضاءالمكملات القابلة للعد Complement countable space

نفرض ان X مجموعة غير خالية ونفرض

$$T = \left\{\emptyset, A \subseteq X : A^c \text{ is countable قابلة للعد}\right\}$$

واضح ان T تشكل توبولوجي على X

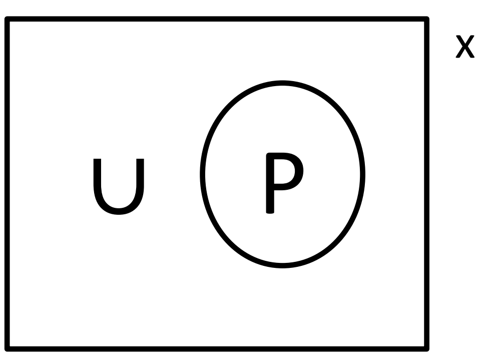
٥. فضاء تبولوجي النقطة المختارة particular point topology

نفرض ان X مجموعة غير خالية $p \in x$ ونفرض

$$P = \{\emptyset, U \subseteq X : p \in U\}$$

وتكون P تبولوجي على X ويسمى تبولوجي النقطة المختارة ويسمى الزوج (X,P) فضاء

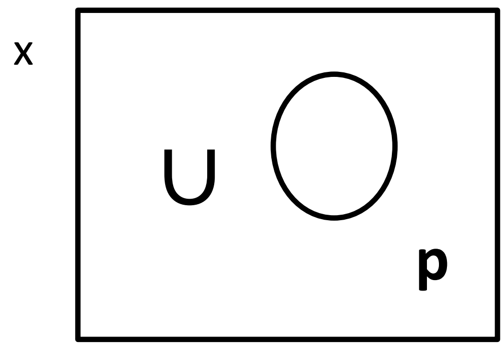
النقطة المختارة particular point topology



٦. فضاء تبولوجي النقطة المستبعدة Excluding point topological space

نفرض ان X مجموعة غير خالية x $p \in x$ ونفرض

$x = \{x_1 \subseteq X : p \notin U\}$



ويسمى هذا التبولوجي بـ التبولوجي النقطة المستبعدة ويسمى الزوج (X,E) فضاء المستبعدة .

٧. الفضاء التبولوجي العادي (الطبيعي او المعتاد او الاقليدي)

Usual topoloigical spaces

$T = \{U \subseteq R : \forall X \in U \; E\delta > 0 \text{ snch that } (x-\delta, x+\delta) \subseteq U\}$

T هي مجموعة من المجموعات الجزئية U من R التي تحقق ان لكل X ∈U توجد فترة مفتوحة $(x-\delta, x+\delta)$ حيث ان $(x-\delta, x+\delta) \subseteq U$ ويسمى هذا التبولوجي بـ التبولوجي المعتاد (العادي او الاقليدي) والزوج *(T,R)* يسمى الفضاء العادي ويرمز لها الفضاء بالرمز (R, μ) ان اعتبار μ هي عائلة كل المجموعات الجزئية من R المساوية لاتحاد فترات متفرقة .

النقاط الداخلية ويرمز لها بالرمز A°

$X \supseteq A \leftarrow (X, T)$ فضاء بتولوجياً

$P \in A^{\circ} \leftrightarrow \exists\ U \in T, P \in U$

$P \in U \subseteq A$

<u>مثال</u> / لتكن $x = \{a, b, c, d, e\}$

$T_1 = \left\{\emptyset, x, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\right\}$

وكانت $A = \{b, c, d\} \quad , \quad B = \{c, e\}$

$A^{\circ} =? \ \{c, d\}$

$\mathrm{b} \longrightarrow b \in \{b, c, d, e\} \nsubseteq \{b, c, d\} \qquad \therefore b \notin A^{\circ}$

$\mathrm{c} \longrightarrow c \in \{c, d\} \subseteq \{b, c, d\} \qquad \therefore c \in A^{\circ}$

$\mathrm{d} \longrightarrow d \in \{c, d\} \subseteq \{b, c, d\} \qquad \therefore d \in A^{\circ}$

$B^{\circ} =? \quad \emptyset$

$\mathrm{c} \longrightarrow c \in \{c, d\} \not\subset \{c, e\} \qquad \therefore c \notin B^{\circ}$

$\mathrm{e} \longrightarrow e \in \{b, c, d, e\} \nsubseteq \{c, e\} \qquad \therefore e \notin B^{\circ}$

$\therefore B^{\circ} = \emptyset$

النقاط الخارجية ويرمز لها بالرمز $extA$

$P \in \mathrm{ext(A)}, \exists\ U \in T, P \in U \ , P \in U \subseteq A^c$

<u>مثال</u> / لتكن $x = \{a, b, c, d, e\}$

$T_1 = \left\{\emptyset, x, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\right\}$

وكانت $B = \{c, e\} \quad , \quad A = \{b, c, d\} \quad A, B \subset X$

اوجد $ext(B) \quad , \quad ext(A)$

$A^c = \{a, e\}$

$a \longrightarrow \{a\} \in T \longrightarrow \{a\} \subseteq \{a, e\} \qquad \therefore a \in ext(A)$

$e \longrightarrow \{b, c, d, e\} \in T \longrightarrow \{b, c, d, e\} \nsubseteq \{a, e\} \qquad \therefore e \notin ext(A)$

$$\therefore ext(A) = \{a\}$$

وهنالك طريقة أخرى لايجاد $ext(A)$

$ext(A) = (A^c)^\circ = \{a, e\}^\circ = \{a\}$

$ext(B) \qquad B^c = \{a, b, d\}$

$a \longrightarrow \{a\} \in T \longrightarrow \{a\} \subseteq \{a, b, d\} \qquad \therefore a \in ext(B)$

$b \longrightarrow \{b, c, d, e\} \in T \longrightarrow \{b, c, d, e\} \nsubseteq \{a, b, d\} \qquad \therefore b \notin ext(B)$

$b \longrightarrow \{c, d\} \in T \longrightarrow \{c, d\} \nsubseteq \{a, b, d\} \qquad \therefore c \notin ext(B)$

$$\therefore ext(B) = \{a\}$$

النقاط الحدودية ويرمز لها بالرمز $\boldsymbol{b(A)}$

$b(A) = X - \{A^\circ \cup ext(A)\}$

مثال / لتكن $x = \{a, b, c, d, e\}$

$T_1 = \{\emptyset, x, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$

وكانت $A \subseteq X$ $A = \{b, c, d\}$ اوجد $b(A)$

الحل / لايجاد $b(A)$ يجب إيجاد النقاط الداخلية والخارجية لها وبعد ذلك نجد $b(A)$

1. $A^\circ = \{c, d\}$

$b \longrightarrow \{b, c, d, e\} \in T \longrightarrow \{b, c, d, e\} \nsubseteq \{b, c, d\} \qquad \therefore b \in A^\circ$

$c \longrightarrow \{c, d\} \in T \longrightarrow \{c, d\} \subseteq \{b, c, d\} \qquad \therefore c \in A^\circ$

$d \longrightarrow \{c, d\} \in T \longrightarrow \{c, d\} \subseteq \{b, c, d\} \qquad \therefore d \in A^\circ$

2. ext(A) $A^c = \{a, e\}$

a $\longrightarrow \{a\} \in T \longrightarrow \{a\} \subseteq \{a, e\}$ $\therefore a \in ext(A)$

e $\longrightarrow \{b, c, d, e\} \in T \longrightarrow \{b, c, d, e\} \nsubseteq \{a, e\}$ $\therefore e \notin ext(A)$

$$\therefore ext(A) = \{a\}$$

$$b(A) = X - \{A^{\circ} \cup ext(A)\}$$

$$= X - \{\{c, d\} \cup \{a\}\}$$

$$= \{b, c, d, e\} - \{a, c, d\} = \{b, e\}$$

المصادر

١. مقدمة في التبولوجيا العامة تأليف الدكتور سمير بشير حديد.

٢. التبولوجيا العامة حسن نقار .

٣. التبولوجيا تأليف :

الدكتور محمد جواد سعد الدين .

الدكتور عريبي الزوبعي

الدكتور محمد الجنابي

الدكتور منير العاني

الدكتور بسام الناشق

٤. تبولوجيا الاعداد الحقيقية

الدكتور عريبي حسين الزوبعي

الدكتور محمد جواد سعد الدين

٥. التبولوجي العام General Topology

تأليف أ.د.احمد عبد القادر رمضان

د.طه مسي العدوي