وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة ديالى
كلية تربية المقداد

المعادلات التفاضلية

مشروع بحث مقدم الى جامعة ديالى / كلية تربية المقداد كجزء من متطلبات لنيل شهادة البكالوريوس من كلية التربية المقداد

اعداد الطالبات

فضاء حسن عبد اللطيف **فاطمة طاهر محمد**

بإشراف

م . م . دعاء نصيف

١٤٤٣هـ **٢٠٢٢**

بسم الله الرحمن الرحيم

" وَلَيَنْصُرَنَّ اللَّهُ مَنْ يَنْصُرُهُ إِنَّ اللَّهَ لَقَوِيٌّ عَزِيزٌ ۝ الَّذِينَ إِنْ مَكَّنَّاهُمْ فِي الْأَرْضِ أَقَامُوا الصَّلاةَ وَآتَوُا الزَّكَاةَ وَأَمَرُوا بِالْمَعْرُوفِ وَنَهَوْا عَنِ الْمُنْكَرِ وَلِلَّهِ عَاقِبَةُ "

"صدق الله العظيم "

سورة الحج : آية ٤٠-٤١

الاهداء

- الى الرسول الاعظم محمد (صلى الله عليه واله وسلم)
- الى وطني الذي ليس كمثله وطن (العراق بلد التضحيات)
- الى من جعل الله الجنة تحت اقدامها احب قلب هي (امي)
- الى من تعب شقى لتربيتي وتعليمي وايصالي الى هذا المستوى من العلم هو (ابي)
- الى اخوتي
- الى كل من تمنى لي النجاح و الموفقية
- الى مناهل العلم اساتذتي الافاضل

شكر وتقدير

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على الرسول محمد (صلى الله عليه واله وسلم) . الحمد لله الذي من علينا بإتمام هذا البحث على الخير وبركة وسهل علينا كتابته فله الحمد والمنة . واقدم شكري الى عمادة كلية التربية المقداد. اما مرحلة اختيار العنوان اشكر فيه الاستاذ الفاضل (م . م . دعاء نصيف) على الدقيقة وجواب اختيار العنوان .

كما اقدم شكري الى والى كافة اساتذة قسم الرياضيات . كما اقدم شكري وامتناني الى عائلتي الكريمة التي تحملت معي أعباء الدراسة وهذا البحث المواضع .

المحتويات

المقدمة :-

نشأ موضوع المعادلات التفاضلية مرافقاً لنشؤ موضوع حساب التفاضل والتكامل وتطورا سويا ، وقد كان للعرب فضل كبير في التمهيد لإيجاد حساب التفاضل والتكامل . فقد ثبت ان ابن قرة استعمل نظرية افناء الفرق (theory of Exhaustion) حساب حجم الجسم المتولد من دون القطع المكافئ ، حول محوره وهي تقابل عملي التكامل في حساب الحجوم الدورائية .

وقد الف ابو الفتح عبد الرحمن المنصور الخزاني (الملقب بالخازن) وهو من علماء العرب اللذين عاشوا في النصف الاول من القرن الثاني عشر للميلاد : كتاب ميان الحكمة هو واحد من الكتب الكثيرة التي وصلت الى الاوربيين وترجمت الى لغاتهم ابان عصور النهضة ومهدت في تطور العلوم الحديثة .

لقد جاء في كتاب بميزان الحكمة العلاقة الصحيحة بين السرعة التي يسقط بها الجسم نحو الارض والبعد الذي يقطعه والزمن الذي يستغرقه وهي العلاقات التي ينص عليها القوانين والمعادلات التي نسبت الى غاليلو (١٥٦٤-١٦٤٢) .

وجاء ايضا في كتاب ميزان الحكمة وجود قوة جاذبية على جميع جزيئات الاجسام وهذه القوة تبين صفة ذلك الاجسام وكذلك وجود قوة تجذب هذه الاجسام بأتجاه مركز الارض وان اختلاف قوة الجذب يتبع المسافة بين الجسم الساقط ومركز الارض .

ومن المواضيع الاخرى التي مهدت لأكتشاف التفاضل وبالتالي المعادلات التفاضلية هو الرقاص (بندول الساعة) المنسوب الى غاليلو . لكن ابن يونس المصري المتوفي (عام ١٠٠٩ م) كان قد اخترع الرقاص

واستعمله في الساعات الدقاقة وفي حساب الفترات الزمنية اثناء الرصد .

يتضح من هذا انه كان لهذه المواضيع الف بحثها العرب اثر كبير غير مباشر على اكتشاف موضوع المعادلات التفاضلية فالدقة والتعمق في الدراسة هذه المواضيع العلمية اوجدت المعادلات التفاضلية ومن اجل حلوله تجردت واصبحت موضوعا قائما بذاته دراسة حركة بندول الساعة تؤدي الى معادلة تفاضلي من الرتبة الثانية . وكذلك بالنسبة لقوة الجذب و السرعة والمسافة كلها تؤدي الى معادلات تفاضلية مختلفة .

ولولا العرب لأبتدأ الاوربيون من النقطة التي انتهى بها اليونان (وربما ابعد من ذلك لان العرب حفظت هذا التراث اليونانيين وزادت عليه) ولتأخير عصر النهضة عدة قرون .

تتضمن المعادلات الفاضلية وسائل رياضية مهمة تطبق في مختلف حقول المعرفة فبواسطتها يمكن فهم واستيعاب الكثير من الافكار العلمية في مختلف الفروع .تدخل المعادلات التفاضلية في دراسة قوانين الحركة والتجاذب ومواضيع الميكانيك الكمي والترمودا بينمكس والحركة الموجية والنشاط الاشعاعي والدوائر الكهربائية و التفاعلات الكيمياوية . واصبحت المعادلات التفاضلية وطرق حلها تساعد الباحث العلمي على فهم مظاهر التقدم والرقي في مختلف العلوم الحديثة المتطورة .

الملخص (Abstract) :

يتضمن هذا البحث ثلاثة فصول :-

الفصل الاول : خصص هذا الفصل لعرض بعض التعاريف الاساسية مثل تصنيف المعادلة التفاضلية من حيث الرتبة والدرجة ومفهوم الحل العام والحل الخاص والحل الشاذ للمعادلة التفاضلية .

الفصل الثاني : خصص هذا الفصل لدراسة طرق حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الاولى مثل فصل المتغيرات – حل المعادلة التفاضلية المتجانسة من الرتبة الاولى – المعادلة التفاضلية التامة – حل المعادلة الغير تامة باستخدام عامل المكاملة – معادلة برنولي .

الفصل الثالث : خصص هذا الفصل لدراسة تطبيقات المعادلات التفاضلية من الرتبة الاولى وذلك من خلال دراسة التطبيقات الاتية : معادلة النمو – معادلة الانحلال – الدوائر الكهربائية – حركة الاجسام .

الفصل الاول

Chapter one

المفاهيم الاساسية Basic Concepts

١-١ المقدمة (Introduction)

ان المعادلات التفاضلية اساسية لفهم كثير من المسائل الفيزياوية والرياضية المهمة لقد ادرك ذلك اسحاق نيوتن في القرن السابع عشر اذ استخدم المعادلات في دراسته لحركة الجسيمات والاجرام السماوية [1] ، تعتبر المعادلات التفاضلية من المواضيع المهمة في الرياضيات والبحتة والتطبيقية وهي الرابط بين العلوم الرياضية والهندسية ، فلا تخلو مواضيع الهندسة الكهربائية والميكانيكية والانشائية من انواع المعادلات الكيميائية .

لا توجد طرق رياضية عامة لحل المعادلات التفاضلية ، وهنالك بعض الطرق يمكن تعميمها على مجموعة خاصة من المعادلات التفاضلية ، حتى الطرق العددية وطريقة العناصر المنتهية ليستا طرق عامة لحل جميع المعادلات التفاضلية في كل الشرائط . ويمكن ان يصبح نتيجة احد بحوث الماجستير او الدكتوراه معادلة تفاضلية ومن ثم حلها بطرق تحليلية او عددية .

وما زالت المعادلات التفاضلية منذ عهد نيوتن تستخدم في فهم العلوم الفيزيائية والهندسية والكيميائية والحيوية بالإضافة الى مساهمتها في دراسة التحليل الرياضي وامتدت استخداماتها في العلوم الاقتصادية والاجتماعية وتطورت المعادلات التفاضلية وتزايدت اهميتها في جميع مجالات العلوم وتطبيقاتها [2] .

تعريف (1.1.1) :

١- المعادلة التفاضلية الاعتيادية ordinary Differential Equation (O.D.E) : هي معادلة تحتوي على مشتقات او تفاضليات دالة مجهولة او عدة دوال مجهولة تعتمد على متغير مستقل واحد .

مثل : $\frac{dy}{dx} - x\ sinx = y$

٢- المعادلة التفاضلية الجزئية Ordinary Differential Equation (O.D.E) : هي معادلة رياضية تحتوي على دالة مجهولة unknown function لأكثر من متغير واحد مع المشتقات الجزئية بالنسبة للمتغيرات المستقلة .

مثل: $\frac{\partial 2y}{\partial x2} + \frac{\partial 2y}{\partial y2} + \frac{\partial 2y}{\partial Z2}$ =0

2-1تصنيف المعادلة التفاضلية

لتصنيف المعادلة التفاضلية نستخدم مفهوم رتبة المعادلة التفاضلية ودرجة المعادلة التفاضلية :

(1.2.1) تعريف :

١- رتبة المعادلة التفاضلية (Order) : هي اعلى مشتقة (معامل تفاضلي) للمتغير المستقل في المعادلة التفاضلية .[٥]

٢- درجة المعادلة التفاضلية (Degree) : هي الدرجة الجبرية للمشتقة ذات اعلى رتبة تظهر في المعادلة [٦] .

مثال :

- $\gamma \cdots - (\sin x)\gamma \cdots + 3\gamma = 0$ معادلة تفاضلية من الرتبة الثالثة والدرجة الاولى .
- $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} - (\cos x)y + 3y^2 = 0$ معادلة تفاضلية من الرتبة الاولى والدرجة الاولى .

مثال : حدد رتبة ودرجة المعادلة التفاضلية $y \cdots = \sqrt[3]{x + y^2}$

الحل :

بتكعيب الطرفين نحصل على$(y..)^3 = x + y^2$ وهي معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية والدرجة الثالثة .

تعريف (1.2.2) : المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة n تأخذ الصورة

$$p_0\,(x)y^{(n)} + p_1\,(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}\,(x)y^{\cdot} + p_n\,(x)y = q(x)$$

فإذا كانت الدالة q(x) تساوي صفر فإن المعادلة تكون متجانسة اما اذا كانت الدالة q(x) لا تساوي صفر فإن المعادلة تكون غير متجانسة .

مثال :

- المعادلة التفاضلية : $x^3\ \ y^{\cdot} + 3xy = \frac{Inx}{x-1}$ هي معادلة تفاضلية خطية غير متجانسة من المرتبة الاولى .

المعادلة التفاضلية $x^2\ \sqrt{y_{\cdot\cdot}} - e^{-2xy_{\cdot}} - 3(\tan x)y = 0$ هي معادلة تفاضلية غير خطية من الرتبة الثانية وذلك لوجود $\sqrt{y_{\cdot\cdot}}$

١-٢ حل المعادلة التفاضلية

لتكن $y = f(x)$ دالة معرفة على فترة (a-b) وقابلة للإشتقاق عدد n من المرات على نفس الفترة (a-b) فإذا كانت الدالة $y = f(x)$ لا تحقق المعادلة من الرتبة n فإن الدالة $y = f(x)$ تسمى للمعادلة التفاضلية على الفترة (a ,b)

مثال : الدالة $y = \tan x$ تحقق المعادلة التفاضلية $y' = 1 + y^2$ على الفترة $\left(\frac{-n}{2}, \frac{n}{2}\right)$

وذلك لأن $y' = \sec 2\,x$

وبالتالي $sec^2\,x = 1 + \ tan^2$

إذن $y = \tan x$ يمثل حلا للمعادلة التفاضلية .

(1.3.1)تعريف :

الحل العام للمعادلة (General solution) من الرتبة n : هو حل يحقق المعادلة التفاضلية ويجب ان يحتوي على عدد n من الثوابت الاختيارية ويأخذ الصورة :

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n$$

حيث $c_1,c_2,\cdots,c_n$ هي مجموعة n من الثوابت الاختيارية و $y_1,y_2,\cdots,y_n$ هي مجموعة n من الدوال المختلفة (المستقلة خطيا) والتي تحقق المعادلة التفاضلية .

(1.3.2)تعريف: الحل الخاص (Special solution) للمعادلة التفاضلية : هو حل يحقق المعادلة التفاضلية ويستنسخ من الحل العام وذلك بإعطاء الثوابت قيم اختيارية .

(1.3.3) تعريف: الحل الشاذ (المنفرد) (Singular solution) للمعادلة التفاضلية : هو حل يحقق المعادلة التفاضلية ولا يمكن ولا يمكن ان يستنسخ من الحل العام وذلك بإعطاء الثوابت قيم اختيارية .

الفصل الثاني

Chapter two

المعادلات التفاضلية الاعتيادية من الرتبة الاولى

Ordinary Differential Equation of order one

Introduction المقدمة

المعادلة التفاضلية من الرتبة الاولى تأخذ الصورة :

$f(x,y,y')=0$ أو $y'=f(x,y)=0$ أو $Mdx+Ndy=0$ حيث M,N

والحل العام للمعادلة التفاضلية هو ايجاد دالة تربط بين التغير المستقل x مع المتغير التابع y وتحتوي على ثابت واحد وتحقق المعادلة التفاضلية .

2-1 فصل المتغيرات *Separation of variables*

(2.1.1) تعريف : المعادلة التفاضلية التي تأخذ الصورة :

$$f_1(x)dx+f_2(y)dy=0$$

تسمى معادلة تفاضلية ذات المتغيرات المنفصلة .

ولحل المعادلة التفاضلية ذات المتغيرات المنفصلة :

$$f_1(x)dx+f_2(y)dy=0$$

$\int f_1(x)dx+\int f_2(y)dy=c$ حيث c ثابت اختياري

مثال : حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx}xdx=0$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} - xdx = 0$$

$$\frac{dy}{y} - xdx = 0$$ بالقسمة على y

نجري تكامل للطرفين على :

$$\int\frac{dy}{y}-\int x dx=c$$

$$\ln y-\frac{x^2}{2}=c$$

مثال :- جد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية $\sin x dx+\frac{dy}{\sqrt{y}}=0$ عند النقطة $(\frac{n}{2},1)$.

الحل :

$$\sin x dx+\frac{dy}{\sqrt{y}}=0$$

نجري تكامل للطرفين فنحصل على :

$$\int\sin x dx+\int\frac{1}{\sqrt{y}}\,dy=c$$

$$-\cos x+2\sqrt{y}=c$$

وبالتعويض بـ $y=1$, $x=\frac{\pi}{2}$ نحصل على $c=2$ وبالتالي يكون الحل الخاص هو :

$$-\cos x+2\sqrt{y}=2$$

2-2 المعادلة التفاضلية المتجانسة من الرتبة الاولى Homogenous Equation (3)

(2.2.1) تعريف : يقال للدالة $f(x,y)$ بأنها متجانسة من الدرجة n اذا تحقق :

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n f(x,y)$$

مثال : اختبر الدالة $f(x,y)=\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$ هل هي متجانسة ؟

الحل :

$$f(\lambda x,\lambda y)=\frac{\lambda^2x^2}{\sqrt{\lambda^2\ x^2+\lambda^2\ y^2}}\quad=\lambda\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}f(x,y)$$

اذن الدالة متجانسة من الدرجة n=1

(2.2.2) مبرهنة :
اذا كانت الدالتان $M(x,y),N(x,y)$ متجانستان من الدرجة n فإن الدالة $M(x,y)N(x,y)$تكون متجانسة من الدرجة صفر.

$$\frac{M(\lambda x,\lambda y)}{N(\lambda x,\lambda y)} = \frac{M\lambda^{n}(x,y)}{N\lambda^{n}(x,y)} = \frac{M(x,y)}{N(x,y)} = \lambda 0\,\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$

(2.2.3) مبرهنة :
اذا كانت الدالة $f(x,y)$ متجانسة من الدرجة صفر فإن الدالة $f(x,y)$ تكون دالة في المتغيرyx

البرهان:
نضع$z=yx$ وبالتالي يكون $y=xz$ إذن:

$$f(x,y)=f(x,xz)=x0f(1,z)=f(1,\frac{y}{x})=f(\frac{y}{x})$$

حيث x في الدالة المتجانسة λ . قامت بدور اذن الدالة $f\ (x,y)$ تكون في متغير $\frac{y}{x}$

(2.2.3) تعريف : المعدلة التفاضلية من الرتبة الاولى هي تلك المعادلة التي يمكن كتابتها على الصورة$\frac{dy}{dx} = f(\frac{y}{x})$:

$$\frac{dy}{dx} = z + x\ \frac{dz}{dx}$$

ولكن
$\frac{dy}{dx}=f(z)$
إذن $f(z)=z+x\frac{dz}{dx}$

وبفضل المتغيرات نحصل على $\frac{dx}{x} = \frac{dz}{f(z)-z}$
ثم عن طريق التكامل نحصل على الحل العام.

مثال :- حل المعادلة التفاضلية $(y^2 - xy)dx + x^2 dy = 0$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy - y^2}{x^2} = \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2}$$

نضع $z = \frac{y}{x}$ وبالتالي $y = xz$ إذن :

$$\frac{dy}{dx} = z + x\,\frac{dz}{dx}$$

ولكن $\frac{dy}{dx} = z - z^2$

اذن :

$$z - z^2 = z + x\,\frac{dz}{dx}$$

وبفضل المتغيرات نحصل على :

$$-z^2 = x\,\frac{dx}{x}$$

$$\frac{dx}{-z^2} = \frac{dx}{x}$$

وبالتكامل نحصل على الحل العام :

$$\int \frac{dz}{-z^2} - z2 = \int \frac{dx}{x} + c$$

$$\frac{1}{z} = \ln x + c$$

والان نضع $z = \frac{y}{x}$

$$\frac{x}{y} = \ln x + c$$

2-3 *المعادلة* التفاضلية التامة **(Exact Equation)**

اذا كانت الدالة $f\ (x, y)$ متصلة على مجال التعريف لها فإن التفاضل الكلي (التفاضل التام) لهذه الدالة يعرف بـ

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy$$

حيث :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}$$

عكسيا $M(x,y)dx+N(x,y)$ تمثل تفاضل تام لدالة $f(x,y)$ اذا تحقق شرطين :

1- $df=M(x,y)dx+N(x,y)dy$

2- $M = \frac{\partial f}{\partial x}\, , N = \frac{\partial f}{\partial y}$

وفي هذه الحالة $\frac{\partial 2f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial 2f}{\partial y \partial x}$ يعطي $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$

تعريف (2.4.1) : نقول إن المعادلة :

$$M(x,y)dx+N(x,y)=0$$

بأنها معادلة تفاضلية تامة اذا تحقق الشرط اللازم والكافي :

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

اذا كانت $M(x,y)dx+N(x,y)=0$ تمثل معادلة تفاضلية تامة فأنه يوجد دالة $f(x,y)$ حيث تكون :

$M = \frac{\partial f}{\partial x}\, , \boldsymbol{N} = \frac{\partial f}{\partial y}$ وبالتالي يكون لدينا :

$$df=M(x,y)dx+N(x,y)=0$$

وبالتالي يكون لها الحل العام هو $f=c$
ولإيجاد الدالة f نجري التكامل بالنسبة للمتغير x ونضع ثابت التكامل كدالة في المتغير y ولتعيين ثابت التكامل تفاضل الطرفين بالنسبة للمتغير y .

ملاحظة :
من الممكن ان توجد الدالة f عن طريق حساب التكامل بالنسبة للمتغير y ونضع ثابت التكامل كدالة في المتغير x ولتعيين ثابت تفاضل الطرفين بالنسبة للمتغير x .

مثال : حل المعادلة التفاضلية $2xydy+(x^2-1)dy=0$

الحل :

$M=2xy$, $N=x^2-1$

$$\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \mathrm{y}}=2x , \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial \mathrm{x}}=2x$$

إذن :

$$\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \mathrm{y}}=\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial \mathrm{x}}$$

إذن المعادلة التفاضلية تامة
إذن يوجد دالة f تحقق $df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$

حيث $\frac{\partial f}{\partial x}=2xy , \frac{\partial f}{\partial y}=\mathrm{x}^2-1$
ولهذا الحل العام $f=c$

ولإيجاد الدالة f نجري التكامل بالنسبة للمتغير x ونضع ثابت التكامل كدالة في المتغير y .

$f=\int 2xy\,dx+w(y)=x^2y+w(y)$
ولتعين ثابت التكامل $w(y)$ تفاضل الطرفين بالنسبة للمتغير y .

$$\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}}=x^2+\frac{dw}{dy}$$

وبوضع1- x^2 $x^2=\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}}$ نحصل على1- = $\frac{dw}{dy}$ وبالتكامل بالنسبة لـ y نحصل على
$w=-y$ وبالتالي $f=x^2y-y$ إذن الحل العام للمعادلة التفاضلية هو :

$x^2y-y=\mathrm{c}$

2.4 حل المعادلة الغير تامة باستخدام عامل المكاملة (*Integrating Factor*)

اذا كانت المعادلة التفاضلية $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ غير تامة فإن .

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

لكننا في بعض الحالات يمكن ايجاد دالة مناسبة في المتغير x او المتغير y او دالة في المتغيرين x,y ولتكن $\lambda\ (x,y)$ بحيث اذا ضربت هذه الدالة في المعادلة التفاضلية الغير تامة فإنها تحولها الى معادلة تفاضلية تامة وفي هذه الحالة تسمى الدالة$\lambda\ (x,y)$ عامل مكاملة .

فإذا ضربت المعادلة التفاضلية الغير تامة في عامل المكاملة $\lambda\ (x,y)$ فإن المعادلة :

$$\lambda M(x,y)dx+\lambda N(x,y)dy=0$$

تكون معادلة تفاضلية تامة وتحقق :

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \lambda N}{\partial x}$$

إذن :

$$m\ \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \lambda\ \frac{\partial M}{\partial y}$$
$$= N\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \lambda\ \frac{\partial N}{\partial x} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (*)$$

سوف ندرس حل المعادلة (*) بناءا على صورة الدالة λ :

الحالة الاولى من صور عامل المكاملة :

عندما يعتمد عامل المكاملة على المتغير xفأن $\lambda = \lambda(x)$ وبالتالي $\frac{\partial \lambda}{\partial x} = 0$

وبالتالي فإن المعادلة (*) تكون :

$$\lambda\frac{\partial M}{\partial y} = N\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \lambda\frac{\partial N}{\partial x}$$

بفصل المتغيرات نحصل على :

$$\frac{1}{n}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)dx = \frac{d\lambda}{\partial x}$$

إذن بالتكامل نحصل على :

$$\ln\lambda = \int \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)dx$$
$$\lambda\ = e\int \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)dx$$

الحالة الثانية من صور معامل المكاملة :

عندما يعتمد معامل المكاملة على المتغير y فإن $\lambda(y)$ $\lambda =$ وبالتالي $\frac{d\lambda}{dx} = 0$

بالتالي فإن المتغيرات نحصل على :

$$-\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) dy = \frac{dy}{\lambda}$$

$$ln\lambda = \int -\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right).$$ اكتب المعادلة هنا

إذن :

$$\lambda = e\int -1M\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)dy$$

مثال : اثبت ان المعادلة التفاضلية $(x+y)dx+xlnxdy=0$

لها معامل مكاملة في x ثم حل المعادلة :

الحل :

$$M=x+y\ ,\ N=xlnx$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1\ ,\frac{\partial N}{\partial x} = 1 + \ln x$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

إذن المعادلة غير تامة .

ولكن :

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = -\ln x$$

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{-\ln x}{X\ln x} = \frac{-1}{X}$$

إذن معامل المكاملة يتوقف على X وبالتالي نستخدم الصيغة :

$$\lambda = e\int \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)dx$$

$$\lambda = e\int \frac{-1}{X}\, dx = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$$

إذن بضرب المعادلة التفاضلية في معامل المكاملة نحصل على :

$$\left(1+\frac{y}{x}\right)dx+\ln x dx=0$$

وهي معادلة تفاضلية تامة وبالتالي يوجد دالة f تحقق $df=\frac{\partial f}{\partial x}\,dx+\frac{\partial f}{\partial y}\,dy=0$

حيث $\frac{\partial f}{\partial y}=1+\frac{y}{x}\,,\frac{\partial f}{\partial y}=\ln x$ ولها الحل العام $f=c$

ولإيجاد الدالة f نجري التكامل بالنسبة للمتغير x ونضع ثابت التكامل كدالة في المتغير y :

$$f=\int\left(1+\frac{y}{x}\right)dx+w(y)=x+y\ln x+w(y)$$

ولتعين ثابت التكامل $w(y)$ نفاضل الطرفين بالنسبة للمتغير y :

$$\frac{f\,\partial}{\partial y}=\ln x+\frac{dw}{dy}$$

وبوضع $\frac{f\,\partial}{\partial y}=\ln x$ نحصل على $\frac{dw}{dy}=0$ وبالتكامل بالنسبة الى y نحصل على w=0 وبالتالي

$f=x+y\ln x$

إذن الحل العام للمعادلة التفاضلية هو : $x+y\ln x=c$

2.5 معادلة برنولي : ***Equation Bernoulli's***

وهي معادلة خطية موسعة وسميت نسبة الى العالم الرياضي $James\ Bernouill$ الذي بحثها عام ١٦٩٥م .

$$y'+p(x)y=q(x)y^{n}$$

حيث الدالتان $p(x),q(x)$ دالتان متصلتان في المتغير x .

وهذه المعادلة تتحول الى معادلة خطية اذا استخدمنا التعويض $y=y^{1-n}$ وبالتالي

$$\frac{dz}{dx}=(1-n)y^{-1}\,\frac{dy}{dx}$$

وبالتالي فإن معادلة برنولي تتحول الى :

$$\frac{-1}{1-n}\,\frac{dz}{dx}+p(x)z=q(x)$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الاولى نستطيع حلها كما سبق .

مثال : حل المعادلة التفاضلية $y - \frac{y}{2x} = \frac{x^2}{2y}$

الحل :

بضرب المعادلة في 2 نحصل على $2yy - \frac{y^2}{x} = x^2$

وبوضع $z = y^2$ فإن $\frac{dz}{dx} = 2yy$ والمعادلة التفاضلية تكون :

$$\frac{dz}{dx} - \frac{z}{x} = x^2$$

معادلة تفاضلية خطية في المتغير z من الرتبة الاولى ولها الحل :

$$z=\left(\int q e^{\int p dx} dx + c\right) e^{-\int p dx}$$

حيث $p=-\frac{1}{x}, q=x^2$

إذن $\int p dx = \int -\frac{1}{x} = -\ln x = \ln\frac{1}{x}$

وبالتالي $e^{\int p dx} = e^{\ln\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$

إذن الحل العام هو :

$$z=\left(\int x dx + c\right)x = \left(\frac{x^2}{2} + c\right)x$$

وبوضع $z=y^2$ نحصل على الحل العام

$$x^2=\left(\frac{x^2}{2}+c\right)x$$

الفصل الثالث

Chapter three

تطبيقات على المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى

Applications on differential equations of the first order

3-1 مقدمة : **(Introduction)**

يرجع الفضل للنجاح الذي حققته البشرية في العصر الحديث الى الاستخدام الواسع للرياضيات في مختلف العلوم التطبيقية وبالتأكيد فإن المعدلات التفاضلية تلعب دور مهم في ذلك فبواسطة هذه المعادلات نستطيع التعبير عن التغيرات التي تحدث لأحد الأنظمة مع مرور الزمن سواء كان هذا النظام يضم متغير واحد او مجموعة من المتغيرات وقد كانت بداية استخدام المعادلات التفاضلية في العلوم الطبيعية وذلك لان قوانين الفيزياء والكيمياء تكون عادة مرتبطة بعدد محدود من المتغيرات المعروفة ومع مرور الزمن اتسع نطاق استخدام المعادلات التفاضلية ليشمل علوم اخرى مثل علم الحياة وعلم الاقتصاد والهندسة بفروعها المختلفة ولهذا تعتبر المعادلات التفاضلية من اهم العلوم الرياضية التي لا غنى عنها في مختلف العلوم التطبيقية وذلك لان الظواهر الطبيعية تتوقف على عدد متنوع من العوامل والمؤثرات الطبيعية التي تؤثرعلى الظاهرة وعند بناء نموذج رياضي لظاهرة طبيعية يجب:

أولا :تحديد العوامل التي لها تأثير واضح على النظام وإهمال العوامل التي لها تأثير قليل جدا او غير واضح او غير مؤكد على النظام.

ثانيا :التعبير رياضيا عن العلاقات بين العوامل المرتبطة بالنظام ومتغيراتها المتناهية في الصفر ويؤدي

ذلك الى تكوين معادلة تفاضلية أو عدة معادلات تفاضلية.

ثالثا :ايجاد الحل الرياضي للمعادلة التفاضلية(أو مجموعة المعادلات التفاضلية)الذي يحقق الشروط الابتدائية.

رابعا :يجب عمل المقارنة بين النتائج التي حصلنا عليها وبينا النتائج الحقيقية المشاهدة التي بين ايدينا فاذا اتفقت فان النموذج الرياضي التي تم بناءه يعتبر نموذج ناجح وغير ذلك يعتبر نموذج غير صحيح.

وسوف نعرض في هذا الفصل لعدد من التطبيقات المعادلات التفاضلية من الرتبة الاولى والتي هي في الواقع تعتبر نماذج رياضية لعدد من الظواهر الطبيعية تم بناءها باستخدام المعادلات التفاضلية من الرتبة الاولى.

معادلة النمو: Growth equation

نفرض ان لدينا كمية Q من مادة ما يزداد مقدارها مع الزمن فاذا كان مقدار هذه المادة عند الزمن $t=0$هو Q_0 والمطلوب هو ايجاد الدالة $Q=f(t)$ كي تمثل دالة تربط بين المتغير .

المستقل t والمتغير التابع Q ولعمل ذلك نفرض ان معدل زيادة الكمية Q يتناسب في اي لحظة زمنية مع قيمة الكمية Q ومعنى ذلك ان:

$$\frac{dQ}{dt} = kQ \quad .k > 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

حيث k مقدار ثابت يعرف بثابت النمو والمعادلة التفاضلية (1) تسمى معادلة النمو العضوي ويمكن حل المعادلة التفاضلية (1) باستخدام فصل المتغيرات:

$$\int\frac{dQ}{dt}=k\int dt$$

$$\ln Q-\ln Q_0=kt$$

$$\ln\frac{Q}{Q0}=kt$$

وبالتالي نحصل على:

$$Q=Q_0e^{kt}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

وهي دالة تزايدية ولها شكل التالي :

3-3 معادلة الانحلال : **Dissolution equation**

نفرض ان لدينا كمية Q من مادة ما بتناقص مقدارها مع الزمن فاذا كان مقدار هذه المادة عند الزمن t=0 هو Q_0 والمطلوب هو ايجاد الدالة Q=f(t) كي تمثل دالة تربط بين المتغير المستقل tوالمتغير التابع Q ولعمل ذلك نفرض ان معدل تناقص الكمية Q يتناسب في اي لحظة زمنيةمع قيمة الكمية Qومعنى ذلك أن:

$$\frac{dQ}{dt}=-\lambda Q \quad \lambda>0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

حيثλ مقدار ثابت يعرف بثابت الانحلال والمعادلة التفاضلية (3) تسمى معادلة الانحلال العضوي ويمكن حل المعادلة التفاضلية (*3*) باستخدام فصل المتغيرات :

$$\int_{Q_0}^{Q}\frac{dQ}{dt}= -\lambda\int_0^t dt$$

$$\ln Q-\ln Q_0=-\lambda t$$

$$\ln\frac{Q}{Q_0}=-\lambda t$$

وبالتالي نحصل على :

$Q = Q_0 e^{-\lambda t}$ ....(4)

وهي دالة تناقضية ولها الشكل التالي:

ملاحظة :

الفترة الزمنية التي تستترقها المادة المشعة لكي تصل الى نصف قيمتها الابتدائية تسمى فترة منتصف العمر ونرمز لها بالرمز T واذا عوضنا عن $Q = \frac{Q_0}{2}$ في معادلة الانحلال(4) نحصل على:

$$\frac{Q_0}{2} = Q_0 e^{-\lambda T}$$

$$-\ln 2 = -\lambda t$$

إذن :

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} = 0.693\ \lambda^{-1}$$

مثال : ازدادت الجراثيم في مزرعة ما بمعدل يتناسب مع عددها في المزرعة فاذا كانت الزيادة في ساعة من 1000الى 2000 جرثومة فكم عدد الجراثيم بعد مرور ساعة ونصف ؟

الحل :

باستخدام معادلة النمو

$$Q = Q_0 e^{kt}$$

حيث عندما t=0 فان$Q_0 = 1000$

وعندما t=0 فانQ=2000

وبالتعويض في معادلة النمو لتعين ثابت النمو k كما يلي:

$$2000 = 1000 e^{k}$$

اذن$k = \ln 2$

وبالتعويض في معادلة النمو عن $Q_0 = 1000$ و $\ln 2 = k$ فان معادلة النمو تكون:

$$Q = 1000 e^{(\ln 2)t}$$

ولحساب عدد الجراثيم بعد مرور ساعة ونصف نعوض عن t=1.5 فنحصل على:

$$Q = 1000 e^{(\ln 2)t} = 2828$$

مثال :يتحلل عنصر الراديوم بمعدل يتناسب مع كمية الراديوم الموجودة في لحظة ما فاذا كان نصف عمر الراديوم هو 1600 سنة فأوجد النسبة المئوية من كمية الراديوم التي ستبقى بعد مرور 1200 سنة .

الحل:
باستخدام معادلة الانحلال

$Q = Q_0 e^{-\lambda t}$

حيث عندما t=1600 فان $Q = \frac{Q_0}{2}$
واذا عوضنا في معادلة الانحلال نحصل على :

$$\frac{Q_0}{2} = Q_0 e^{-\lambda 1600}$$

$$-\ln 2 = -1600\lambda$$

إذن :-

$$\lambda = \frac{\ln 2}{1600} = \frac{0.69314718}{1600} = 0.0004332169875$$

اذن المعادلة الانحلال هي :

$Q = Q_0 e^{-(0.0004332169875)t}$

وبالتعويض عن t=1200 نحصل على:

$Q = Q_0 e^{-(0.000433219875)} = 0.595 Q_0$

اذن النسبة المئوية المتبقية من الراديوم بعد مرور 1200 سنه هي 59.5% من الكمية الاصلية .

3-4 Electrical circuits الدوائر الكهربائية :

يعتبر التيار الكهربائي من اهم المقادير الاساسية ويرمز له بالرمز I وهو معدل مرور الشحنة الموجبة باتجاه ما بالنسبة للزمن تحت تأثير قوة ما(فرق الجهد$I = \frac{dq}{dt}$)

حيث :
A هو التيار ويقاس بالأمبير
qهو الشحنة ويقاس بالكولوم.
tهو الزمن ويقاس بالثانية

ولإيجاد التيار الكهربائي المار في دائرة كهربائية موصلة على التوالي فإننا نستخدم قانون كير تشوف والذي ينص على ان المجموع الجبري لفروق الجهد في دائرة كهربائية مغلقة يساوي صفر .

وسوف ندرس حالتين من هذه الدوائر الكهربائية:

اولا : دائرةRL

وهي تتكون من ملف L ومقاومة R ومصدر جهد كهربائي قوته الدافعة الكهربائية تساويe فولت. نأخذ الشكل التالي.

فإذا كان فرق الجهد في المقاومة هو$V_R=Ri$

وكان فرق الجهد في الملف هو$V_R=L\frac{di}{dt}$

$$V_R+V_L=e$$

وبالتعويض نحصل على:

$$Ri+\frac{di}{dt}=e$$

اذن:

$$\frac{di}{dt}+\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{L}}i=\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{L}}$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الاولى نستطيع حلها.

مثال: دائرة كهربائية متصلة على التوالي من النوع RL بحيث يكون فيها المقاومة $R=2\cap$ و $L=0.5H$ والقوة الدافعة الكهربائية لمصدر الجهد في الدائرة هي $e=t$ *Volts* فإذا كان التيار الابتدائي المار في الدائرة يساوي صفر فأوجد التيار الكهربائي المار في الدائرة عند اي زمنt

الحل : المعادلة التفاضلية لدائرة RL هي:

$$\frac{di}{dt}+\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{L}}i=\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{L}}$$

وبالتعويض نحصل على:

$$\frac{di}{dt}4\mathrm{i}=2\mathrm{t}$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الاولى ولها الحل العام:

$$i=\left(\int qe^{\int pdt}dt+a\right)e^{\int -pdt}$$

حيث:

p=4, q=2t $e^{\int pdt}=e^{4t}$,

إذن:

$$i=(\int 2te^{4t}dt+a)e^{-4t}$$

ولحساب $\int 2te^{4t}dt$ نستخدم التكامل بالتجزئ:

$$u=2t,\ dV=e^{4t}dt$$

$$du=2dt,\ v=\frac{e^{4t}}{4}$$

اذن:

$$i=(te^{4t}2-e^{4t}8+a)e^{-4t}=t2-18+ae^{-4t}$$

وأستعين الثابت c نستخدم الشرط الابتدائي انه عندما t=0 فان i=0 وبالتعويض نحصل على $i=\frac{1}{8}$

وبالتالي يكون الحل هو:

$$i=\frac{t}{2}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}e^{-4t}$$

ثانيا : دائرةRC

وهي تتكون من مكثف C ومقاومة R ومصدر جهد كهربائي قوته الدافعة الكهربائية تساويe فولت.

نأخذ الشكل التالي:

حيث فرق الجهد عبر المكثف C يعطى بالعلاقة:

$$V=\frac{q}{c}$$

فرق الجهد في المقاومة هو$V_R=Ri$

فرق الجهد في المكثف هو $V_c=\frac{q}{c}$

ويطبق قانون كرتشوف للجهد فان:

$$V_a+V_c=e$$

وبالتعويض نحصل على:

$Ri+\frac{q}{c}=e$

$i+\frac{1}{Rc}\ q=eR$

إذن :

$\frac{dq}{dt}+\frac{1}{Rc}q=\frac{e}{R}$

وهي معادلة خطية من الرتبة الأولى نستطيع حلها.

مثال : دائرة كهربائية متصلة على التوالي من نوع *RC* بحيث يكون فيها المقاومة $R=10\Omega$ ومكثف *c=0.1F* والقوة الدافعة الكهربائية لمصدر الجهد في الدائرة هي *e=t Volts* فإذا كان التيار الابتدائي المار في الدائرة يساوي صفر فأوجد:

١- الشحنة الكهربائية في المكثف عند أي زمن. *t*
٢- التيار الكهربائي المار في الدائرة عند أي زمن *t*

الحل:
المعادلة التفاضلية لدائرة RC هي :

$\frac{dq}{dt}+\frac{1}{Rc}q=\frac{e}{R}$

حيث *RC=(10)(0.1)=1 sec* وبالتعويض نحصل على:

$$\frac{dq}{dt}=q=t$$

وهي معادلة خطية من الرتبة الأولى ولها الحل العام:

$q=(\int Qe^{\int pdt}dt+a)e^{-pdt}$

حيث:

$p=1, Q=t, e^{\int pdt}=e^{t}$

اذن:

$q=(\int te^{t}dt+a)^{e^{-t}}$

ولحساب $\int te^{t}dt$ نستخدم التكامل بالتجزئة:

$u=t, dv$
$=e^{t}dt\ du$
$=dt, v$
$=e^{t}$

إذن:

$q=(te^{t}-e^{t}+a)e^{-t}=t-1+ae^{-t}$

ولتعين الثابت a نستخدم الشرط الابتدائي انه عندما $t=0$ فان $q=0$ وبالتعويض نحصل على $a=1$ وبالتالي يكون الحل هو:

$q=t-1+e^{-t}\ col$

ولإيجاد التيار الكهربائي المار في الدائرة عند إي زمن t نستخدم:

$i=\frac{dq}{dt}$

اذن:

$i=1-e^{-t}\ Amp$

3-5 حركة الاجسام ***Particle Movement***

لحساب معادلة الحركة الخاصة بالأجسام المقذوفة من سطح الارض راسيا الى اعلى او الاجسام الهابطة من اعلى الى سطح الارض نفرض ان عجلة الجاذبية الارضية هي g وكتلة الجسم المقذوف m وهما مقادير ثابتة حيث عجلة الجاذبية الارضية $g=32ft/sec^2$ ونفرض ان الاتجاه الموجب يكون من اعلى الى اسفل وذلك بالنسبة للأجسام الهابطة من اسفل الى اعلى وذلك بالنسبة للأجسام المقذوفة راسيا الى اعلى ومن قانون نيوتن للحركة يكون لدينا .

$$F=m\frac{dv}{dt} \qquad \text{...}(5)$$

حيث F هي القوى المؤثرة على الجسم المتحرك.و m كتلة الجسم المتحرك. وv سرعة الجسم المتحرك عند الزمن. t مع العلم انه في حالة الحركة الراسية فان هناك قوتان تؤثران على الجسم المتحرك:

القوى الأولى(وزن الجسم المتحرك :)وتكون ناتجة عن تأثير الجاذبية الارضية وتساوي mg **والقوى الثانية(مقاومة الهواء :)**وهي تتناسب مع سرعة الجسم المتحرك وفي هذه الحالة تساوي kv او مع مربع سرعة الجسم المتحرك وفي هذه الحالة تساوي kv^2 حيث K مقدار ثابت موجب.

معادلة حركة الاجسام الهابطة:

لحساب معادله الحركة للجسم الهابط من اعلى الى اسفل فأن هناك قوتان تؤثران على الجسم الهابط هما وزنه ومقاومه الهواء فإذا فرضنا إن مقاومه الهواء تتناسب مع سرعه الجسم فأن القوى F التي تؤثر على الجسم من المعادلة) (تكون هي:

$$F=mg-kv= m\frac{dv}{dt}$$

اذن:

$$\frac{dv}{dt}+\frac{k}{m}v=g \text{..} (6)$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الاولى نستطيع حلها بالطرق التي درسناها سابقا.

مثال: سقط جسم وزنه *4lb* من ارتفاع قدرة *3168ft* بسرعة ابتدائية تساوي صفر فإذا كانت مقاومة الهواء تساوي $\frac{v}{8}$ حيث *v* سرعة الجسم فأوجد.

١- السرعة النهائية للجسم الهابط علما بان عجلة الجاذبية الأرضية $g=32ft/sec^2$
٢- الزمن الذي مر لكي يصل هذا الجسم الى سطح الأرض.

الحل: من المعطيات يكون لدينا:

$$w=4,\ k=\frac{1}{8},\ h=3168$$

اذن:

$$w=mg=4$$

اذن:

$$m=\frac{q}{w}=\frac{4}{32}=\frac{1}{8}$$

ومن المعادلة التفاضلية للجسم الهابط من اعلى الى اسفل:

$$\frac{dv}{dt}+\frac{k}{m}v=g$$

وبالتعويض نحصل على:

$$\frac{dv}{dt}+v=32$$

وهي معادلة تفاضلية من الرتبة الاولى ولها الحل العام:

$$v=\left(\int q e^{\int p dt} dt+c\right) e^{\int -p dt}$$

حيث:

$p=1, q=32\ e^{\int pdt}=e^{t}$

اذن:

$v=\int 32e^{t}dt+c)e^{-t}=32+ce^{-t}$

وبالتعويض عن $t=0$ فان $v=0$ نحصل على $c=-32$ وبالتالي يكون:

$v=32-32e^{-t}$

ثانيا :لحساب الزمن الذي يستغرقه الجسم الهابط للوصول الى سطح الأرض:

$v=\frac{dh}{dt}=32-32e^{-t}$

اذن بفصل المتغيرات واجراء عملية التكامل نحصل على:

$h=32t+32e^{-t}+c$

وبالتعويض عن $t=0$ فان $h=0$ ونحصل على $c=-32$ وبالتالي يكون:

$h=32t+32e^{-t}-32$

اذن لحساب الزمن الذي يستغرقه الجسم الهابط للوصول الى سطح الارض نضع$h=3168$

اذن:

$100=t+e^{-t}$

وبالتقريب نحصل على$t=100\ sec$
حيث تكون قيمة e^{-100} صغيره جدا وتقترب من الصفر

الهوامشMargin

الفصل الأول:

(1)فريد بروير , جون م . نوهيل , المعادلات التفاضلية الاعتيادية , ترجمة خالد أحمد محمد علي , صباح فاضل عبد , الجامعة المستنصرية1990 ,

(2)جلال الحاج عبد , المعادلات التفاضلية العادية والجزئية2008 ,

(3)موراى ر . شبيجل , الرياضيات المتقدمة , ترجمة الدكتور سعد كامل احمد , دار الرائد العربي , 1980

(4)عبد السلام محمد , المعادلات التفاضلية الاعتيادية2014 ,

(5)حسن مصطفى العويضي , عبد الوهاب عباس رجب , سناء زارع , جامعة الأزهر.

(6)خالد احمد السامرائي , يحيى عبد سعيد , طرق حل المعادلات التفاضلية , وزارة التعليم العالي والبحث العلمي.

(7)روحي ابراهيم الخطيب , مقدمة في المعادلات التفاضلية الطبعة الأولى , دار المسيرة, 2012

(8)روحي ابراهيم الخطيب , مقدمة في المعادلات التفاضلية الطبعة الأولى , دار المسيرة,2012.

الفصل الثاني:

(1)روحي ابراهيم الخطيب , مقدمة في المعادلات التفاضلية الطبعة الأولى , دار المسيرة ,2012

(2)روحي ابراهيم الخطيب , مقدمة في المعادلات التفاضلية الطبعة الأولى , دار المسيرة, 2012

(3)روحي ابراهيم الخطيب , مقدمة في المعادلات التفاضلية الطبعة الأولى , دار المسيرة, 2012

(4) روحي ابراهيم الخطيب , مقدمة في المعادلات التفاضلية الطبعة الأولى , دار المسيرة, 2012

(5) روحي ابراهيم الخطيب , مقدمة في المعادلات التفاضلية الطبعة الأولى , دار المسيرة, 2012

(6) خالد احمد السامرائي , يحيى عبد سعيد , طرق حل المعادلات التفاضلية , وزارة التعليم العالي والبحث العلمي.

الفصل الثالث:

(1)روحي ابراهيم الخطيب , مقدمة في المعادلات التفاضلية الطبعة الأولى , دار المسيرة, 2012

(2) روحي ابراهيم الخطيب , مقدمة في المعادلات التفاضلية الطبعة الأولى , دار المسيرة, 2012

(3) روحي ابراهيم الخطيب , مقدمة في المعادلات التفاضلية الطبعة الأولى , دار المسيرة, 2012

(4) روحي ابراهيم الخطيب , مقدمة في المعادلات التفاضلية الطبعة الأولى , دار المسيرة, 2012

(5) روحي ابراهيم الخطيب , مقدمة في المعادلات التفاضلية الطبعة الأولى , دار المسيرة , 2012

Referenceالمصادر

فريد بروير , جون م . نوهيل , المعادلات التفاضلية الاعتيادية , ترجمة خالد أحمد محمد علي , صباح فاضل عبد , الجامعة المستنصرية1990 ,

- جلال الحاج عبد , المعادلات التفاضلية العادية والجزئية2008 ,
- موراى ر . شبيجل , الرياضيات المتقدمة , ترجمة الدكتور سعد كامل احمد , دار الرائد العربي1980 ,
- عبد السلام محمد , المعادلات التفاضلية الاعتيادية2014 ,
- روحي ابراهيم الخطيب , مقدمة في المعادلات التفاضلية الطبعة الأولى , دار المسيرة, 2012
- خالد احمد السامرائي , يحيى عبد سعيد , طرق حل المعادلات التفاضلية , وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
- حسن مصطفى العويضي , عبد الوهاب عباس رجب , سناء زارع, المعادلاتm التفاضلية ,جامعة الأزهر. 2005 .