وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة ديالى
كلية التربية المقداد
قسم الرياضيات

(ايجاد حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية)

بحث مقدم الى كلية التربية المقداد قسم الرياضيات

لغرض نيل شهادة البكالوريوس في الرياضيات

اعداد

مريم زيد علي **مريم محمد غضبان**

بأشراف

م.م دعاء نصيف جاسم

١٤٤٣هـ 2022م

﴿اللَّهُ نُورُ السَّمَاوَاتِ وَالْأَرْضِ ۚ مَثَلُ نُورِهِ كَمِشْكَاةٍ فِيهَا مِصْبَاحٌ ۖ الْمِصْبَاحُ فِي زُجَاجَةٍ ۖ الزُّجَاجَةُ كَأَنَّهَا كَوْكَبٌ دُرِّيٌّ يُوقَدُ مِن شَجَرَةٍ مُّبَارَكَةٍ زَيْتُونَةٍ لَّا شَرْقِيَّةٍ وَلَا غَرْبِيَّةٍ يَكَادُ زَيْتُهَا يُضِيءُ وَلَوْ لَمْ تَمْسَسْهُ نَارٌ ۚ نُّورٌ عَلَىٰ نُورٍ ۗ يَهْدِي اللَّهُ لِنُورِهِ مَن يَشَاءُ ۚ وَيَضْرِبُ اللَّهُ الْأَمْثَالَ لِلنَّاسِ ۗ وَاللَّهُ بِكُلِّ شَيْءٍ عَلِيمٌ﴾

صدق الله العظيم

[النور: ٣٥]

الاهداء

بدأنا بأكثر من يد وقاسينا أكثر من هم وعانينا الكثير من الصعوبات وها نحن
اليوم والحمد لله نطوي سهر الليالي وتعب الأيام وخلاصة مشوارنا بين دفتي هذا العمل المتواضع
إلى منارة العلم و الإمام المصطفي إلى
الأمي الذي علم المتعلمين سيد الخلق إلي رسولنا الكريم سيدنا محمد صلي الله
عليه وسلم إلى الينبوع الذي بهل العطاء إلي من حاكت سعادتي بخيوط منسوجة من قلبها
والداتي العزيزة إلي من سعي وشقي لأنعم بالراحة والها
الذي لم يبخل بشئ من أجل دفعى فى طريق النجاح الذي علمني أن أرتقي سلم الحياة بحكمة
وصبر إلى
والدي العزيز إلى من حبهم يجري في عروقي ويلهج
بذكراهم فؤادي إلي إلى من سرنا سويون تشق الطريق مع نحو النجاح والإبداع إلى من تكاتفنا يدا
بيد ونحن نقطف زهرة تعلمنا إلي
أصدقائنا وزملائنا الي من علمونا حروف من ذهب وكلمات من درر و عبارات من أسمي واجلي
عبارات في العلم من صاغوا لنا علمهم حروفأ ومن فكر هم منارة تنير لنا سيرة العلم
والنجاح
اساتذتنا الكرام

الشكر والتقدير

في مثل هذه اللحظات يتوقف اليراع ليفكر قبل أن يخط الحروف ليجمعها في كلمات تبعثر الأحرف وعبثا أن يحاول تجميعها في سطور . سطورة كثرة تمر في الخيال لا يبقي لنا في نهاية المطاف إلا قليلا من الذكريات وصور تجمعنا برفاق إلى جانبنا ....

فواجب علينا شكرهم ووداعهم ونحن نخطو خطوتنا الأولي في غمار الحياة

ونخص بالجزيل الشكر والعرفان إلى كل من أشعل شمعة في دروب عملنا و إلي من وقف على المنابر وأعطي من حصيلة فطره لينير دربنا .

إلي الأساتذة الكرام في كلية التربية المقداد ونتوجه بالشكر الجزيل إلي الأستاذة / دعاء نصيف الذي تفضل بالإشراف علي هذا البحث فجزاها الله عنا كل خير . فلها منا كل التقدير والاحترام .

المحتويات

رقم الصفحة	الموضوع
أ	الاية
ب	الاهداء
ت	الشكر والتقدير
ث	المحتويات
١	المقدمة
	الفصل الاول
٢-٣	تعاريف ومفاهيم اساسية
	الفصل الثاني
٤-٥	تعاريف ونظريات
٥-٦	نظرية التواجد والاحادية الحل
٦-٧	**نظرية التواجد وأحادية الحل للمعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية**
٧-٩	المعادلات التفاضلية غير الخطية من المرتبة الثانية
	الفصل الثالث
١٠-١٢	المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية ذات المعاملات الثابتة
١٣	المصادر

مقدمة

نشأ موضوع المعادلات التفاضلية مرافقا لنشؤ موضوع حساب التفاضل و التكامل وتطورا سويا ، وقد كان للعرب فضل كبير في التمهيد لايجاد حساب التفاضل و التكامل . فقد ثبت أن ابن قرة استعمل نظرية افناء الفرق (Theory of Exahustion) حساب حجم الجسم المتولد من دون القطع المكافي ، حول محوره وهي تقابل عملي التكامل في حساب الحجوم الدورانية.

وقد الف ابو الفتح عبد الرحمن المنصور الخزاني (الملقب بالخازن) وهو من علماء العرب الذين عاشوا في النصف من القرن الثاني عشر للميلاد ، كتاب ميان الحكمة هو واحد من الكتب الكثيرة التي وصلت الى الاوربين وترجمت إلى لغاتهم ابان عصور النهضة ومهدت في تطور العلم الحديثة

لقد جاء في كتاب بميزان الحكمة العلاقة الصحيحة بين السرعة التي يسقط بها الجسم نحو الأرض والبعد الذي يقطعه و الزمن الذي يستغرقه وهي العلاقات التي ينص عليها القوانين و المعادلات التي نسبت الى غاليلو (١٥٤٦ـ ١٦٤٢)

وجاء ايضا في كتاب ميزان الحكمة وجود قوة جاذبية على جميع جزيئات الاجسام وهذه القوة تبين صفة ذلك الأجسام وكذلك وجود قوة تجذب هذه الأجسام باتجاه مركز الأرض وان اختلاف قوة الجذب يتبع المسافة بين الجسم الساقط ومركز الأرض.

ومن المواضيع الأخرى التي مهدت لاكتشاف التفاضل وبالتالي المعادلات التفاضلية هو الرقاص (بندول الساعة) المنسوب إلى غاليلو . لكن ابن يونس المصري المتوفي (عام ١٠٠٩ م) كان قد اخترع الرقاص واستعمله في الساعات الدقاقة وفي حساب الفترات الزمنية اثناء الرصد يتضح من هذا أنه كان لهذه المواضيع الف بحثها العرب اثر كبير غير مباشر على اكتشاف موضوع المعادلات التفاضلية فالدقة و التعمق في دراسة هذه المواضيع العلمية اوجدت المعادلات التفاضلية ومن اجل حلوله تجردت واصبحت موضوعا قائما بذاته دراسة حركة بندول الساعة تؤدي الى معادله تفاضلي من الرتبة الثانية وكذلك بالنسبة لقوة الجذب و السرعة و المسافة كلها تؤدي الى معادلات تفاضلية مختلفة ولولا العرب لابتدا الأوربيون من النقطة التي انتهى بها اليونان (وربما أبعد من ذلك الان العرب حفظت هذا التراث اليو ائين وزادت عليه) ولتاخير عصر النهضة عدة قرون تتضمن المعادلات التفاضلية وسائل رياضية مهمة تطبق في مختلف حقول المعرفة قبواسطتها يمكن فهم واستيعاب الكثير من الأفكار العلمية في مختلف الفروع . تدخل المعادلات التفاضلية في دراسة قوانين الحركة والتجاذب ومواضيع الميكانيك الكمي والثرمودا بينمكس و الحركة الموجية و النشاط الاشعاعي و الدوائر الكهربائية و التفاعلات الكيماوية واصبحت المعادلات التفاضلية وطرق حلها تساعد الباحث العلمي على فهم مظاهر التقدم و الرقي في مختلف العلوم الحديثة المتطورة

الفصل الاول

1-1 تعاريف و مفاهيم اساسية

سوف نستعرض في هذا الفصل بعض التعاريف الأساسية للمعادلات

ان اول من استعمل اسم المعادلات هو العالم الالماني ليبنز Leibniz عام ١٦٧٦م

(1-1-1) المعادلات التفاضلية : هي مجموعة حدود الدوال التي فيها مشتقات دالة مجهولة بمتغير واحد او اكثر او هي العلاقة بين المتغير

الأمثلة :

1) $\frac{dy}{dx}+y-2x=0$

2) $\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}-5x=0$

(1-1-2) المعادلات التفاضلية الاعتيادية : هي المعادلة التي تعتمد مشتقة الدالة المجهولة فيها متغير واحد

الأمثلة :

$$\frac{dy}{dx}=2x-3y$$

(1-1-3) معادلة تفاضلية جزئية : هي المعادلة التي تربط المتغير التابع (الدالة المجهولة) باكثر من متغير مستقل

الأمثلة :

1) $\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{d^2u}{dt^2}$

2) $\frac{dT}{dt}=\frac{dT^2}{dx^2}$

(1-1-4) مرتبة المعادلة التفاضلية : وهي اعلى مشتقة تظهر في المعادلة التفاضلية

الامثلة :من الرتبة الثانية

1) $y''-4y'+xy=0$

2) $y'+3y-x=x$

(1-1-5) درجة المعادلة التفاضلية : وهي اسس او قوة اعلى التفاضلية موجودة في المعادلة.

الأمثلة:

1) $(y'')^2-4(y')^5+xy=0$ من الرتبة الثانية والدرجة الثانية

2) $(y'')^3+y=x$ من الرتبة الاولى والدرجة الثالثة

(1-1-6) المعادلة التفاضلية الخطية : هي المعادلة التي فيها الدالة المجهولة (مهما كانت رتبتها) ومشتقتها من الدرجة الأولى وخالية من الجذور و الأسس ومعادلات المتغير y مشتقاته تعتمد على متغير واحد مثل x

الأمثلة :

1) $x^3y - x^2y - xy = 0$

2) $x^2y = xy - x^2y$

(1-1-7) حل المعادلة التفاضلية : هو اي علاقة بين المتغيرات خالية من المشتقات و التفاضلات بحيث تحقق هذه المعادلة مع المشتقات التي تنتج منها المعادلة التفاضلية .

مثال :

$xy' = 2y$ حل المعادلة التفاضلية $y = cx^2$

$y = cx^2$

$y' = 2cx$

$x(2cx) = 2(cx^2)$

(1-1-8) الحل العام للمعادلة التفاضلية : هو الحل الذي يمكن أن نعبر عنه بالمعادلة

$$g(x, y) = 0$$

يحتوي على عدد من الثوابت الاختيارية مساويا لرتبة المعادلة التفاضلية

$$pdx + Qdy + Rdz = 0$$

و هذه الدوال مستمره وكذلك مشتقاتها الجزئية من الرتبة الأولى بالنسبة المتغيرات x,y,z

(1-1-9) الحل الخاص للمعادلة التفاضلية : هو الحل الذي نحصل عليه من الحل العام باعطاء قيم معينة للثوابت الاختيارية الداخله من تكوينه ومن الحل العام غالبا يمكن اشتقاق جميع الحلول الخاص

(1-1-10) الحل العام للمعادلة التفاضلية الكلية :وهي المعادلة التي تتحقق من المعادلة التالية

الأمثلة :

2xd +2ydy + 2zdz = 0

و هي معادلة تفاضلية تامة للمعادلة الدالة

$F(x, y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = 0$

تسمي كل معادلة من هذه النمط تامة وعليه فإن المعادلة قابلة للتكامل .

الفصل الثاني

2-1تعاريف ونظريات

- المعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية هي معادلة من الصورة :

1) $F(x, y, y', y'') = 0$

وهي غالبا صعبة الحل ومعقدة الدراسة وسندرس في هذا الفصل المعادلات التفاضلية التي تحل في y'' والتي يمكن كتابتها على الصورة :

2) $y'' = f(x, y, y')$

وكما سبق أن رأينا في الفصول السابقة أن الحل العام للمعادلة التفاضلية من المرتبة الأولى (أي التي تحتوي على المشتقة الأولي) يحتوي علي ثابت اختياري واحد فقط وبما أن المعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية تتضمن المشتقة الثانية أي يجب أن تكامل مرتين للحصول علي الحل العام ومن الطبيعي أن نترقب ظهور ثابتين اختياريين في الحل العام للمعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية .

مثال ١//

الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية :

$$y'' = g(x)$$

يكون من الشكل

$$y = A + Bx + \int^{x}[\int^{t} g(s)dx]dt$$

حيث

B, A ثابتان اختياريان .

ملاحظة :للحصول على منحنى تكاملي واحد للمعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية فانه يجب معرفة شرطين إضافيين مثل قيمة التابع y وقيمة مشتقة y' عند هذه نقطة م ابر ويسمى هذان الشرطان بالشروط الابتدائية أو الحدية بمعنى آخر للحصول علي منحنى تكاملي للمعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية يجب تحديد نقطة يمر بها وميل المنحني عند هذه النقطة . سبق أن ذكرنا نظرية التواجد الأحادية بالنسبة للمعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى وسنذكر هنا أيضا نفس النظرية ولكن بالنسبة للمعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية .

2-2 نظرية التواجد والأحادية الحل

إذا كانت الدوال $\frac{\partial f}{\partial \vartheta}, \frac{\partial f}{\partial y}, f$ مستمرة ووحيدة القيمة في منطقة مفتوحة من الفضاء الثلاثي xy^{∂} و إذا كانت النقطة (x_0, y_0, y_0') في R إذن في مجال حول x_0 فانه يوجد حل وحيد $y = \Phi(x)$ للمعادلة التفاضلية :

$$y'' = f(x, y, y'')$$

ويحقق هذا الحل الشرطين الابتدائيين التالين:

$$y(x_0) = y_0 \qquad , \qquad y'(x_0) = y_0'$$

لا يعني وجود الحل، الحصول علية بسهولة في عبارة صريحة ؛ فقد نتمكن من الحصول عليه في عبارة صريحة في حالة إذا كانت f دالة بسيطة .

- يمكن أن نفرق بين المعادلات التفاضلية الخطية وغير الخطية من المرتبة الثانية

كما هو الحال بالنسبة للمعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى . فالمعادلة التفاضلية الخطية العامة من المرتبة تكون من الشكل

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = G(x) \qquad 3)$$

حيث $G(x), R(x), Q(x), P(x)$ دوال معلومة

مثال ٢//

٥- أهم مثال على المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية هي المعادلة التفاضلية التي تحكم حركة كتلة m معلقة بقابض (زنبرك) ثابت مرونته k ومعامل الاحتكاك c:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = F(t)$$

حيث k, c,m ثوابت معلومة و F دالة معرفة من اجل جميع قيم t .

ب – معادلة ليجندر Legendre (1784-1846) ذات الدرجة $\propto$.

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \propto (\propto - 1)y = 0$$

هي معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الثانية .

ج- معادلة بيسل Bessel (1784-1846) **من الدرجة v:**

$$x2y'' + xy' + (x^2 - v^2)\, y = 0$$

هي معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الثانية .

٤- إذا كان معامل "y في المعادلة التفاضلية (3) يختلف عند الصفر $P(x) \neq 0$ في هذه الحالة يمكن قسمة المعادلة على P(x) فنحصل على المعادلة التفاضلية من الشكل :

$$4) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = g(x)$$

ويمكن كتابتها على شكل المعادلة التفاضلية (2) فنحصل على الدالة f :

$$f(x, y, y') = -p(x)y' - q(x)y + g(x)$$

بحيث: $\frac{\partial f(x,y,y')}{\partial y'} = -p(x) \quad , \quad \frac{\partial f(x,y,y')}{\partial y'} = -q(x)$

ونخلص

إلى النظرية التالية بالنسبة للمعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية .

2-3 نظرية التواجد وأحادية الحل للمعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية (2):

إذ كانت العوامل p(x) , q (x) , g(x) دوال مستمرة في مجال مفتوح $\propto < x < B$ فانه توجد دالة واحدة وواحدة فقط $y = \Phi(x)$ تحقق المعادلة:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$$

على كل المجال $\propto < x < B$ وتحقق أيضا الشرطين الابتدائيين :

$$y(x_0) = y_0 \qquad , \qquad y'(x_0) = y'_0$$

عند نقطة خاصة x_0 في المجال $\propto < x < B$

مثال ٣// جد حل المعادلة التالية :

$$y'' + y = 0$$

الذي يحقق الشرطيين الابتدائيين التاليين : $y(0) = 0 \quad , y'(0) = 1$

الحل :انه من السهولة التحقق من أن : cosx , sinx حلول للمعادلة التفاضلية المعطاة . أما التي تحقق الشروط الابتدائية هي y = sinx إذن وفق النظرية السابقة y = sinx هو الحل الوحيد للمعادلة المعطاة .

مثال٤// ما هو الحل الوحيد للمعادلة التالية:

$$y'' + p(xy') + q(x)y = 0$$

حيث: $y(x_0) = 0 \quad , \quad y'(x_0) = 0$ ، x_0 نقطة في المجال $\propto < x < B$

الحل:

بما أن y =0 تحقق المعادلة التفاضلية والشروط الابتدائية معا إذن y =0 هو الحل الوحيد

٥ـ لحل المعادلات التفاضلية من المرتبة الثانية :

$$y'' + p(x)y' + q(x) = g(x)$$

نبحث أولا عن حل المعادلة المتجانسة :

$$y'' + p(x)y' + q(x) = 0 \qquad (5)$$

الناتجة من المعادلة (4) بوضع g(x)

.وإذا عرفنا حل هذه المعادلة يمكن بطريقة عامة الحصول على حل المعادلة غير المتجانسة (4) .

2-4 المعادلات التفاضلية غير الخطية من المرتبة الثانية

إذا لم تكن المعادلة (2) من الشكل (3) فأنها معادلة تفاضلية غير خطية ، وبرغم أن دراسة المعادلات التفاضلية غير الخطية من المرتبة الثانية صعبة إلى حد ما ، ف ان هناك حالتين خاصتين يمكن فيهما اختزال المعادلة التفاضلية العامة غير الخطية من المرتبة الثانية (2) إلى معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى ويحدث هذا في حالة غياب المتغير x أو المتغير و من الدالة $f(x, y, y')$ في المعادلة (2) أي لما تكون المعادلة من الشكل :

$$y'' = f(x,y') \qquad (6)$$

او

$$y'' = f(y, y'') \qquad (7)$$

يتم إجراء التغيير $\vartheta = y'$ في بحيث تحل المعادلة من المرتبة الأولى بالنسبة للمتغير في بإحدى الطرق المفصلة في الفصول السابقة ثم بعدها تكامل عبارة ϑ بالنسبة إلي x للحصول على الحل العام للمعادلة الأصلية .

الحالة الأولى :إذا كانت المعادلة من الشكل :- $y'' = f(x, y')$

بوضع $\vartheta = y'$ نجد $\vartheta' = y''$

$$\vartheta' = f(x, \vartheta)$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى ليكن حلها من الشكل

$$\vartheta = g(x, A)$$

وبما ان:

$$\frac{dy}{dx} = \vartheta = g(x, A)$$

وتكامل هذه المعادلة يعطي :-

$$\frac{dy}{dx} = \vartheta = g(x, A)$$

مثال٥// حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$x^2y'' + 2xy' - 1 = 0$$

الحل :.

بوضع $\vartheta = y'$ تصبح المعادلة من الشكل :

$$x^2\vartheta' + 2x\vartheta - 1 = 0$$

او

$$\vartheta' + \frac{2}{x}\vartheta = \frac{1}{x^2}$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الأولى وعامل التكميل :

$$\rho = e^{\int \frac{2}{x}dx} = x^2$$

وحلها من الشكل : $\rho\vartheta = \int x^2 \frac{1}{x^2} dx + A = x + A$

اي $\frac{dy}{dx} = \vartheta = \frac{1}{x} + \frac{A}{x^2}$

نكامل هذه المعادلة فنحصل على :- $y = lnx - \frac{A}{x} + B$

وهو الحل الوحيد للمعادلة المعطاة :

الحالة الثانية :

إذا كانت المعادلة من الشكل : $y'' = f(y, y')$

بوضع $\vartheta = y'$ نجد

$$\vartheta' = f(y, \vartheta)$$

هذه المعادلة تحتوي على y, x و ϑ وهي ليست على الصورة التفاضلية من المرتبة الأولى ، ولكن يمكن حذف المتغير x وتعويضه بالمتغير التابع y حيث :

$$\frac{d\vartheta}{dx} = \frac{d\vartheta}{dy} . \frac{dy}{dx} = \vartheta \frac{d\vartheta}{dy}$$

وتصبح المعادلة الأصلية من الصورة :

$$\vartheta \frac{d\vartheta}{dy} = f(y, \vartheta)$$

وهذه المعادلة تفاضلية من الرتبة الأولى ، وحلها هو عبارة عن علاقة بين ϑ ، y أي $\vartheta = \vartheta(y)$ أما العلاقة بين x,y ونحصل عليها من حل المعادلة :

$$\frac{dy}{dx} = \vartheta(y)$$

ومن ناحية أخرى يظهر ثابتان اختياريان في الناتج النهائي .

مثال ٦//

حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$yy'' + (y')^2 = 0$$

الحل :- بوضع $\vartheta = y$ نجد :-

$$y\vartheta' + \vartheta^2 = 0$$

ولكن: $\frac{d\vartheta}{dx} = \frac{d\vartheta}{dy} . \frac{dy}{dx} = \vartheta \frac{d\vartheta}{dy}$

إذن تصبح المعادلة من الشكل :- $y\vartheta \frac{d\vartheta}{dy} + \vartheta^2 = 0$

وتكتب من الشكل : $\frac{d\vartheta}{\vartheta} + \frac{dy}{y} = 0$

بعد المكاملة نجد : $\ln \vartheta + \ln y = \ln A' \Rightarrow \vartheta = A'/y$

وبما أن $\vartheta = \frac{dy}{dx} = \frac{A'}{y}$

او $ydy = A'dx$

ومنه $\frac{1}{2}y^2 = A'x + B'$

اذن الحل العام للمعادلة المعطاة هو: $y^2 = Ax + B$

الفصل الثالث

3-1 المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية ذات المعاملات الثابتة:

نعود الآن إلى الدراسة العامة للمعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة من المرتبة الثانية بغية الحصول على حلول ذات المعاملات الثابتة وتكتب هذه المعادلات على الصورة:

$$ay'' + b\,y' + cy = 0 \qquad (12)$$

حيث $c, b, a \neq 0$ ثوابت اختيارية نفترضها حقيقية للملاءمة وبناء على النظرية - *6*- فانه يوجد حلان مستقلان خطيا للمعادلة (12) ولإيجاد هذين الحلين نلاحظ أولا أن هذه المعادلة هي علاقة خطية بين$y(x)$ ومشتقاتها والدالة التي يمكن أن تحقق مثل هذه العلاقة الخطية هي الدالة الأسية e^{mx}. لكن لقيم خاصة أو مميزة يراد تعينها للثابت m ويرجع ذلك لكون الدالة الآسية هي الدالة الوحيدة التي تناسب جميع مشتقاتها معها ومع بعضها البعض .

اذن نفرض حلا للمعادلة (12) على الصورة الآسية : $y=e^{mx}$

$$y = e^{mx} \Rightarrow y' = me^{mc}, y^{n} = m^2e^{mx}$$

وبالتعويض عن y ومشتقاتها من (13) في (12) واخذ e^{mx} عاملا مشتركا نجد أن :

$$(am^2 + bm + c) = e^{mx} = 0 \qquad (13)$$

وحيث ان e^{mx} لا يمكن أن تنعدم، إذن يجب أن ينعلم القوس :

$$am^2 + bm + c = e^{mx} = 0 \qquad (14)$$

أي أنه كي تكون e^{mx} حلا للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة ذات المعاملات الثابتة (12) فان الثابت m يجب أن يحقق المعادلة (14) والتي هي معادلة جبرية من الدرجة الثانية في m وتسمى المعادلة (14) المعادلة المميزة (characteristi or Auxiliary Equation) أو المعادلة المساعدة للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة ذات المعاملات الثابتة للمعادلة (14) جذرين هما :

$$m_1 = \frac{1}{2\alpha}\left[-b + \sqrt{b^2 - 4\alpha c}\right] \qquad (15)$$

$$m_2 = \frac{1}{2\alpha}\left[-b - \sqrt{b^2 - 4ac}\right]$$

واضح أن طبيعة حلول المعادلة (12) تتعلق بقيمتي m_2, m_1 والتي بدورها تتعلق المعاملات الثابتة في المعادلة التفاضلية من خلال العلاقة (15) وهناك ثلاث حالات جديرة بالاعتبار :

١٠- الجذران حقيقيان متمايزان $b^2 - 4ac > 0$

في هذه الحالة يكون الحلان e^{m_1x} e^{m_2x} حلين مستقلين خطيا ويكون الحل العام من الصورة :

$$y = Ae^{m_1x} + Be^{m_2x} \qquad (16)$$

مثال ١// أوجد الحل العام للمعادلة $y'' - 4y' + 4y = 0$

الحل

نضع المعادلة على صورة

$$(D^2-4D+4)Y=0$$

تفرض أن

$y=e^{yx}$ حلا للمعادلة المعطاة

المعادلة المساعدة $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ $\quad (\lambda - 2)^2$

ويكون جزر المعادلة

ويكون الحل العام هو :

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{\lambda x}$$

مثال ٣//

اوجد الحل العام للمعادلة

$$y''-8y'+16y=0$$

نضعها في الصورة

$Y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة المعطاة

المعادلة المساعدة في :

فيمكن تحليلها إلي

فيكون جزراها :

الحل العام هو :

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{4x}$$

مثال ٤//

حل المعادلة :

$$y'' = 0$$

تكون المعادلة المساعدة : $x^2 = 0$

فيكون جزراها: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

الحل العام هو :

$$y = (c_1 + c_2 x)$$

مثال ٥//

حل المعادلة

$$X + 4 + 4x = 0$$

نضع المعادلة على الصورة

$$(D^2 + 4D + 4)x = 0$$

المعادلة المساعدة هي

نحللها إلى $(\lambda + 2)^2$

يكون الجذران هما $\lambda_1 = \lambda_2 - 2$

الحل العام هو :

$$X = (c_1 + c_2 t)e^{2x}$$

مثال٦//

اوجد الحل العام للمعادلة

$$y'' + 2y' + 5y = 0$$

نضع المعادلة في الصورة $(D^2 + 2D + 5)\, y = 0$

$Y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة المعطاة

المعادلة المساعدة هي $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$

وتحولها إلى الصورة التربيعية :

$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = -1 \pm 2i$$

الحل العام هو

$$Y = e^{-x}[c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x]$$

المصادر والمراجع :

١- السلالات التفاضلية - الجزء الأول تاليف **الأستاذ الدكتور حسن مصطفى العريشي** و أستاذ الرياضيات بجامعة الأزهر كلية التربية للبنات - الرياض والدكتور عبد الوهاب عباس رجب أستاذ الرياضيات بجامعة الأزهر كلية التربية للبنات - والدكتورة سناء علي زراع أستاذة الرياضيات المساعدة كلية التربية للبنات الرياض مكتبة الرشيد الناشرون

٢- مقدمه في المعادلات التفاضلية - **تأليف الدكتور أحمد حمد** بالرياض قسم الرياضيات والدكتور شوقي فهمي حسنين كلية المعلمين بالرياض قسم الرياضيات وحقوق الطبع الطبعة الأولى (١٤٢٦هـ -٢٠٠٥م) مكتبة الرشيد الناشرون المملكة العربية السعودية الرياض

٣- المعادلات التفاضلية العادية حلول وتطبيقات - **إعداد الدكتور إسماعيل بواقه والدكتور عايش الهنادوه**