جمهورية العراق

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة ديالى

كلية التربية المقداد

قسم الرياضيات

حل نظام المعادلات الخطية باستخدام الماتلاب

بحث مقدم الى مجلس كلية التربية المقداد – جامعة ديالى – قسم الرياضيات
كجزء من متطلبات الحصول على شهادة البكالوريوس في الرياضيات

اعداد الطالبتين

هبه فالح عبد الكريم

فاطمة مولود

بأشراف الاستاذ

م. م ساجد وليد

1443هـ 2022م

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

" اقْرَأْ بِاسْمِ رَبِّكَ الَّذِي خَلَقَ (1)خَلَقَ الْإِنْسَانَ مِنْ عَلَقٍ (2) اقْرَأْ وَرَبُّكَ الْأَكْرَمُ (3) الَّذِي عَلَّمَ بِالْقَلَمِ (4)
عَلَّمَ الْإِنْسَانَ مَا لَمْ يَعْلَمْ (5) "

صدق الله العظيم

(سورة العلق آية 1- 5)

إهـــــــــداء

إلى النور الذي ينير لي درب النجاح (أبي)

ويا من علمتني الصمود مهما تبدلت الظروف (أمي)

إلى من يضيئون لي الطريق ويساندوني ويتنازلون عن حقوقهم لإرضائي والعيش في هناء (أخوتي)

إلى من أنار لي الطريق وأمسك لي مشعل النور استاذي الفاضل

ساجد وليد وجميع اساتذة قسم الرياضيات،

إلى كل من أضاء بعلمه عقل غيره،

أو هدى بالجواب الصحيح حيره سائليه

فأظهر بسماحته تواضع العلماء

وبرحابته سماحه العارفين.

شكـــر وتـقديـــر

اشكر الله العلي القدير الذي أنعم عليَّ بنعمة العقل والدين. القائل في محكم التنزيل "وَفَوْقَ كُلِّ ذِي عِلْمٍ عَلِيمٌ" سورة يوسف آية 76.... صدق الله العظيم.

وقال رسول الله (صلي الله عليه وسلم):"من صنع إليكم معروفاً فكافئوه, فإن لم تجدوا ما تكافئونه به فادعوا له حتى تروا أنكم كافأتموه" ..... (رواه أبو داوود).

فبعد شـــــكر المـــولى عز وجل ، المتـــفضل بجليل النعم ، وعـظـيم الجزاء.. يجدر بي أن أتــقــدم بـبالغ الامتــنـان، وجزيـــل العرفان إلى كل من وجهني ، وعلمني ، وأخذ بيدي في سبيل إنجاز هذا البحث .. وأخص بذلك مشرفي الذي قوم، وتابع، وصوب، بحسن إرشاده لي في كل مراحل البحث، والتي وجدت في توجيهاته حرص المعلم، التي تــؤتي ثمارها الطيـــبة بإذن الله...

كما أحمل الشكر والعرفان لكل من أمـدني بالعـلم ، والمعرفـة ، وأسدى ليَّ النصح ، والتوجيه ، وإلى ذلك الصرح العلمي الشامخ متمثلاً في جامعة ديالى ، وأخص بالذكر كلية تربية المقداد – قسم الرياضيات، والقائمين عليها ,كما أتوجه بالشكر إلى كل من ساندني بدعواته الصادقة ، أو تمنياته المخلصة

أشكرهم جميعاً وأتمنى من الله عز وجل أن يجعل ذلك في موازين حسناتهم.

الملخص

ان الهدف من هذا المشروع هو دراسة مقدار الخطأ لبعض الخوارزميات التكرارية لإيجاد جذور المعادلات الغير خطيه وقد تم اخذ ثلاث انواع من الخوارزميات التكرارية الطريقة الاولى هي طريقه النقطة الصامدة والطريقة الثانية هي طريقه القاطع واخيرا طريقه نيوتن - رافسون

محتويات البحث

المقدمة

التحليل العددي هو أحد فروع الرياضيات الهامة وهو الذي يربط بين الرياضيات التحليلية والحاسب الالي ويستخدم عاده في ايجاد حلول بعض المسائل والمشاكل التي لا يمكن حلها بالرياضيات التحليلية. حيث تكون النتيجة التي نحصل عليها نتيجة تقريبيه. بما اننا نحصل على نتيجة تقريبيه او حل تقريبي هذا يعني انه يوجد حطأ وعلينا حساب الخطأ الا انه لو استطعنا ايجاد الخطأ لاستطعنا ايجاد الحل الفعلي (الحقيقي) الامر الذي يعني ان ايجاد الخطأ غير ممكن ونسعى بالتالي الى ايجاد تقريب للخطأ او حجم الخطأ اي تلك القيمة التي لا يتجاوزها الخطأ. وتتلخص مهمه التحليل العددي في ايجاد الحل التقريبي لمساله ما وتقويم الخطأ.

ان معظم الاعداد التي نتعامل معها هي اعداد تقريبيه لأنها غالبا ما تمثل اطوال وقياسات او قيم لمقادير فيزيائية بنتيجة القياس وهي بحد ذاتها تقريبيه. كذلك فأن كثير من الاعداد الحقيقية لا يمكن التعبير عنها بعدد منته من الارقام فمثلا العدد π يساوي تقريبا 3.14159

1-1 المعادلات الغير خطيه

ان المعادلات الغير الخطية هي المعادلات التي تكون فيها في الاقل حد واحد بحيث معامل المجهول مجهول اخر. اي ان درجه المعادلة تكون أكثر من واحد. يمكن ان تكون معادله واحده في مجهول واحد ولكنه يظهر بصوره غير خطيه. في معظم الاحيان لا توجد صيغ صريحه لحل هذا النوع من المعادلات وعليه فلا يمكن ايجاد حلول تحليله مضبوطة لها. ولكنه يمكن ايجاد جذر واحد او جذور تقريبيه ذات دقه معينه باستخدام عدد من الطرائق العددية المعروفة. وتسمى هذه الطرائق العددية لإيجاد الجذور بالطرائق التكرارية (iterative methods).

2-1 الحلول العددية للمعادلات غير الخطية

هناك العديد من المسائل الرياضية التي يتطلب حلها الى ايجاد الجذور للمعادلات اللاخطية $f(x) = 0$

ولكن في اغلب الاحيان لا يمكن ايجاد هذه الجذور بالطرق التقليدية الجبرية لذا نلجأ الى ايجاد الجذور باستخدام الطرق العددية (الخوارزميات) وباستخدام الحاسوب وان النتائج التي نحصل عليها من هذه الخوارزميات تكون نتائج تقريبيه وبمعنى اخر يتضمن مقدار معين من الخطأ.

3-1 المعادلات غير الخطية ذات المتغير الواحد

هي المعادلات التي تتضمن متغير مستقل واحد وتكون درجتها أكبر من واحد او تحتوي على دوال متساميه

مثل $(e^x, \cos(x), \sin(x))$

امثلة: -

$$x^2 + x + 1 = 0$$

$$x - \sin(x) = 0$$

$e^x - x = 0$

يسمى العدد α جذرا للمعادلة f(x) اذا كان f(α)=0

ندرج بعض الطرق العددية لإيجاد جذور لمعادلات غير الخطية ذات المتغير الواحد

1- طريقه النفطة الصامدة .
2- طريقه القاطع .
3- طريقه نيوتن - رافسون .

4-1 طريقه النقطة الصامدة

- في هذه الطريقة تتولد المعادلة التكرارية $x = g(x)$ من المعادلة الأصلية $f(x) = 0$ ثم نختار نقطه ابتدائية ولتكن x_0 نعوضها في المعادلة $x = g(x)$ نحصل على تقريب جديد $x_1 = g(x_0)$ ثم نكرر الخطوة بتجديد المتغيرات وذلك بوضع x_1 بدل x_0 فنحصل على x_2 وهكذا نحصل على الصيغه التكراريه

$$c_{n+1} = g(x_n)x_{n+1} = g(x_n)$$

ان النقطة التي تحقق هذه الصيغة تكون نقطه صامده للدالة $g(x)$ والتي تمثل جذرا للمعادلة $f(x) =$ 0 .

1-4-1 خواص طريقه النقطة الصامدة: -

1- سرعه الاقتراب فيها تكون خطيه.
2- مشتقه الدالة $g(x)$ يجب ان تحقق $|g'(x)| \leq k < 1$ عند نقطه البدايه x_0 لكي نحصل على تكرارات مستقره للوصول الى الجذر.
3- كلما كانت قيمه k صغيره وقريبه من الصفر كلما كان الاقتراب اسرع الى الجذر .
4- دالة مستمرة على $[a, b]$.

5- $g(x) \in [a,b]$ لكل قيم $x \in [a,b]$.

6- اذا كانت $g'(x)$ موجودة ضمن الفتره (a,b) بحيث ان $|g'(x)| \leq k < 1$

فإذا كانت $x_0 \in [a,b]$ فأن المتتابعه $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ المتولده بالصيغه

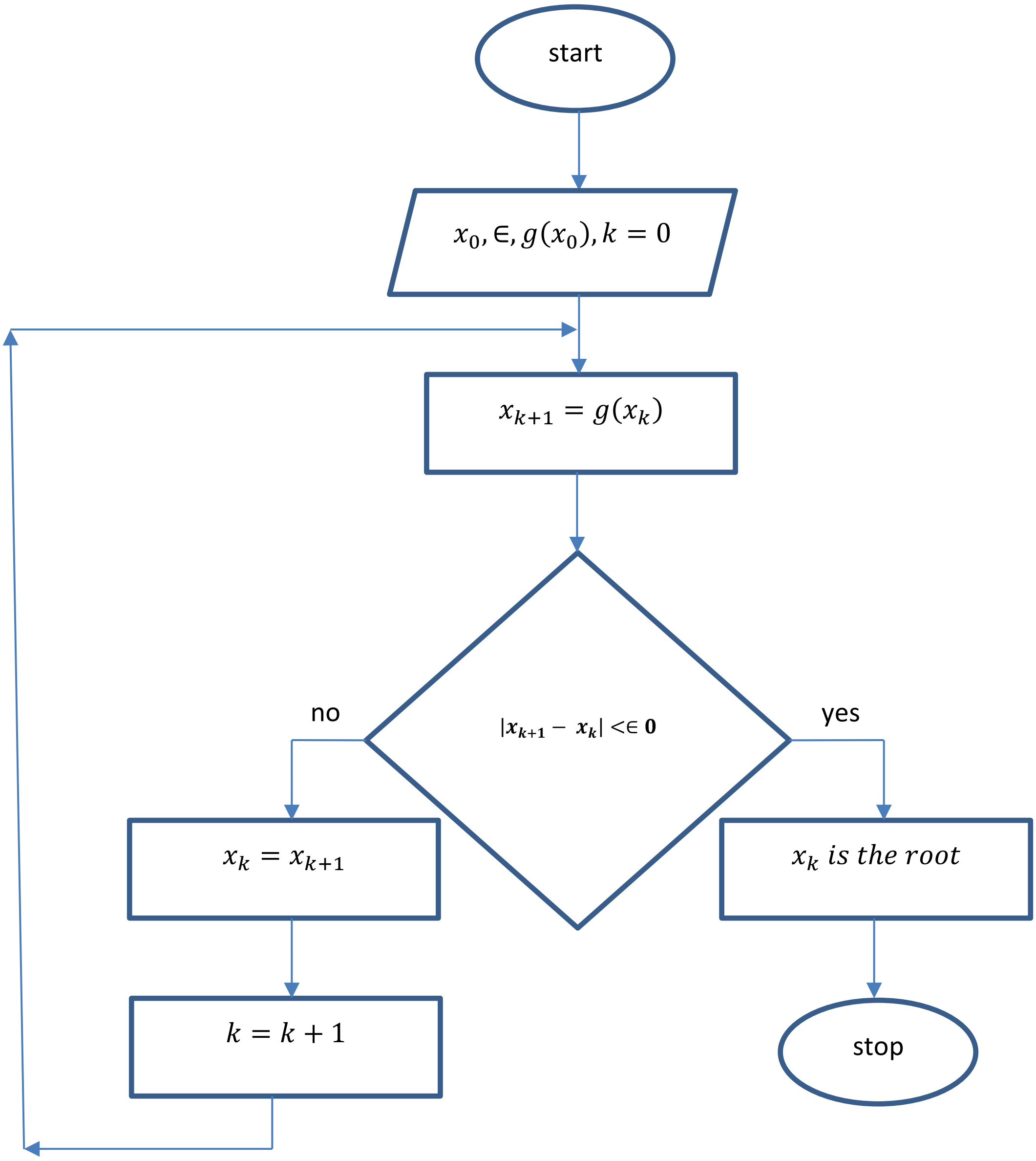
$$x_n = g(x_n - 1)$$

$x_n = g(x_n - 1)$ لقيم ....,n=1,2 تتقارب الى الحل المضبوط $\alpha \in [a,b]$.

2-4-1 خوارزميه طريقة النقطة الصامدة: -

1- أدخل $g(x)$ والقيمة الابتدائية x_0 والدقه ϵ.
2- ضع i=1 .
3- $x = g(x_0)$.
4- اذا كان $\epsilon > |x - x_0|$ فأن x هو الجذر المطلوب توقف . والا اذهب الى الخطوة 5 .
5- i=i+1 .
6- ضع $x_0 = x$ وارجع الى الخطوه 3 .

فيما يلي مخطط انسيابيا لطريقة النقطة الصامدة عند تنفيذها على الاله الحاسبة: -



5-1 طريقه القاطع

ففي هذه الطريقة نقوم اولا بإيجاد تقريبين للجذر x_2 و x_2 ليس من الضروري ان يكونا على جهتي الجذر المضبوط كما في بعض الطرق ولكي نحسب القيمه التقريبيه الجديده للجذر نجد معادله المستقيم المار بالنقطتين $\left(x_1, f(x_1)\right)\left(x_2, f(x_2)\right)$ فتكون القيمه التاليه للجذر x_3 عباره عن نقطه تقاطع المستقيم المار بالنقطتين $\left(x_2, f(x_2)\right)\left(x_3, f(x_3)\right)$ مع المحور x بالتكرار نحصل على المتتابعة $\{x_n\}$ من الصيغه العامه لطريقه القاطع. وعلى هذا يمكن كتابه الخوارزميه التاليه :-

1-5-1 خوارزميه طريقه القاطع: -

1- ادخل القيمتين التقريبيتين x_1, x_0 والدقه ϵ
2- ضع i=1 احسب

$$y_1 = f(x_1) y_0 = f(x_0)$$

3- احسب

$$w = x_1 - \frac{y_1(x_1 - x_0)}{y_1 - y_0}$$

4- إذا كان

$$|w - x_1| < \epsilon$$

اطبع w هو الجذر ونتوقف والا اذهب للخطوة 5

5- ضع

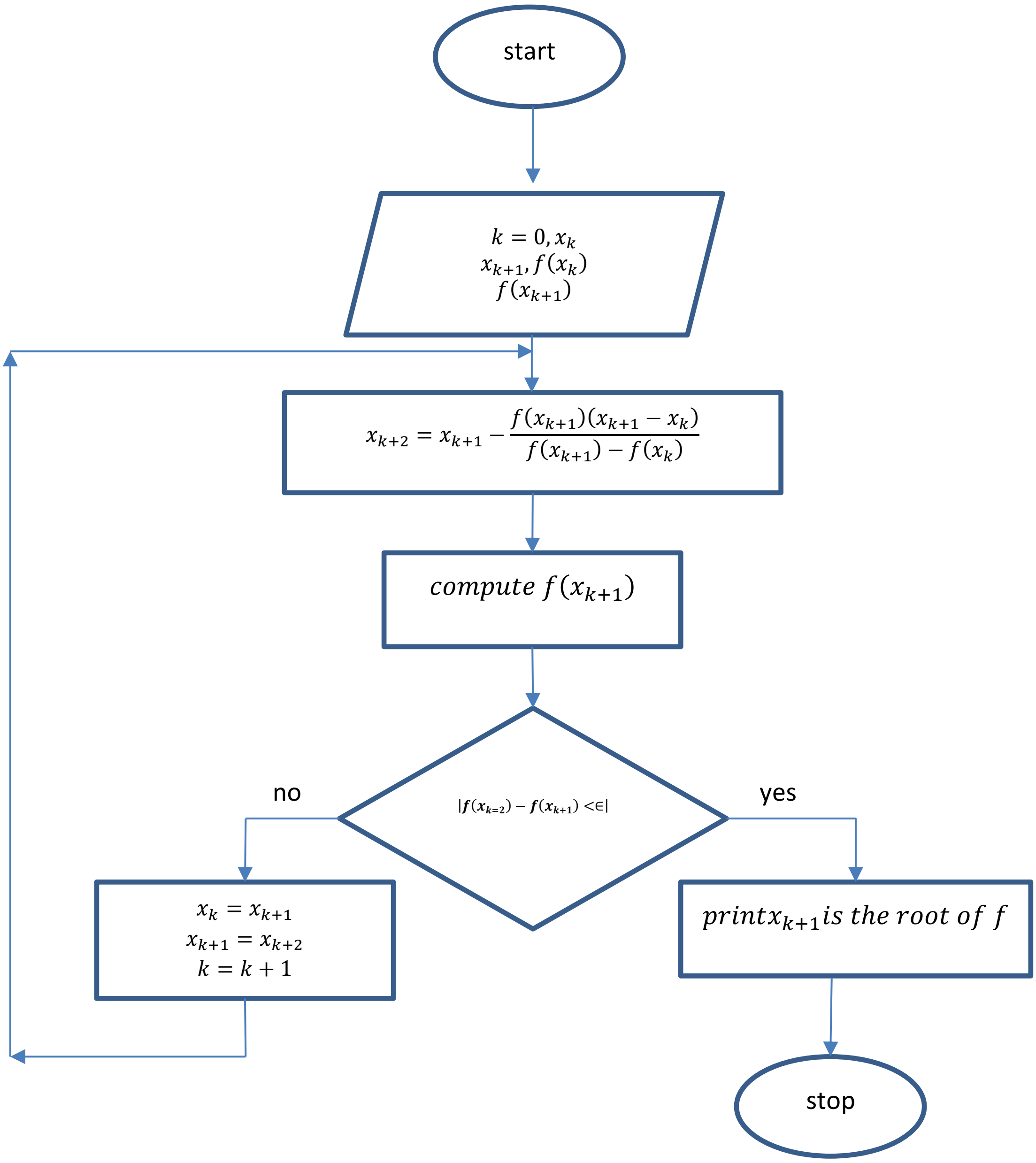
i=i+1

6- ضع $x_0 = x_1, x_1 = w$

$$y_0 = y_1, y_1 = f(x_1)$$

ثم اذهب الى الخطوة 3

فيما يلي مخطط انسيابيا لطريقه القاطع عند تنفيذها على الاله الحاسبة: -



1-5-2 خواص طريقه القاطع: -

1- سرعه التقارب لطريقه القاطع تكون فوق الخطية .
2- تحتاج الى حساب قيمه الدالة مره واحده لكل تكرار .
3- نوع الاقتراب يكون محلي لأنها تحتاج ان تكون نقاط البداية على احدى الطرفين للجذر .

1-5-3 مثال (1) جد جذر المعادلة باستخدام $f = \log x - 1$

باستخدام طريقه القاطع $x_1 = 1, x_0 = 2$ والدقه $\epsilon = 0.001$.

جدول (1) نتائج طريقه القاطع للدالة المعطاة في مثال (1)

i	x	F(x)
1	1.7213476	0.0651234-
2	1.7615471	0.0026254-
3	1.7632357	0.0000202
4	1.7632228	0.0000000

طريقه القاطع: -

ويمكن تحديد نسبه تقارب طريقه القاطع باستخدام نتيجة التي لن نقوم بأثباتها الان مبينا انه اذا كان $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} = 0$ هي متتابعه لتكرار ينتج بطريقه القاطع لحل f(x)=0 , واذا كانت المتتابعة متقاربه الى الحل x^0 , فـأن ل k كبير بما فيه الكفاية .

$$|x_{k+1} - x^0| \approx s|x_k - x^0||x_{k+1} - x^0|$$

لبعض الثابت s

نفرض ان $\{x_n\}$ تقترب الى x^0 لرتبه α . بقسمه طرفي المعادلة اعلاه ب $|x_k - x^0|$

نحصل على

$$\frac{|x_{k+1} - x^0|}{|x_k - x^0|^{\alpha}} \to c_1 \quad , \quad \frac{|x_{k-1} - x^0|^{\alpha-1}}{|x_{k-1} - x^0|} \to c_2$$

هذه الحالة فقط اذا وجد ثابت غير صفري β بحيث ان

$$\frac{|x_{k+1} - x^0|}{|x_k - x^0|^{\alpha}} = \left(\frac{|x_{k-1} - x^0|^{\alpha-1}}{|x_{k-1} - x^0|}\right)^{\beta}$$

مما يعني ان

$$\alpha = \beta \, , (\alpha - 1)\beta = 1$$

بإزالة β نحصل على المعادله

$$\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$$

الذي له الحل

$$\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618 \quad , \quad \alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0.618$$

اذ لا بد ان يكون $\alpha > 0$ معدل التقارب هو 1.618

4-5-1 مثال (2): - جد جذر المعادلة $f = x\log(x) - 1$ الواقعه ضمن الفتره $[1,2]$ والدقة $\epsilon = 0.001$ بأستخدام طريقه النقطه الصامدة.

جدول (2) نتائج طريق النقطة الصامدة للدالة المعطاة في مثال رقم (2)

i	x	F(X)
1	1.444667861009766	0.468536394613384-
2	1.998107789670768	0.383091465933331
3	1.649502126004209	0.174467896811512-
4	1.833530851750638	0.111566225253813
5	1.725291093281383	0.059033508144087-
6	1.785346181249817	0.034808669796245
7	1.750874646995649	0.019308039312598-
8	1.770289539914316	0.011088682420516
9	1.759235513562189	0.006244191191833-
10	1.765490799372761	0.003555684137996
11	1.761938693391731	0.002011965161355-
12	1.763951807726174	0.001142556402214
13	1.762809621275485	0.000647515677971-
14	1.763457255890831	0.000367387724419

6-1 طريقه نيوتن - رافسون

من الطرق التي تستخدم المشتقة وان الفكرة الأساسية لهذه الطريقة تعود للعالم نيوتن , ولكن الصيغة المستخدمة حاليا تعود الى رافسون لاشتقاق الصيغة العامة للطريقة العامة نفرض بأن لدينا قيمه تقريبيه

اوليه للجذر المطلوب λ ولتكن x_0 ونفرض ان h تمثل مقدار التصحيح الذي يجب ان نضيفه للقيمة x_0 لنحصل على الجذر المطلوب λ .

لتكن f(x) داله مستمرة وقابله للاشتقاق نختار x_0 نقطه بدايه وتكون قريبه من الجذر الحقيقي α نرسم y=f(x) نلاحظ المستقيم المماس للمنحني عند النقطة $\left(x_0, f(x_0)\right)$ يقطع المحور x في نقطه ولتكن x_1 ويتم حساب صيغه x_1 كالاتي .

من ميل المستقيم الواصل بين النقطتين

$$(x_1, 0), \left(x_0, f(x_0)\right)$$

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{0 - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$\therefore m = f'(x_0)$$

$$f'(x_0) = \frac{-f(x_0)}{x_1 - x_2}$$

$$(x_1 - x_0)f'(x_0) = -f(x_0)$$

$$\left[\therefore x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right]$$

وبعد n من الخطوات نحصل على صيغه الجذر التقريبي لطريقه نيوتن _رافسون

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

1-6-1 خواص طريقة نيوتن – رافسون: -

1- سرعه الاقتراب فيها تربيعي .
2- نوع الاقتراب محلي , لان نقطه البداية يجب ان تكون قريبة من الجذر المضبوط .
3- تتطلب حساب مشتقة الدالة عند كل تكرار ولا يمكن ضمان التقارب عندما $f^{\prime}(x) \to 0$.

2-6-1 خوارزمية طريقه نيوتن - رافسون: -

1- ادخل الدالة f(x) ومشتقتها f´(x) والنقطة الابتدائية x_0 والدقه ϵ .

2- ضع i=1 .

3- احسب $x = x_0 - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

4- اذا كان

$|x - x_0| < \epsilon$

فأن x هو الجذر وتوقف والا اذهب الى 5

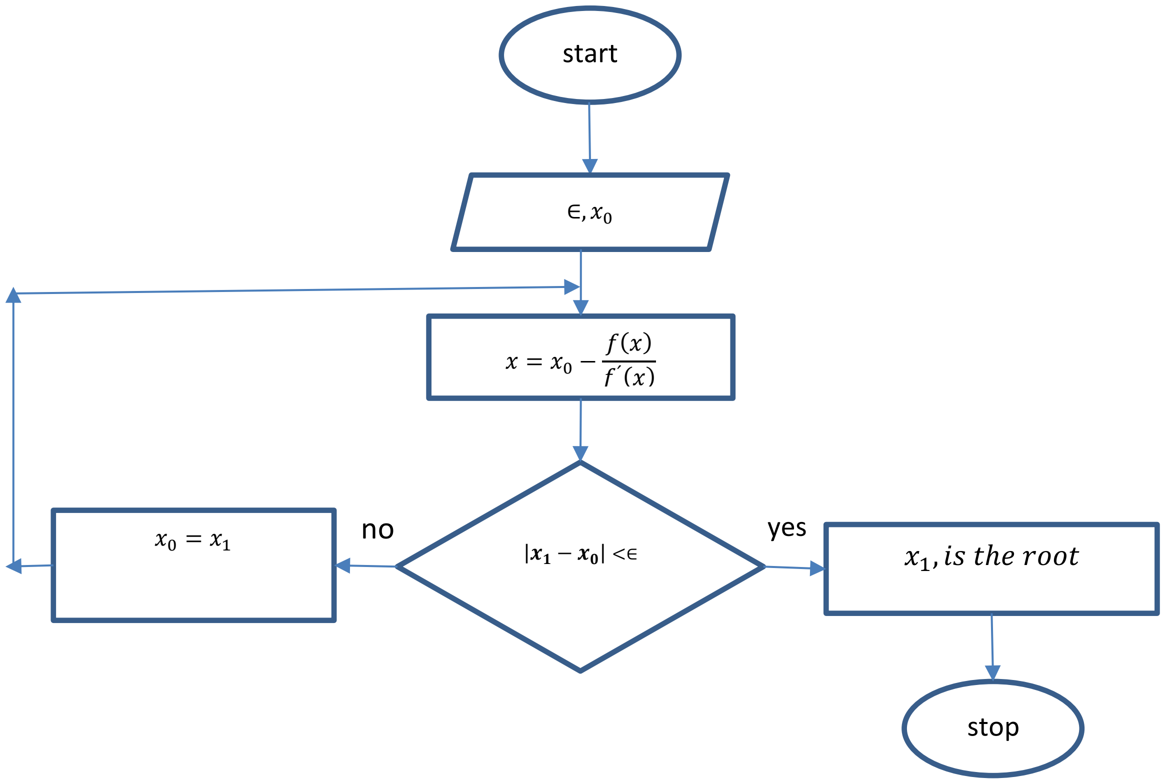
5- ضع

$x_0 = x$

i=I + 1

واذهب الى الخطوة 3.

فيما يلي مخططا انسيابيا لطريقه نيوتن - رافسون عند تنفيذها على الاله الحاسبة: -



3-6-1 مثال (1): - جد جذر المعادلة $f = x\log(x) - 1$ باستخدام طريقه نيوتن _ رافسون بأخذ $x_0 = 1$ والدقه $\epsilon = 0.001$.

جدول (3) نتائج طريقه نيوتن _ رافسون للدالة المعطاة في مثال رقم (1)

i	X	$f(x)$
1	2	1-
2	1.7781	0.3863
3	1.7632	0.0135
4	1.7632	0.0000

4-6-1 مثال (2): - جد جذر المعادلة $f = x^2 - x - 3$ عند النقطه $\epsilon = x_0 = 2.5$ $x_1 =$ 3.5 والدقه 0.001 باستخدام طريقه نيوتن - رافسون.

جدول (4) نتائج طريقه نيوتن - رافسون للدالة المعطاة في مثال رقم (2)

i	X	$f(x)$
1	2.3125	0.750000000000000
2	2.3028017241379311	0.035156250000000
3	2.302775637920729	0.000094056554697

1-2 المقدمة

هناك مسائل رياضيه عديده يكن ايجاد الحلول المضبوطة بسهوله لها , ولكن في الغالب ليس من السهل ايجاد الحلول المضبوطة لعديد من المسائل مثل المعادلات الغير خطية.

وفي حياتنا العملية ليس من الضروري اعتماد القيم المضبوطة دائما لحل مساله رياضيه او هندسيه او اي مشكله في حقل من الحقول العلمية. بل يمكن الاستعانة بقيم تقريبيه لذلك. ان وسائل ايجاد هذه الحلول التقريبية تسمى الخوارزميات. وتعرف الخوارزمية بشكل عام بأنها مجموعه من التوجيهات لتنفيذ عمليات حسابيه مصممه بشكل يؤدي الى حل المسألة المعطاة. ان معظم الخوارزميات المصممة لحل مسألة معينه تسمح لنا بإيجاد الحل بأي دقه مطلوبة باستخدام عدد محدود من الخطوات وهذه الحلول تسمى بالحلول العددية .

بما ان الحل العددي لمسألة ما يكون عاده قيمه تقريبيه للحل المطلوب لتلك المسألة لذا تكون هذه القيمة محمله بأخطاء من المهم قياسها لمعرفه دقه الحل العددي . يعرف الخطأ بأنه حاصل طرح القيمة التقريبية من القيمة المضبوطة للحل . في هذا الفصل سنستعرض عددا من الطرق العددية التي تهدف الى ايجاد قيمه تقريبيه لجذر معين للمعادلة الغير خطيه ذات متغير مستقل واحد.

2-2 الاخطاء

بما ان الحل العددي لمسألة ما عاده يكون قيمة تقريبية للحل المضبوط لتلك المسألة لذا تكون هذه القيمة محمله بأخطاء من المهم قياسها لمعرفه دقه الحل العددي. ويعرف الخطأ بصوره عامه بأنه حاصل طرح القيمة التقريبية من القيمة المضبوطة ولأجل تقليل الخطأ في الحل العددي علينا معرفه المصادر المسببة لهذا الخطأ.

3-2 الخطأ المطلق

لتكن a قيمه مضبوطة و a^* قيمه تقريبيه لها عندئذ يعرف الخطأ المطلق بـــ

$$e_a = E = |a - a^*|$$

ويعرف الخطأ النسبي بـــ

$$S_a = E_r = \frac{|a - a^*|}{a} = \frac{e_a}{|a|}, \quad |a| \neq 0$$

ملاحظة: - الخطأ النسبي أفضل من الخطأ المطلق لأنه يعطي نتائج ادق ولكن يجب تجنب التعامل مع الخطأ النسبي عندما تكون القيمة الحقيقة للجذر قريبه من الصفر.

مثال: - اذا كان جذر المعادلة معطاه هو a=2.66 باستخدام طريقه عدديه تم ايجاد جذر المعادلة وهو $a^*=2.61$ فما هو الخطأ المطلق E والخطأ النسبي E_r

الحل: -

$$E = |a - a^*| = |2.66 - 2.61| = 0.05$$

4-2 مصادر الاخطاء

ان الخطأ الحاصل في الحل التقريبي لمسألة ما هو غالبا ما يكون بسبب تراكم عده انواع من الاخطاء ويمكن تصنيف هذه الانواع كالاتي: -

1-4-2 اخطاء الصياغة: -

غالبا ما نأخذ شكلا مبسطا للمشكلة الأساسية اي قد نهمل بعض المؤثرات والعوامل اذا رأينا بأنها تبسط النموذج وفي نفس الوقت لا تؤثر على المظهر الاساسي للمشكلة , ان النتائج التي نحصل عليها من هذا النموذج المبسط تكون عاده محمله بأخطاء تسمى بأخطاء الصياغة.

2-4-2 الاخطاء الصلبية: -

في مختلف المسائل العلمية يتم الحصول على بيانات المسألة بالملاحظة او القياس وبما ان الدقة في هاتين الحالتين محدودة لذا نرى ان هذه البيانات تعاني من الاخطاء تسمى بالأخطاء الصلبية . كما ان هذا الاسم يطلق ايضا على الاخطاء في البيانات مثل الاعداد غير نسبيه حيث ان هذه الاعداد لا يمكن تمثيلها بشكل مضبوط .

2-4-3 الاخطاء الحسابية:-

تظهر الاخطاء الحسابية بصورة عامه عن طريق:

2-4-3- أ اخطاء البتر: -

وهو الخطأ الناشئ عن استبدال عمليه غير منتهيه بعمليه منتهيه .

مثال:- عند حساب قيمه داله معروفه بشكل متسلسله غير منتهيه فأن قيمه الدالة لا يمكن احتسابها باستخدام جميع حدود المتسلسلة بل نتوقف عند حد معين , هذا التوقف يولد خطأ من قيمه الدالة

$$f(x) = \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$f(2) = \sin 2 = x - \frac{2^3}{3!} + \frac{2^5}{5!} - \frac{2^7}{7!} + \dots$$

فتقطع المتسلسلة عند حل تقريبي يتناسب مع الحل المضبوط.

2-4-3- ب اخطاء التدوير (التقريب): -

ينجم هذا الخطأ عن تقريب الكسور العشرية ذات المراتب العشرية العددية الى اعداد ذات مراتب عشريه تتناسب مع طبيعة المسألة والدقة المضبوطة .

$$\frac{1}{3} = 0.333333 \cong 0.333$$

او

$$0.52357124 \cong 0.524$$

فخطأ التقريب والتدوير الحاصل هو بمثابه الفارق بين العددين .

2-4-4 الاخطاء المتراكمة: -

بعض الطرق العددية تتضمن تكرار العمليات الحسابية لخطوات متعاقبة , الخطأ في كل خطوه يزداد باعتماد الحسابات على القيم التقريبية المحسوبة في الخطوات مما يسبب بالنتيجة خطأ يسمى بالخطأ المتراكم .

2-5 تعريف (معدل التقارب)

لتكن $\{X_K\}_{k=0}^{\infty}$ متتابعه متقاربه في R وتتقارب الى X^* في R نفرض ان $X^* \neq x_k$ لكل K نقول ان التقارب لــ $\{X_K\}_{k=0}^{\infty}$ الى X^* برتبه r مع ثابت الخطأ c اذا كان

$$\frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^r} = c \quad , \quad r \geq 1 \quad , \quad c > 0$$

اذا كان r =1 نقول ان التقارب خطيه واذا r=2 فأن الطريقة تتقارب تربيعيا واذا $1 < r < 2$ نقول ان سرعه التقارب فوق الخطيه . بالطبع لم نستطع ان نستخدم الخطأ $e_k = x_k - x^*$ لتحديد معدل التقارب تجريبيا لاننا لا نعرف الحل x^* عوضا عن ذلك نستطيع ان نستخدم التغير المحلي للتكرارات المتعاقبة ولكن يجب حساب $|f(x_k)|$ بعد كل تكرار للتأكد من ان التكرار يتقارب فعلا للحل f(x)=0.

2-6 طريقه النقطة الصامدة

افرض اننا نستخدم تكرار النفطة الثابتة لحل *g(x)=x* حيث g يمكن اشتقاقه في الفترة $[a, b]$ بدلا من المعادله لحساب التكرار في تكرار النقطة الصامدة.

$$x_{k=1} = g(x_k)$$

يمكننا ان نستعمل نظريه القيمة المتوسطة للحصول على

$$e_{k+1} = x_{k+1} - x^* = g(x_k) - g(x^*) = g'(\varepsilon_k)(x_k - x^*)$$

$$g(x_k) - g(x)^* = g^{\prime}(\varepsilon_k)e_k$$

عندما ϵ_k يقع بين x_k و x^*

ويترتب على ذلك g في الفترة $[a,b]$ ويحقق الشرط

$|g^{\prime}(x)| \leq k < 1$

على (a,b) لبعض الثابت k , فأن اي تكرار ابتدائي $x_0 \in [a,b]$

التكرار في النقطة الثابتة تقترب خطيا مع خطأ التقارب الثابت $|g^{\prime}(x^*)|$, لان حسب تعريف ϵ_k والاستمرارية لـ $g^{\prime}$

$$\frac{e_{k+1}}{e_k} = |g^{\prime}(x)| = |g^{\prime}(x^*)|$$

تذكر الشرط الذي بدئنا به للتقارب الخطي متماثل تقريبا لشروط g للحصول على نقطه ثابته وحيده في $[a,b]$ الفرق الوحيد في ذلك الان , نطلب ايضا $g^{\prime}$ استمراريه على $[a,b]$. الان افرض بالإضافة الى الشرط السابق على g. نفرض ان $g^{\prime}(x^*) = 0$ وان gمستمرة وقابل للاشتقاق في $[a,b]$.

فأن باستعمال نظريه تايلور نحصل على: -

$$e_{k+1} = g(x_k) - g(x^*)$$

$$=g^{\prime}(x^*)(x_k - x^*) + \frac{1}{2}g..(\varepsilon_k)(x_k - x^*)^2$$

$$= \frac{1}{2}g^{\prime\prime}(\varepsilon_k)e_k^2$$

حيث $\in_k$ يقع بين x_k و x^* ويترتب على ذلك ان اي تكرار ابتدائي $x_0 \in [a,b]$. تكرار النقطة الثابتة تقترب على الاقل تربيعيه مع تقارب الخطأ ثابت $\left|\frac{g^{\prime\prime}(x^*)}{2}\right|$.

7-2 طريقه نيوتن

استعمال نفس طريقه كما في تكرار النقطة الصامدة , نستطيع ان نحدد التقارب لطريقه نيوتن المطبقة في المعادلة f(x)=0 حيث نفرض ان f مستمرة وقابله للاشتقاق قرب الحل المضبوط x^* وان f'' توجد قرب x^* بأستخدام نظريه تايلور نحصل على

$$e_{k+1} = x_k - x^*$$

$$= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} - x^*$$

$$= e_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$= e_k - \frac{1}{f'(x_k)}\left[f(x^*) - f'(x_k)\right](x_k - x^*) - \frac{1}{2}f''(\varepsilon_k)(x_k - x^*)^2$$

$$= e_k - \frac{1}{f'(x_k)}\left[f'(x_k) - (x_k - x^*) + \frac{1}{2}f''(\varepsilon_k)(x_k - x^*)^2\right]$$

$$= e_k - \frac{1}{f'(x_k)}\left[-f'(x_k)e_k + \frac{1}{2}f''(\varepsilon_k)e_k^2\right]$$

$$= e_k - e_k\frac{f''(\varepsilon_k)}{2f'(x_k)}e_k^2$$

$$= \frac{f''(\varepsilon_k)}{2f'(x_k)}e_k^2$$

حيث $\in_k$ بين x_k و x^* نستنتج انه اذا $f'(x^*) \neq 0$ فأن طرق نيوتن تقترب تربيعيا مع تقارب خطأ ثابت $\left|\frac{f''(\varepsilon_k)}{2f'(x_k)}\right|$ من السهل ان نرى من هذا الثابت , مع ذلك فأن $f'(x^*)$ صغيره جدا او صفر عندئذ التقارب يمكن ان يكون بطيء جدا او لا يقع.

8-2 طريقه القاطع

ويمكن تحديد نسبه تقارب طريقه القاطع باستخدام نتيجة التي لن نقوم بأثباتها الان مبينا انه إذا كان $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$هي متتابعه لتكرار ينتج بطريقه لحل $f(x) = 0$, وإذا كانت المتتابعة متقاربه الى الحل x^* , فأن ل k كبير بما فيه الكفاية.

$$|x_{k+1} - x^*| \approx s|x_k - x^*||x_{k+1} - x^*|$$

لبعض الثابت s.

نفرض ان $\{x_n\}$ تقترب الى x^* لرتبه α . بقسمه طرفي المعادله اعلاه ب $|x_k - x^*|^\alpha$ نحصل على

$$\frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^\alpha} \approx s|x_k - x^*|^{\alpha-1}|x_{k+1} - x^*|$$

لان α هو معدل التقارب الجانب الايسر يجب ان يقترب الى ثابت موجب c كما $k \to \infty$ يلي ذلك انه الجانب الايمن يجب ان تقترب الى ثابت موجب ايضا . والمتبادل ايضا . وبعباره اخرى يجب ان يكون هناك ثوابت موجبه c_1 و c_2

$$\frac{|x_k - x^*|}{|x_{k-1} - x^*|^\alpha} \to c_1 \quad , \quad \frac{|x_{k-1} - x^*|^{\alpha-1}}{|x_{k-1} - x^*|} \to c_2$$

هذه الحالة فقط إذا وجد ثابت غير صفري β بحيث ان

$$\frac{|x_k - x^*|}{|x_k - x^*|^\alpha} = \left(\frac{|x_{k-1} - x^*|^{\alpha-1}}{|x_k - x^*|}\right)^\beta$$

مما يعني

$$\alpha = \beta \quad , \quad (\alpha - 1)\beta = 1$$

بإزالة β نحصل على المعادله

$$\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$$

الذي له حل

$$\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618 \quad , \quad \alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0.618$$

اذ لا بد ان يكون $\alpha > 0$ معدل التقارب هو 1.618.

الاستنتاجات

1- يمكن إيجاد الحل العددي لمعادلة غير خطية بأكثر من طريقة عددية.

2- تكون النتائج تقريبية وفيها نسبة خطأ.

3- يمكن اختيار الطريقة الأفضل وهي التي تحتوي على اقل نسبة خطأ في إيجاد الحل العددي.

التوصيات

1- توصي الباحثتان بحل المعادلات الغير خطية عدديا باستخدام الطرق المتبعة في هذا البحث لأنها الاسهل والابسط من بين باقي الطرق العددية.

2- اجراء مقارنة لنتائج الحلول العددية للطرق المستخدمة في هذا البحث.

3- تطبيق وإيجاد الحل باستخدام برنامج الماتلاب لما يتصف به هذا البرنامج من سرعة ودقة في إيجاد النتائج.

4- التوسع في دراسة منهج التحليل العددي واغناء الطلبة بالمعارف التي تسهل عليهم حل المعادلات الغير خطية عددياً.

الخاتمة

الحمد لله تعالى الذي وفقنا في تقديم هذا البحث، وها هي القطرات الأخيرة في مشوار هذا البحث..)، وقد بذلنا كل الجهد لكي يخرج في هذا الشكل. ونرجو من الله أن تكون رحلة ممتعة وشيقة. شكرا لكل شخص وقف الي جانبنا ووصلنا الي هذه الدرجة من التقدم. شكرا للأهل والاصدقاء والي مشرفنا استاذ ساجد، ونحن قدمنا كل الجهد لهذا البحث، فإن وفقنا فمن الله عز وجل وإن أخفقنا فمن أنفسنا، وكفانا نحن شرف المحاولة، واخيراً نرجو أن يكون هذا البحث قد نال إعجابكم. وصل اللهم وسلم وبارك تسليما كثيراً على معلمنا الأول وحبيبنا وسيدنا محمد عليه أفضل الصلاة والسلام.

المصادر

1- التحليل العددي (عمر التومي واحمد حمر الشوشة).

2- مبادئ التحليل العددي (د. علي محمد صادق سيفي، د. ابتسام كمال الدين)

3- التحليل العددي وطرق حسابه، تأليف أ.د. محمد منصور صبح، كلية المعلمين مكة المكرمة قسم الرياضيات، د. صالح بن منيع الحربي، كلية المعلمين مكة المكرمة رئيس قسم الرياضيات – مكتبة رشد.

4- Applied Numerical Methods Using MATLAB - Yang Cao Chung and Morris, Copyright 2005 John Wiley & Sons, Inc., ISBN 0-471-69833-4

5- Numerical Analysis MINH EDITION. by Richard L. Burden, Douglas Faires, Copyright 2010 Cengage Learning, All Right Reserved. May.

6- NUMIRECAL METHOD IN ENGINEERING WITH MATLAB (Second Edition) Jaan Kiusalaas (Pennsylvania State University).

7- www.matlab.com

8- MATLAB Help

الفصل الأول

الحلول العددية للمعادلات الغير الخطية

الفصل الثاني

انواع الاخطاء والحسابات التقريبية