

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة ديالى

كلية التربية المقداد / قسم الرياضيات

محاضرات مادة

الإحصاء والاحتمالية

للعام الدراسي (2023-2024)

المرحلة الثالثة

Chapter one

مدرس المادة: م.م هند إبراهيم محمد

Probability and Statistics

Chapter one : Descriptive Statistics

(١) علم الاحصاء : هو الطريقة العلمية التي تختص بجمع البيانات والمقائف عن ظاهرة أو فرضية (ظواهر أو فرضيات) معينة ، وتنظيم وترتيب وتبويب هذه البيانات والمقائف بالشكل الذي يسهل كمنية تحليلها وتفسيرها ومن ثم استخلاص النتائج واتخاذ القرار على ضوء ذلك .

وبشكل عام ان هذا العلم يعتبر جمع لفريتين رئيسيتين هما :

(٢) الاحصاء الوصفي (Descriptive Statistics)

وهو العلم الذي يتقن الطرق والاساليب المستخدمة في جمع البيانات والمعلومات عن ظاهرة معينة أو مجموعة من الظواهر ، وكيفية تنظيم وتصنيف وتبويب هذه البيانات مع امكانية عرضها في جداول ورسومات بيانية ، ومن ثم حساب بعض المؤشرات الاحصائية منها .

(ب) الاحصاء الاستدلالي (الاستنتاجي) (Inferential Stat.)

وهو العلم الذي يهتم بموضوعي التحمين (Estimation) واختبار الفرضيات (Testing of hypothesis) .

(٣) المجتمع (Population) : هو جميع صفات أو وحدات الظاهرة تحت

البحث ، فقد يكون المجتمع مكون من مجموعة من الناس أو مجموعة من المنازل في منطقة معينة أو وحدات سلع معينة ينتجها عمل معين وهكذا . والمجتمعات على انواع ك مجتمعات محددة (finite) تضم عدداً محدوداً من الافراد مثل مجموعة التمثيل في بستان معين أو مجتمعات غير محددة تضم عدد غير منتهى مثل عدد النجوم في السماء .

وقد يكون المجتمع متماثل اي ان كل مفردة من مفرداته تحمل نفس الصفة مثل فصيلة الدم لدى الانسان أو غير متماثل مثل الاطوال والاوزان . وقد يكون المجتمع صغيراً أو كبيراً ، معتمداً على حجم المجتمع .

يرمز لحجم المجتمع بالرمز (N) .

(٤) العينة (Sample) : هي جزئ من المجتمع يجري اختيارها وفق

قواعد خاصة لكي تمثل المجتمع تمثيلاً صحيحاً .

العينة العشوائية Random Sample

هي مجموعة وحدات إحصائية تختار من المجتمع إحصائي على ضوء أساس خاص. فتؤخذ من كل طبقات المجتمع وينسب معينة بحيث تمثل المجتمع تمثيلاً صحيحاً، أي يجب أن تكون عينة متماثلة. ومن فوائد اختيار العينة أننا نصل المجتمع فتقل بذلك الوقت والجهد والإمكانات المادية.
يرمز لحجم العينة بـ (n).

البيانات (Data) هي المعلومات والأرقام والإعداد التي تجمع عن ظاهرة معينة قيد الدراسة مثل أطوال الطلبة للمرحلة الثالثة في قسم الرياضيات في جامعة بغداد.

تجويد البيانات هي عملية ترتيب وتكثيف البيانات الخام التي جمعت عن ظاهرة معينة قيد الدراسة بطرق معينة، لكي تكون هذه البيانات واضحة وبسهولة الفهم والوصف لاستخلاص النتائج منها.

البيانات على نوعين
١- بيانات هجوية Group Data
٢- بيانات غير هجوية Ungroup Data

البيانات غير الهجوية (Ungroup Data)

١- مقاييس النزعة المركزية (Measure of Central Tendency)
٢- مقاييس التشتت والاختلاف (Measurement of Variations)

١- مقاييس النزعة المركزية :

هناك بعض القيم تتركز حولاً مغزلات المجتمع تسهل هذه القيم (نقطة الوسط) أو (نقطة التركز) .. وتعمل هذه النقاط بمقاييس النزعة المركزية ومن أهم هذه المقاييس : الوسط الحسابي ، الوسط الهندسي ، الوسط الموزون ، الوسط التوافقي ، الوسط فوق الهندسي ، الوسط ، المنوال .

① الوسط الحسابي (المعدل) : (Arithmetic Mean)

الوسط الحسابي للعينة : $\bar{X}$

$$\bar{X} = \frac{\text{مجموع المغزلات}}{\text{عددها}}$$

لنكن n حجم العينة (عدد مغزلات العينة)

X_1 و X_2 و ... و X_n مغزلات العينة

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$$

متغيرين من عينة إلى آخر متغيرين مغزلات عينة.

الوسط الحسابي للمجتمع μ

$$\mu = \frac{\text{مجموع المفردات}}{\text{عددها}}$$

ليكن $x_1, x_2, \dots, x_n$ مفردات المجتمع
 وان μ حجم المجتمع (عدد مفردات المجتمع)
 ويعتبر μ ثابت (معلمة) لان عدد مفردات
 المجتمع ثابت لا يتغير.

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{N}$$

ان الوسط الحسابي $\bar{x}$ أو μ عندما تكون اوزان المجتمع متساوية .
 اما اذا كانت الاوزان غير متساوية فنستخدم (الوسط الحسابي الموزون)

(الوسط الموزون) : (Weighted Mean)

عندما تكون الاوزان لمفردات المجتمع غير متساوية ، نستخدم كل مفردة
 مع وزنها (weight) w ، ويدعى هذا المقياس (بالوسط الموزون أو المرجح).

$$\bar{x}_w = \frac{\sum_{i=1}^n w_i x_i}{\sum_{i=1}^n w_i}$$

x_i مفردات المجتمع
 w_i اوزان المجتمع
 $i = 1, 2, \dots, n$

مثال البيانات الآتية تمثل الدرجات التي يحصل عليها أحد الطلبة وعمود
 الساعات الاسبوعية لكل مادة ، ويطلب إيجاد الوسط الحسابي أو معدل درجات
 هذا الطالب :

الدرجة	80	85	70	78	90	98	65
الساعات الاسبوعية	3	2	4	3	2	3	2

الساعات الاسبوعية تمثل الاوزان ، لذلك نستخدم الوسط الحسابي الموزون :

$$\bar{x}_w = \frac{\sum_{i=1}^7 w_i x_i}{\sum_{i=1}^7 w_i} = \frac{3(80) + 2(85) + \dots + 2(65)}{3 + 2 + \dots + 2} = 79.95$$

مميزات الوسط الحسابي (Mean)

- ١- سهولة حسابه .
- ٢- يدخل في حسابه جميع مفردات المجتمع التي تمثل .
- ٣- يتأثر بوجود القيم المتطرفة سواء كانت صغيرة أم كبيرة ، وهذا عيب فيه .
- ٤- مجموعة الانحرافات القيم عن الوسط الحسابي يساوي صفر .

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = \text{Zero}$$

(Prove that).

⑥ الوسط (Median)

هو القيمة التي تحتل المرتبة الوسطى بعد ترتيب القيم قيد الدرس (البيانات) ترتيباً تصاعدياً أو تنازلياً .

أصله

- ① وسط مجموعة الأرقام 10, 10, 8, 8, 6, 5, 4, 4, 3 . هو 6 .
 ② وسط مجموعة الأرقام 18, 15, 14, 11, 9, 7, 5, 5, 3 هو $10 = \frac{9+11}{2}$

وبصورة عامة: ان مرتبة الوسط (R) هي :

$$R = \frac{n+1}{2}$$

وان الوسط هو القيمة المتوسطة (اذا كان عدد المفردات n فردياً)
 وان الوسط هو متوسط القيمتين الوسطيتين (اذا كان عدد المفردات n زوجياً)

مثال ① اذا كانت البيانات الآتية تمثل الأطوال بالسنتيمتر، جد الوسط لها .

110, 106, 113, 116, 102, 114, 111

الحل: ترتيب القيم تصاعدياً فنحصل على:

102, 106, 110, 111, 113, 114, 116 (عدد البيانات زوجي)
 $n = 7$

$$R = \text{رتبة الوسط} = \frac{n+1}{2} = \frac{7+1}{2} = 4$$

هو الوسط (M) = 111 (المرتبة الرابعة)

مثال ② جد وسط البيانات الآتية :

7, 8, 7, 12, 10, 13, 15, 17

الحل: ترتيب المفردات تصاعدياً :

7, 8, 9, 10, 12, 13, 15, 17 (عدد البيانات زوجي)
 $n = 8$

$$R = \text{رتبة الوسط} = \frac{n+1}{2} = \frac{8+1}{2} = 4.5$$

هو الوسط (M) = معدل القيمتين الوسطيتين (المرتبة الرابعة والخامسة)
 $11 = \frac{10+12}{2}$

⑦ المنوال (Mode)

هو القيمة التي تتكرر أكثر من غيرها أو هو القيمة الأكثر شيوعاً وتكراراً بين مجموعة قيم الظاهرة قيد الدرس .
 وهناك منوال رئيس ومنوال ثانوي .

وهناك مجموعة من القيم ذات منوال واحد واخرى ذات منوالين أو قد تكون عديمة المنوال (ليس لها منوال) .

① مجموعة القيم: 18 و 12 و 11 و 10 و 9 و 9 و 9 و 7 و 2 و 2 و 5 .
لها متوسط واحد هو (9)

$$\therefore M_o = 9$$

② مجموعة القيم: 16 و 15 و 12 و 10 و 8 و 5 و 3 .
ليس لها متوسط .

③ مجموعة القيم: 9 و 7 و 7 و 7 و 5 و 5 و 5 و 4 و 4 و 3 و 2 .
لها متوسطان هما 4 و 7 .

١٣

ما العلاقة بين الوسط والوسيط والمنوال ؟

٢- في حالة التوزيعات المتماثلة (المنظمة) : كالتوزيع الطبيعي ، فان المقاييس الثلاثة تكون متساوية .

$$\text{i.e. } M_e = M_o = M$$

٣- في حالة التوزيعات غير المتماثلة (غير المنظمة) : فان المنوال والوسيط هما الأكثر تمثيلاً للمركز وان :

$$\text{الوسط الحسابي} = \frac{3(\text{الوسيط}) - \text{المنوال}}{2}$$

$$\text{i.e. } \bar{X} = \frac{3M_e - M_o}{2}$$

ب - مقاييس التشتت أو الاختلاف

وهي مقاييس تقيس مدى تشتت القيم المختلفة في ظاهرة طبيعية عن الوسط الحسابي أو مقاييس النزعة المركزية ، ومن هذه المقاييس :
المدى ، التباين ، الانحراف المعياري ، الخطأ المعياري ، معامل الاختلاف ، الانحراف التربيعي .

① المدى (Range) وهو احد مقاييس التشتت ويصل الفرق بين القيمة

العليا والقيمة الدنيا لمجموعة المفردات .

ومن عيوب هذا المقياس انه لا يهتم سوى بمفردتين فقط هي القيمة العليا والدنيا ونتيجة لذلك لا يهتم بالاختلافات الموجودة بين المفردات الباقية ، فهو لا يهتم بحجم العينة فلا يمكن استخدامه كمقياس للمقارنة بين العينات عند اختلاف حجم العينة . ومن ناحية اخرى قد تكون القيم المتطرفة هي القيم العليا أو الدنيا وهذا عيب كبير وبذلك لا يعتبر هذا المقياس كفوفاً كلما زاد عدد مفردات العينة .

المدى (Range) :
هو الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة
من قيم الظاهرة (المفرات).

أمثلة

① مدى البيانات الآتية :

45, 50, 55, 60, 65

$$R = L - u = 65 - 45 = 20$$

② مدى البيانات الآتية (الافران) :

45, 100, 45, 55, 95, 50 كغم

$$R = 45 - 100 = 55 \text{ كغم}$$

⑤ التباين والانحراف المعياري (Variance & Standard Deviation)

ان مقاييس التشتت (المدى) تقيس مدى اقتراب أو ابتعاد القيم للعينة (المفرات) عن نظام التركيز (الوسط الحسابي ونحوه) .. ولكل مشكلة اختلافات موجودة في مفرات العينة أو المجتمع ، نستخدم مقاييس الوسط الحسابي لكن المشكلة في ان مجموع الانحرافات القيم عن الوسط الحسابي = صفر ، ولغرض التخلص من القيم السالبة في الانحرافات ، طرأت فكرة تربيع هذه الانحرافات ليدل على مدى الاختلافات ولإزالة التخلص من مشكلة آخرها هي حجم المجتمع أو العينة ، ثم القسمة على عدد مربعات الانحرافات القيم . فتكون مقياس جديد يسمى التباين (Variance) الذي يرمز له (S^2) ويُقرأ (سكواسكوير) للعينة أما للمجتمع فان رمزها (σ^2) :
صيغة تباين المجتمع :

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(x_i - \mu)^2}{N - 1}$$

أما صيغة تباين العينة :

$$S^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$$

وان استخدم $(n-1)$ بدلاً من (n) الذي هو حجم العينة يعود الى اعتبارات رياضية تتعلق بالتقديرات غير المتحيزة وتسمى $(n-1)$ بدرجات الحرية (degree of freedom).

أما الانحراف المعياري : (Standard deviation) : هو الجذر التربيعي للتباين

$$\sigma = +\sqrt{\sigma^2}$$

$$S = +\sqrt{S^2}$$

الانحراف للمجتمع

الانحراف للعينة

مثال) جد التباين للقيم الآتية التي تمثل وزن اللحم الصافي لستة رؤوس من الضم .. تمثل مجتمعاً قائماً بذاته :

35 و 34 و 40 و 38 و 37 و 32 (كغم)

Sol.

الوسط الحسابي للمجتمع

$$\mu = \frac{35 + 34 + 40 + 38 + 37 + 32}{6} = \frac{216}{6} = 36 \text{ كغم}$$

(تباين المجتمع) ويعني تباين كل قيمة عن الوسط الحسابي μ للمجتمع .

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^6 \frac{(x_i - 36)^2}{6-1} = \frac{42}{5} = 8.4 \text{ (كغم}^2\text{)}$$

(نفس المثال أعلاه لكن للعينة)

الوسط الحسابي للعينة

$$\bar{X} = \frac{35 + 34 + \dots + 32}{6} = 36 \text{ كغم}$$

$$S^2 = \sum_{i=1}^6 \frac{(x_i - 36)^2}{6} \quad (\text{تباين العينة})$$

$$= \frac{42}{5} = 8.4$$

البيانات المجمعة (Group Data)

1- مقاييس النزعة المركزية - مقاييس التشتت والاختلاف .

2- مقاييس النزعة المركزية :

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i f_i}{\sum_{i=1}^k f_i}$$

① الوسط الحسابي :

x_i = يمثل مركز الفئة ؛

f_i = يمثل تكرار الفئة ؛

k = يمثل عدد الفئات .

② الوسط : لذيها الوسط تتبع الخطوات الآتية :

① ترتيب الفئات تصاعدياً ثم إيجاد التكرار المتجمع الصاعد .

③ إيجاد رتبة الوسط بالصيغة :

$$R = \frac{\sum f_i + 1}{2} = \frac{n+1}{2}$$

④ تحديد الفئة الوسطية من خلال مقارنة رتبة الوسط و موقعها في أول تكرار متجمع صاعد .

⑤ نستخدم الصيغة التالية في إيجاد الوسط :

$$Me = Le + \frac{R - G_1}{G_2} \times We$$

حيث أن :

(V)

L_e = الحد الأدنى للفئة الوسيطة

W_e = طول الفئة الوسيطة

G_1 = التكرار المتجمع الصاعد للفئة قبل الوسيطة

G_2 = تكرار الفئة الوسيطة

(٣) المنوال : لا يجاز المنوال يجب تحديد الفئة المنوالية أولاً وهي الفئة التي تقابل أكبر تكرار ونستخدم الطريقة الآتية :

حيث أن :

$$M_o = L_o + \frac{D_1}{D_1 + D_2} \times W_o$$

L_o : الحد الأدنى للفئة المنوالية

D_1 : الفرق بين تكرار الفئة المنوالية وتكرار الفئة قبل المنوالية

D_2 : الفرق بين تكرار الفئة المنوالية وتكرار الفئة بعد المنوالية

W_o : طول الفئة المنوالية

ب - مقاييس التشتت واختلاف :

① المدى :

حيث أن :

$$R = X_L - X_S$$

X_L = الحد الأعلى للفئة الأخيرة

X_S = الحد الأدنى للفئة الأولى

② الانحراف المعياري والتباين :

ليكن :

f_i = التكرار المقابل لمركز الفئة x_i

$$S = \sqrt{S^2} = \text{الانحراف المعياري}$$

x_i = مركز الفئة = $\left(\frac{\text{الحد الأعلى للفئة} + \text{الحد الأدنى للفئة}}{2} \right)$

k = عدد الفئات

$$\underline{\underline{S^2}} = \frac{\sum_{i=1}^k f_i x_i^2}{\sum_{i=1}^k f_i - 1} - \frac{\left(\sum_{i=1}^k f_i x_i \right)^2}{\sum_{i=1}^k f_i (\sum_{i=1}^k f_i - 1)}$$

Classes	frequency (f _i)	البيانات الآتية : x _i (mid point)	جد الوسط والوسط والمنوال للبيانات x _i f _i	H.W. c. f.	الترتيب المتجمع (الصاعد)
25-35	2				
35-45	5				
45-55	12	?	?	?	
55-65	13				
65-75	20				
75-85	15				
85-95	8				
95-1.5	5				

(٨)

مثال: جد الوسط (Mean) والوسيط (Median) والمنوال (Mode) والتباين (Variance) والانحراف المعياري (S.d.) والطرف (Range) لطول السبات، التالية:

Classes	f_i	x_i	$x_i f_i$	C.f.
2-4	3	3	9	3
4-6	5	5	25	8
6-8	2	7	14	10

$n = \sum f_i = 10$
 يساوي
 دالة

$$n = \sum f_i = 10, \sum x_i = 15, \sum x_i f_i = 48$$

$$\bar{X} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \bar{X}_w \quad (\text{Mean})$$

$$Me = L_e + \frac{R - G_1}{G_2} \times w_e \quad (\text{Median})$$

$$= 4 + \frac{5.5 - 3}{5} \times 2 = 5 \in (4-6) \quad \text{الفترة الوسطية}$$

$$Mo = L_o + \frac{D_1}{D_1 + D_2} \times w_o \quad (\text{Mode})$$

$$= 4 + \frac{(5-3)}{(5-3) + (5-2)} \times (2)$$

$$= 4 + \frac{(2)(2)}{2+3} = 4 + \frac{4}{5} = \frac{24}{5} = 4.8$$

$$R = X_L - X_s = 8 - 2 = 6 \quad (\text{Range})$$

$$S_x^2 = \frac{\sum x_i^2 \cdot f_i}{\sum f_i - 1} - \frac{(\sum x_i f_i)^2}{\sum f_i (\sum f_i - 1)} \quad (\text{Variance})$$

تكمّل عن طريق الجدول:

x_i	x_i^2	$x_i f_i$	$x_i^2 f_i$	f_i
3	9	9	27	3
5	25	25	125	5
7	49	14	98	2

$$\begin{aligned} \sum f_i &= 10 \\ \sum f_i - 1 &= 9 \\ \sum x_i f_i &= 48 \\ \sum x_i^2 f_i &= 205 \\ (\sum x_i f_i)^2 &= (48)^2 = 2304 \end{aligned}$$

الارتباط والانحدار

Correlation and Regression

الارتباط (Correlation)

هو العلاقة التي تربط بين ظاهرتين أو أكثر، وهو على أنواع منها :
الارتباط البسيط ، الارتباط المتعدد ، الارتباط الجزئي .

الارتباط البسيط (Simple Correlation)

لمعرفة العلاقة بين ظاهرتين X و Y ونوع هذه العلاقة ، نستخدم مؤشراً احصائياً يدعى (معامل ارتباط البسيط) (Simple Correlation Coefficient) حيث ان r يمثل المتغير المعتمد (التابع) و X هو المتغير المستقل . ويؤخذ لهذا المعامل بالرمز (r) حيث

$$-1 \leq r \leq +1$$

تعني الإشارة السالبة ان العلاقة بين الظاهرتين عكسية وضعيفة .
اما الإشارة الموجبة ان العلاقة بين الظاهرتين طردية وقوية .
والصيغة لهذا المعامل :

$$r_{xy} = \frac{n \sum xy - \sum x \sum y}{\sqrt{[n \sum x^2 - (\sum x)^2][n \sum y^2 - (\sum y)^2]}}$$

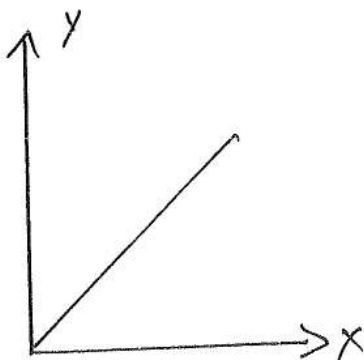
حيث ان n تمثل حجم العينة = عدد بيانات في كل عود (عدد بيانات X = عدد بيانات Y)

If $r_{x,y} \in (0, 1] \rightarrow$ معامل ارتباط قوي

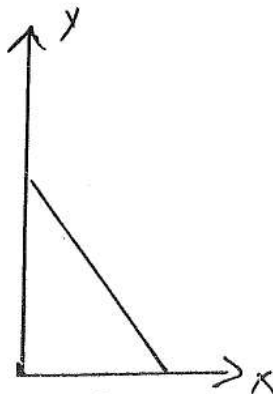
If $r_{x,y} \in [-1, 0) \rightarrow$ معامل ارتباط ضعيف

If $r_{x,y} = 1 \rightarrow$ معامل ارتباط تام

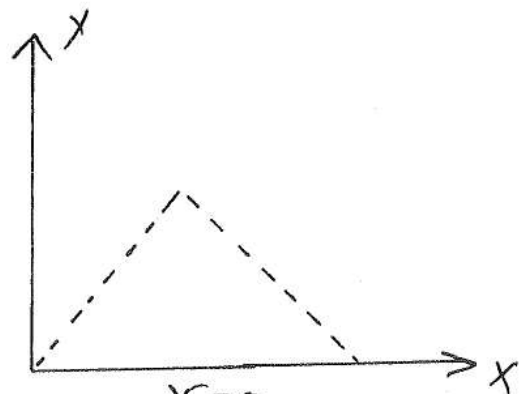
If $r_{x,y} = 0 \rightarrow$ لا يوجد ارتباط بين X و Y



معامل ارتباط طردي



معامل ارتباط عكسي



$r=0$
لا توجد علاقة بين X و Y

note : $r_{x,y} = r_{y,x}$

(١٠)

اما معامل الارتباط البسيط للمعتق :

$$r_{x,y} = \frac{N \sum xy - (\sum x)(\sum y)}{\sqrt{N \sum x^2 - (\sum x)^2} [N \sum y^2 - (\sum y)^2]}$$

مثال : صممت تجربة لدراسة تأثير زيارة جبهة منوم معين في وقت النوم ، وتم تكوين ثلاث قراءات لكلمة من المستويات الثلاثة للجبهة ، والمطلوب معرفة اذا كانت هناك علاقة بين الجبهة ووقت النوم .

الجبهة (y)	وقت النوم (x)	xy	x ²	y ²
3	4	12	16	9
3	6	18	36	9
3	5	15	25	9
10	9	90	81	100
10	8	80	64	100
10	7	70	49	100
15	13	195	169	225
15	11	165	121	225
15	9	135	81	225
84	72	780	642	1002

$$r_{x,y} = \frac{9(780) - (72)(84)}{\sqrt{[9(642) - (72)^2][9(1002) - (84)^2]}} = \frac{972}{1079.55}$$

$$= 0.9 \in [0.5]$$

∴ العلاقة قوية وطردية بين الجبهة ووقت النوم

ملاحظة : اذا كانت كلا الظاهرتين غير قابلة للقياس ، نستطيع ايجاد العلاقة بين الظاهرتين باستخدام (معامل ارتباط لسبيرمان) ، وذلك باعطاء ترتيب الخانات أم البيانات غير قابلة للقياس ثم نستخدم الصيغة الآتية :

$$r = 1 - \frac{6 \sum D_i^2}{N(N^2 - 1)} \quad (\text{معامل لسبيرمان للترتيب})$$

D_i : تمثل فرق الترتيب لكل زوج

N : تمثل عدد القيم الغير قابلة للقياس (الغير كمية) .

مثال جد العلاقة بين درجة الطالبين A و B من إجابات الآتية:

A	B	$D_i(A-B)$	D_i^2
(4) جيد	(2) مقبول	2	4
(2) مقبول	(5) جيده جداً	-3	9
(1) ضعيف	(2) مقبول	-1	1
(4) جيد	(3) متوسط	1	1
(5) جيده جداً	(4) جيد	1	1
(4) جيد	(3) متوسط	1	1

$N = 6$ (عدد إجابات)

$$\sum D_i^2 = 17$$

* نرتب أولاً تصاعدياً ثم نضع ترتيب

- (1) ضعيف
(2) مقبول
(3) متوسط
(4) جيد
(5) جيده جداً

$$r_{A,B} = 1 - \frac{6 \cdot \sum D_i^2}{N(N^2-1)} = 1 - \frac{6 \cdot (17)}{6(6^2-1)}$$

$$= 0.51 \in (0, 1] \text{ (العلاقة قوية موجبة)}$$

مثال آخر (A و B)

A	B	D_i	D_i^2
(3) متوسط	(5) جيده جداً	-2	4
(1) ضعيف	(3) متوسط	-2	4
(4) جيد	(2) مقبول	2	4
(3) متوسط	(5) جيده جداً	-2	4
(5) جيده جداً	(3) متوسط	2	4

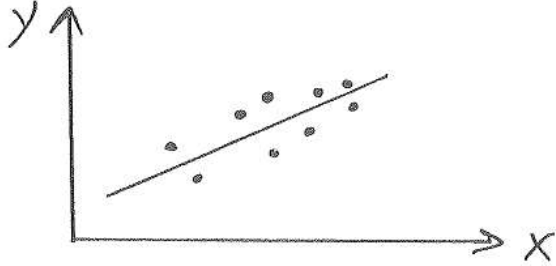
$$N = 5, \sum D_i^2 = 20$$

$$r_{A,B} = 1 - \frac{6(20)}{5(5^2-1)} = ?$$

* ما نوع العلاقة بين A و B؟

الانحدار Regression

شكل الانتشار (Scatter diagram) هو كل زوج من ا좌اح القدم التي تمثل متغيرين تابعين متعامدين وعلى شكل نقاط (points) وهذا الشكل في اغلب الاحيان يمثل علاقة دالية وذات اتجاه مستقيم (دالة خطية)



خط الانحدار (Linear Regression)

هو الخط الذي يمر بأكثر عدد ممكن من النقاط في شكل الانتشار. اما معادلة خط الانحدار فهي:

$$Y = \alpha + \beta X + e$$

حيث ان:

- α : هي المسافة بين نقطة تقاطع خط الانحدار مع المحور Y ونقطة الاصل.
- β : هي ميل خط الانحدار أو ظل الزاوية التي يصنعها خط الانحدار مع المحور X.

$$\text{i.e. } \beta = \tan \theta \Rightarrow \theta = \tan^{-1} \beta$$

e : هو الخطأ الذي يمثل الفرق بين القيمة الحقيقية والتقديرية لـ Y

$$\text{i.e. } e_i = Y_i - \hat{Y}_i \quad (\text{تقرأ بـ } \hat{Y})$$

$$\text{if } e_i = 0 \Rightarrow Y_i = \hat{Y}_i$$

اما المعادلة التقديرية المستخدمة لحساب خط الانحدار هي:

$$\hat{Y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X$$

حيث ان:

- $\hat{Y}$: القيمة التقديرية لـ Y .
- $\hat{\beta}$: القيمة التقديرية لـ β .
- $\hat{\alpha}$: القيمة التقديرية لـ α .

فحسب الدالة $\hat{Y}$ حيث يكون الخطأ e اقلا ما يمكن كما ويمكن حساب قيمة $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ باستخدام طريقة المربعات الصغرى في الحساب (Least Square).

$\hat{\beta}$ تكون (معامل الانحدار) حيث ان ($\hat{\beta} = 0$) يعني لا توجد علاقة بين X و Y واذا كانت $\hat{\beta}$ قيمة سالبة يعني ان العلاقة عكسية بين X و Y واذا كانت $\hat{\beta}$ قيمة موجبة يعني ان العلاقة بين X و Y طردية.

ليكن $\bar{X} \equiv \text{mean of } X$ و $\bar{Y} \equiv \text{mean of } Y$ فان:

لايجاد $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ باستخدام طريقة المربعات الصغرى حيث ان $r_{x,y}$ يمثل (معامل الارتباط البسيط) وان δ هو الانحراف المعياري:

$y x$	$x y$
$\hat{\beta} = \frac{n \sum xy - \sum x \sum y}{n \sum x^2 - (\sum x)^2}$ $= \frac{s_y}{s_x} \cdot r_{x,y}$ $\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta} \bar{x}$	$\hat{\beta} = \frac{n \sum xy - \sum x \sum y}{n \sum y^2 - (\sum y)^2}$ $= \frac{s_x}{s_y} \cdot r_{x,y}$ $\hat{\alpha} = \bar{x} - \hat{\beta} \bar{y}$

ملاحظة ان مفهوم الانحدار الخطي على صيغة وثيقة بمفهوم الارتباط الخطي ، حيث ان الانحدار يقدّر العلاقة الخطية بين المتغيرات اما الارتباط الخطي فهو يصف العلاقة بين المتغيرات (يصف العلاقة نفسها).

مثال (١) اجريت احدي التجارب لدراسة تأثير عقار معين في تخفيض دقات القلب لغير البالغين حيث ان المتغير المستقل (X) يمثل الجرعة بالمليغم من العقار والمتغير المعتمد (Y) يمثل الانخفاض في دقات القلب (دقة لا دقيقة).
 ① ارسم شكل الانتشار ② جد معادلة خط الانحدار التقديرية .
 ③ جد مقدار الانخفاضات في دقات القلب عندما تكون الجرعة (٣) مليغم .

X	Y	X ²	XY	ليجاد معادلة خط الانحدار التقديرية
0.5	10	0.25	5	$\hat{\beta} = \frac{(8)(152.5) - 11(102)}{8(17.75) - (11)^2}$ $\hat{\beta} = 4.67$ $\hat{\alpha} = \frac{102}{8} - 4.67\left(\frac{11}{8}\right)$ $= 6.33$ $\hat{y} = 6.33 + 4.67X$
0.75	8	0.5625	6	
1.00	12	1	12	
1.25	12	1.5625	15	
1.5	14	2.25	21	
1.75	12	3.0625	21	
2.00	14	4	32	
2.25	18	5.0625	40.5	
11	102	17.75	152.5	
				غندما (y x)

$$\hat{y}(3) = 6.33 + 4.67(3)$$

$$= 20.34$$

② ليجاد $X(3)$:
 i.e. $X = 3$

Chapter one

Descriptive Statistics

Ungrouped Data (البيانات غير المجموعة)

① جد الوسيط للأرقام التالية:

وسيطها هو (6) . 3, 4, 4, 5, 6, 8, 8, 8, 10

نرتب الأعداد تصاعدياً (رتنازلياً): 3, 4, 4, 5, 6, 8, 8, 8, 10

الوسيط هو (6) الذي يحتل المرتبة الرابعة . 3, 4, 4, 5, 6, 8, 8, 8, 10

لايجاد الوسيط نرتب الأعداد تصاعدياً: 3, 4, 4, 5, 6, 8, 8, 8, 10

هناك مرتبتان وسيطيتان هما المرتبة الرابعة والخامسة (عدد القيم زوجي) وبه
بالطريقة التالية:
 $Me = (4 + 5) / 2 = 4.5$

② درجات طالب في ستة امتحانات كانت 84, 91, 72, 68, 87, 78 أوجد وسيط هذه الدرجات .

عدد الدرجات زوجي فان هناك قيمتين في الوسط 84, 78 ووسطهما الحسابي هو $(84 + 78) / 2 = 81$ وهو الوسيط .

③ درجات طالب في ستة امتحانات هي 84, 91, 72, 68, 87, 78 أوجد الوسيط الحسابي لهذه الدرجات .

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^6 X_i}{6} = \frac{84 + 91 + 72 + 68 + 87 + 78}{6} = \frac{480}{6} = 80$$

④ من مائة رقم (20) أربعة (40) خمسة (30) وستة (10) أوجد الوسيط الحسابي لهذه الأرقام .

$$\bar{X} = \frac{\sum w_i X_i}{\sum w_i} = \frac{(20)(4) + (40)(5) + (30)(6) + (10)(7)}{100} = \frac{530}{100} = 5.30$$

٥) رتب الأرقام 85 رقماً و 150 رقماً، ما وسيطهما؟

85 رقم فردي .. وهناك قيمة وسيطة واحدة هي (43) حيث قبلها (42) رقماً وبعدها (42) رقماً .. وترتيب الوسيط الثالث والرابعين .

150 رقم زوجي .. وهناك قيمتين في الوسط حيث يتواجد قبلها (74) رقماً وبعده (74) رقماً وترتيبهما (75) و (76) ووسيطهما الحسابي هو الوسيط :

$$(76 + 75) / 2 = Me$$

٦) إذا كانت درجات طالب في الرياضة والطبعية واللغة الانكليزية والصحة العامة هي على الترتيب 82, 86, 90, 70 وان عدد الساعات (ساعات المحاضرات) الأسبوعية لهذه المقررات هي 3 و 5 و 3 و 1. أوجد متوسط الدرجات .

$$\bar{X} = \frac{\sum w_i x_i}{\sum w_i}$$

$$= \frac{(3)(82) + (5)(86) + (3)(90) + (1)(70)}{3 + 5 + 3 + 1} = 85$$

٧) اوجد الوسيط والمتنوال والوسيط للأرقام التالية:

3, 5, 2, 6, 5, 9, 5, 2, 8, 6

ترتيب تصاعدياً:

$X: 2, 2, 3, 5, 5, 5, 6, 6, 8, 9$ ($n=10$)

$$\mu = \text{Mean} = \sum x_i / 10 = 5.1$$

$$Me = \text{Median} = (5 + 5) / 2 = 5$$

$$Mo = \text{Mode} = 5$$

والأرقام التالية:

ترتيب تصاعدياً (أو تنازلياً): 50.3, 49.5, 48.9, 51.6, 48.7

48.7, 48.9, 49.5, 50.3, 51.6

$$\mu = \sum x_i / 5 = 49.8$$

$$Me = 49.5$$

$$Mo = \text{لا يوجد}$$

٨) حصل طالب على درجات 96 و 82 و 93 و 76 و 85 في (5) مواد. اوجد الوسط والوسيط والمتنوال.

$$\bar{X} = \sum x_i / 5 = 86, R = \frac{n+1}{2} = \frac{5+1}{2} = 3$$

لا يوجد متنوال $Mo =$ لا يوجد متنوال $Me = 85$ → ترتيبهم

(البيانات المبوبة)

Grouped Data

① في تجربة لتحديد تأثير عقار معين على مستوى الكوليسترول في الدم مقاساً بـ $Mg/100M$ لـ 10 أشخاص أعماهم (30) سنة. سُجلت البيانات التالية لمجموعة عولجت بهذا الدواء والمطلوب معرفة المتوسط الحسابي الكوليسترول في الدم.

مستوى الكوليسترول (الفئات)

120 - 160
160 - 200 ← الفئة المتوسطة
 200 - 240

عدد المرات (التكرار) f_i

2
5 ← أعلى تكرار
 3

$$n = \sum_{i=1}^3 f_i = 10$$

$$D_1 = 5 - 2 = 3$$

$$D_2 = 5 - 3 = 2$$

$$w_0 = 200 - 160 = 40$$

$$L_0 = 160$$

$$M_0 = L_0 + \frac{D_1}{D_1 + D_2} * w_0$$

$$= 160 + \frac{3}{3+2} (40) = 160 + \frac{120}{5} = 160 + 24 = 184$$

② في دراسة لتحديد تأثير التدخين على الأيمن تم قياس هذه المادة في البلازما (Mg/Ml) وبعد ساعتين من تناول الدواء من قبل (16) من المدخنين تم الحصول على البيانات التالية والمطلوب إيجاد معدل مستوى هذه المادة (المتوسط).

Classes / مستوى الأيمن (الفئات)	عدد المدخنين (التكرارات) f_i	C - f.d.
0.505 - 1.005	4	4
1.005 - 1.505	3	7
<u>1.505 - 2.000</u> ← الفئة الوسطى	6	13
2.000 - 2.505	3	16

$$n = \sum f_i = 16$$

$$R = \frac{n+1}{2} = \frac{16+1}{2} = \frac{17}{2} = 8.5 \quad \text{رتبة الوسط}$$

$$w_e = 2.000 - 1.505 = 0.495 \quad \text{و} \quad L_e = 1.505$$

$$M_e = L_e + \frac{R - G_1}{G_2} (w_e) = 1.505 + \frac{8.5 - 7}{3} (0.495) = ?$$

٩) جد الوسط والوسيط والمنوال لمجموعة الأرقام والاعداد التالية :

5, 4, 8, 3, 7, 2, 9

$$\mu_x = \sum x_i / 7 = 5.4$$

ترتيب الأرقام 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9

الرتبة الرابعة $R = \frac{n+1}{2} = \frac{7+1}{2} = 4$ الرتبة الوسطية

$M_e = 5$, $M_o =$ لا يوجد منوال

١٠) جد المنوال للأرقام التالية :

4, 7, 7, 7, 9, 9, 10, 12, 15

$M_o = 7$

1, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 8, 8, 10, 10, 11, 12

هناك (5) مناول هي

$M_o = 4, 5, 6, 8, 10$

(مناويل ثانوية) $M_0 = 10$ و $M_1 = 4$, $M_2 = 5$, $M_3 = 6$, $M_4 = 8$ منوال رئيسي

١١) في شركة بها (80) عاملاً .. (60) يحصلون على \$ 3.0 في الساعة وان (20) يحصلون على \$ 2.0 في الساعة . أوجد متوسط دخلهم في الساعة .

$$\bar{X} = \frac{\sum w_i x_i}{\sum w_i} = \frac{(60)(3.0) + (20)(2.0)}{60 + 20} = \frac{220.0}{80} = 2.75$$

١٢) جد منوال الأرقام التالية :

2, 2, 5, 7, 9, 9, 9, 10, 10, 11, 12, 18

$M_o = 9$

20, 16, 15, 12, 10, 8, 5, 3

$M_o =$ لا يوجد تكرار لا يوجد منوال

2, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 7, 7, 7, 9, 10

$M_o = 7$ منوال رئيسي

$M_1 = 4$ منوال ثانوي

H.W. بين من العينتين X ولا أفضل للدراسة وفق البيانات التالية :

$\bar{X} = 145$, $\bar{Y} = 80$, $S_x = 15$, $S_y = 10$ (استخدم معامل الاختلاف (C.V.)

٢٠) الجدول التالي يمثل أوزان خمسين طفلاً مصابين بمرض فقر الدم والمطلوب إيجاد الانحراف المعياري والتباين والحدود.

وزن الطفل classes	التكرار عدد الأطفال (f_i)	وسط الفئة (x_i)	x_i^2	$x_i f_i$	$x_i^2 f_i$
12-14	20	13	169	260	3380
14-16	18	15	225	270	4050
16-18	12	17	289	204	3468

$$n = \sum_{i=1}^3 f_i = 50, \quad \sum x_i f_i = 734, \quad \sum x_i^2 f_i = 10898$$

$$\text{Range} = R = 18 - 12 = 6$$

$$s = \sqrt{\frac{10898}{50-1} - \frac{(734)^2}{50(50-1)}} = 1.58$$

$$s^2 = \text{Var}(X) = (1.58)^2 \approx 2.5$$

١١٠٣) إذا كانت أوزان رؤوس الغنم في قطعان معين موزعة على النحو التالي لصيغة مأخوذة من هذا القطيع. احسب قيمة كل من الوسط الحسابي والوسيط والمعدل والانحراف المعياري لوزن الرؤوس الواحد.

الوزن (كغم)	عدد رؤوس الغنم (التكرارات)
20-25	20
25-30	60
30-35	10
35-40	6

Ungrouped Data

١) جد تباين القيم التالية التي تمثل وزن اللحم الصافي لستة رؤوس من الغنم وتمثل صيغة قائماً بذاته:

35, 34, 40, 38, 37, 32 (كغم)

$$s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^6 (x_i - \mu_x)^2}{N}$$

(5)

$$\mu_x = \frac{35+34+40+38+32+30}{6} = 36$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^6 (x_i - 36)^2}{6-1} = \frac{42}{5} = 8.4 \text{ (كغم}^2\text{)}$$

أي أن تبين كل قيمة عن الوسط الحسابي للعينة هو (7) كغم.
نفس السؤال أعلاه لكن للعينة:

$$\bar{X} = \frac{35+34+\dots+32}{6} = 36 \text{ كغم}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^6 (x_i - 36)^2}{5}$$

$$= \frac{42}{5} = 8.4 \text{ (كغم}^2\text{)}$$

∴ تبين العينة هو تقدير جيد لتباين العينة.

⑤ حدد الوسط والوسيط والمقاس المكون من ست مرات و سبع مرات و ثمانية ثمانية و سبع مرات وعشر عشر.

$$\text{Mean} = \mu = \frac{6(6) + 7(7) + 8(8) + 9(9) + 10(10)}{6+7+8+9+10} = ?$$

$$R = \frac{n+1}{2}, \quad n = \sum w_i = 10+9+8+7+6 = 40$$

$$R = \frac{40+1}{2} = 20.5$$

$$Me = (8+8)/2 = 8$$

ويمكن إيجاد الوسيط في هذا السؤال بطريقة أخرى كالآتي:

0000666 7777777 8888888 88 999999999
10/10/10/10/10/10/10/10/10/10
الوسيط

المقاس (M_o): القيمة التي تكرر أكثر من غيرها ولا أكثر قيمة تكرر هي (10)

$$\therefore M_o = 10$$

Simple Correlation Coefficient

$$r_{x,y} = \frac{n \sum xy - \sum x \sum y}{\sqrt{[n \sum x^2 - (\sum x)^2] [n \sum y^2 - (\sum y)^2]}}$$

مثال // حدي المتوال اذا كان لديك الجدول التالي :

الفئات	التكرار	حل
20-24	5	$E = 35 + \frac{10-8}{(10-8) + (10-6)} \times 5$ $= 36,67$
25-29	7	
30-34	8	
35-39	10	
40-44	6	
45-49	4	

الارتباط والاختلاف

الارتباط : تقابلنا كثيراً في الحياة العملية مواقف تتضمن متغيرين (ظاهريين) وأكثر ويكون المظهر مفرقة ما اذا كان هناك علاقة بين هذين المتغيرين وما هو شكل هذه العلاقة وايضا كيفية التباين بأحد هذين المتغيرين في حالة معرفتنا في المتغير الآخر.

فكثيراً ما نجد في بعض الحالات معادلة المظهر مع الوزن فإذا اردت ان تعرفي الوزن المثالي ادخلي مولي في المعادلة ليظهر ذلك المثالي، فقد نوصوا الى هذه المعادلة او الى هذه الصيغة سواء العلاقة ما بين المتغيرين المظهر والوزن على مجموعة من الافراد اذن ومما سبق نرى ان تعريف الارتباط بالسوية التالي :

الارتباط : هو تعيين طبيعة وقوة العلاقة بين متغيرين أو عددها.

أنواع الارتباط :

① **الارتباط الموجب (الطردى) :** هو العلاقة بين المتغيرين (x, y) إذا تغير أحدهما المتغيرين فإن الآخر يتبعه في نفس الاتجاه.

② **الارتباط السالب (العكسي) :** وهو العلاقة بين المتغيرين (x, y) حيث إذا تغير أحدهما المتغيرين فإن الآخر يتبعه في الاتجاه المعاكس.

قياس الارتباط : تستخدم معاملات الارتباط لقياس درجة الارتباط بين المتغيرين الظاهريين.

معامل الارتباط : يعرف معامل الارتباط والذي يرمز له بالرمز r لأنه عبارة عن مقياس رقمي يقيس قوة الارتباط بين المتغيرين حيث تتراوح قيمة $-1 \leq r \leq +1$.

ملاحظة : تدل إشارة المعامل الموجبة على العلاقة الطردية بينما تدل إشارة المعامل السالبة على العلاقة العكسية.

ملاحظة الجدول التالي يوضح أنواع الارتباط واتجاه العلاقة
وشكل الانتشار لكل نوع .

قيمة معامل الارتباط	المعنى
+	ارتباط طردي تام
من 0.70 إلى 0.99	ارتباط طردي قوي
من 0.50 إلى 0.69	ارتباط طردي متوسط
من 0.30 إلى 0.49	ارتباط طردي ضعيف
0	لا يوجد ارتباط

وما قيل عن الارتباط الطردي ينطبق على الارتباط العكسي مع وضع
الإشارة السالبة وتفسير كلمة الطردي إلى عكسي .

أنواع مقياس الارتباط

يمكن حساب العديد من معاملات الارتباط ويعتمد ذلك على
مستوى القياس (اسمي، ترتيبي، فتردي، نسبي)

للتفسيرات التي تبدو مرتبطة وهناك عدة أنواع من معاملات
الارتباط وسنتناول أهم هذه الأنواع - 1 -

1- **معامل بيرسون للارتباط الخطي** : هو أكثر معاملات الارتباط
استخداماً خاصة في العلوم الانسانية والاجتماعية ومستوى
قياس المخلوب عشوائي معامل بيرسون للارتباط هو ان يكون

كل المتغيرين مقياس فترة أو نسبي يعني آخر المتكون بيانات
كل المتغيرين (الظاهرين) بيانات كمية

- حساب معامل بيرسون للارتباط الخطي

يمكن حساب معامل بيرسون بكتابة القراءات للبيانات
المتغيرين X, Y باستخدام الصيغة التالية :

$$r_p = \frac{n \sum XY - \sum X \sum Y}{\sqrt{n \sum X^2 - (\sum X)^2} \sqrt{n \sum Y^2 - (\sum Y)^2}}$$

حيث أن :

$\sum XY$ مجموع حاصل ضرب X, Y

$\sum X$ مجموع قيم المتغير X

$\sum Y$ مجموع قيم المتغير Y

$\sum X^2$ مجموع مربعات قيم المتغير X

$\sum Y^2$ مجموع مربعات قيم المتغير Y

مثال // سجلت ^{١١} ستة قراءات كترية حجم الانتاج وجمع صادرات
النقط الخام ((بالمليار)) برصيد ((خلال عدة سنوات حدي الارتباط
الخطي بين حجم الانتاج وجمع الصادرات للنقط وما صدق العلاقة
بينهما ؟

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة ديالى

كلية تربية المقداد / قسم الرياضيات

محاضرات مادة

الإحصاء والاحتمالية

للعام الدراسي (2023-2024)

المرحلة الثالثة

Chapter two

مدرس المادة: م.م هند إبراهيم محمد

Probability and Statistics

الاحتمالية والإحصاء

Chapter Two : Introduction to Probability

Def :- A random (Statistical) experiment is an experiment with :-

1. All out comes (results) of the experiment are known in advance
2. Any performance of the experiment results in an out comes is not known in advance .
3. The experimant can be repeated under the identical conditions .

ويمكن تعريف التجربة العشوائية بأنها تلك التجربة التي ينتج عنها مجموعة من الاحداث كل حدث منها مستقل عن الاخر وان وقوع ذلك الحدث يرجع الى عامل الصدفة وحده (لا يمكن التنبؤ بحدوثه)

ملاحظة: ستطرق الى جملة من التجارب كأمثلة تساعدنا في تفسير بعض المفاهيم مثل :

- | | |
|-------------------|------------------|
| 1. Tossing a coin | تجربة رمي العملة |
| 2. Rolling adice | تجربة رمي الزار |
| 3. Playing cards | تجربة ورق اللعب |

وهكذا

Def: (Sample Space)

A sample space of an experiment is a set of all possible outcomes denoted by (S)

فضاء العينة: هو كل النتائج المحتملة من تجربة عشوائية معينة.

Def: (Events)

Any events is a (proper) subset of a sample space

الحوادث: هي مجموعه جزئيه من (S) ويكون الحادث بسيطاً اذا تكون من عنصر واحد

فقط او مركب اذا تكون من اكثر من عنصر ومستحيلاً اذا لم يحوي على اي عنصر

واكيداً اذا احتوى على عناصر (S) جميعاً

ie: If A is an Event, then $A \subseteq S$

ex: Toss a coin once

sol. $S = \{H, T\}$

S has (2) elts since a coin has two faces

Let A: to get H

$A = \{H\} \subseteq S$

Let B: to get T

$B = \{T\} \subseteq S$

$\therefore$ A and B are Events

ex: Roll a dice once

a dice has (6) faces

each face has adots

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$= \{d: 1 \leq d \leq 6\}$$

A: To get one odd no.

$$A = \{1, 3, 5\} \subseteq S$$

A is an Event

B: To get one even no.

$$B = \{2, 4, 6\} \subseteq S$$

$\therefore$ B is an event

C: $d \leq 3$

$$C = \{1, 2, 3\} \subseteq S$$

$\therefore$ C is an Event

ملاحظة : سيكون فضاء العينة في هذا الفصل من النوع المنتهي والقابل للعد .

Def:- Empty set (Φ) الحادثة التي لا تحدث

Φ is an Impossible event

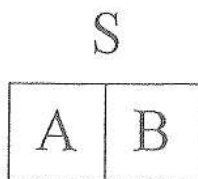
ex Toss a dice once

Let A: to get 7

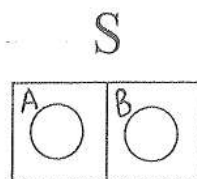
$$\therefore A = \Phi$$

Def :- (Disjoint events) الحوادث المنفصلة

If A and B are events, then A and B are disjoint iff $A \cap B = \Phi$



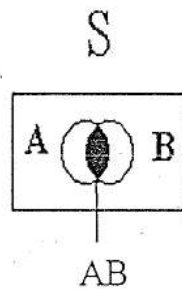
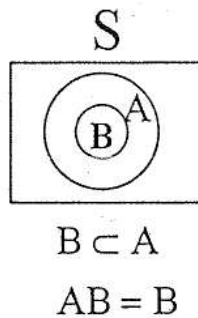
$$AB = \Phi$$



$$AB = \Phi$$

Def. (Joint events) الحوادث المتصلة

If A and B are event, then A and B are Joint iff $A \cap B \neq \Phi$



Note :- We shall use the symbol (AB) to denote of $A \cap B$

Def :- If A and B are events, then $(A \cup B)$ & $(A \cap B)$, $(A - B)$, $(B - A)$, A^c ...etc are also events.

$A^c = S \setminus A = S - A$
 $= \{x; x \notin A\}$
 ex. Roll a dice once.



Let

$$A = \{d : d \geq 2\} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$B = \{d : d \leq 3\} = \{1, 2, 3\}$$

$$C = \{d : d \leq 1\} = \{1\}$$

Find $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, ...

A^c , B^c , AB^c , BA^c ,

Ex.

$$AB = \{x; x \in A \cap x \in B\} \subseteq S$$

$$A \cup B = \{x; x \in A \vee x \in B\} \subseteq S$$

$$A - B = \{x; x \in A \wedge x \notin B\} \subseteq S$$

$$B - A = \{x; x \in B \wedge x \notin A\} \subseteq S$$

$$A \cup B - AB$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A \cap B = \{2, 3\}$$

$$A^c \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A^c = \{1\}$$

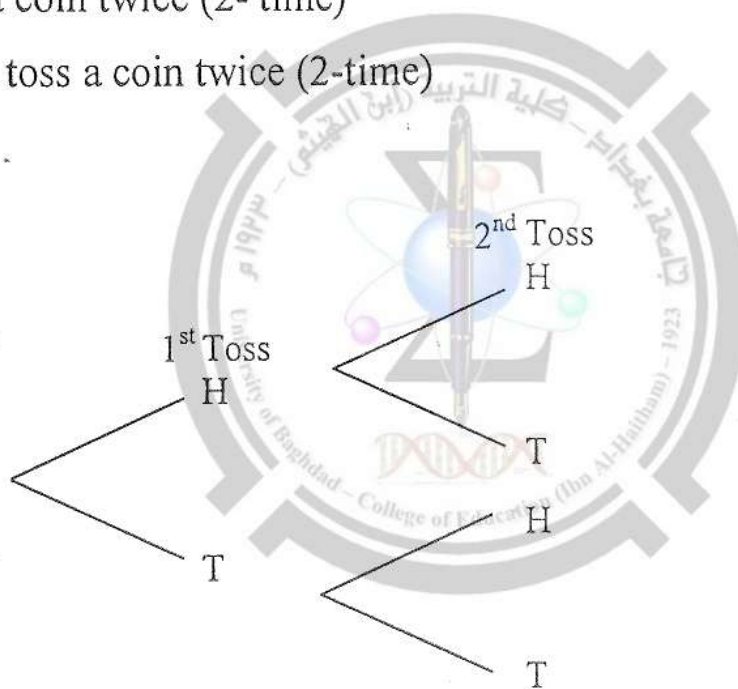
$$B^c = \{4, 5, 6\}$$

$$AB^c = \{4, 5, 6\}$$

$$BA^c = \{1\}$$

Toss a coin twice (2- time)

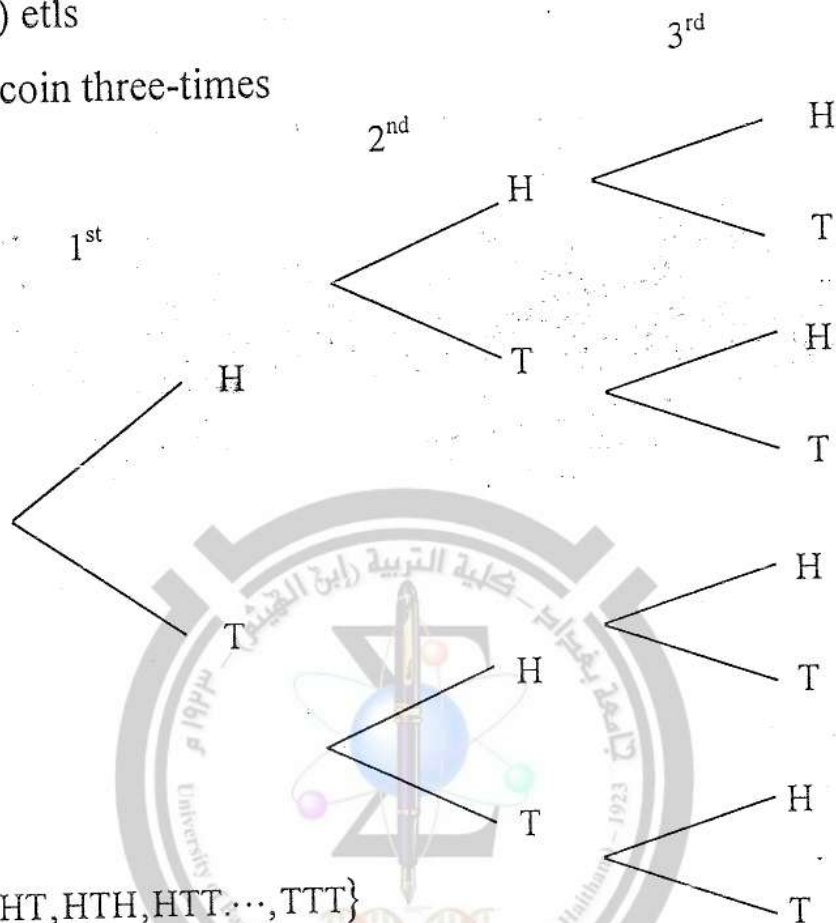
When toss a coin twice (2-time)



$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

S has $(2^2 = 4)$ elts

When toss a coin three-times



$$S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, \dots, TTT\}$$

$\therefore$ S has $(2^3=8)$ elts

when toss a coin n-times , then the sample space (S) has 2^n elts

ex. Roll a dice twice (2-times)

$$S = \{(d_1, d_2); 1 \leq d_1 \leq 6; 1 \leq d_2 \leq 6\}$$

S= has $(6^2=36)$ elts

When roll a dice n-times , then the sample space (S) has (6^n) elts

Simple Probability الاحتمالية البسيطة

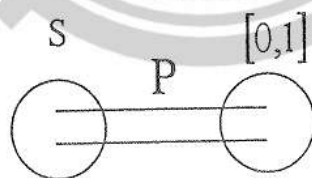
Def:- If A be an events , $P(A)$ = probability of event $A = Pr.(A)$ that is mean (pr) that event A happence . If S has (n) elts & A has (m) elts , then

$$p(A) = \frac{\text{no. of elts of event A}}{\text{no. of elts of S}} = \frac{|A|}{|S|} = \frac{m}{n}$$

ملاحظة : عند احتساب الاحتمال الرياضي لاي حادثة يجب ان تتوفر الحالة التي تكون فيها الاحداث مستبعدة لبعضها الاخر وان كل حدث ياخذ الفرصة التي تاخذها الاحداث الاخرى في الوقوع .

ويعرف احتمال الحصول على صفة معينة (حادثة معينة) مثل (A) من تجربة عشوائية معينة بأنه عدد مرات حدوث الصفة (A) مقسوما على الحالات المتوقعة .

ملاحظة : نجد ان قيمة الاحتمال هي عبارة عن دالة (تطبيق) P مجالها (منطلقها)



S ومداها $R_{[0,1]}$

$$P: S \rightarrow R_{[0,1]}$$

تسمى دالة الاحتمال P دالة احتمال منتظم اذا اعطى نفس القيمة الاحتمالية لكل عنصر من عناصر فضاء العينة .

ملاحظة: نجد ان قيمة الاحتمال تعتمد بالدرجة الاساس على معرفة كل الحالات الممكنة لـ (S) وان هذه الحالات يمكن حصرها بسهولة في الحالات البسيطة ولكن عند زيادة

عدد الاحداث يؤدي الى وجود صعوبة في تحديد عدد الحوادث الممكنة ولذلك لابد من اللجوء الى بعض الطرق الرياضية التي تساعد في تحديد مثل هذه الحالات ومهما زاد عددها واهم هذه الطرق

1. permutation التباديل

وهي عملية ترتيب n من الاشياء في مجاميع كل منها يتالف من r من الاشياء وحسب القاعدة التالية

$$P_r^n = P_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$P_r^n = P_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}, n, r \in I^+$$

مثال/ جد عدد الطرق الممكنة لترتيب اربع كرات مرقمة من 1-4

$$P_4^4 = \frac{4!}{(4-4)!} = \frac{4!}{0!} = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24 \text{ or } 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

مثال / جد عدد الطرق الممكنة التي يمكن وضع خمس كرات في صندوقين بحيث ان كل صندوق يحتوي على كرة واحدة فقط

$$P_2^5 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3!} = 20 \text{ samples}$$

في حالة وجود مكررات في مفردات المجموعة فان عدد الطرق الممكنة للترتيب يمكن حسابها بالطريقة التالية :

$$P_{n_1, n_2, \dots, n_k}^n = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

where $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$

مثال / جد عدد الطرق الممكنة لترتيب سبع كرات اربعة منها بيضاء واثنان حمراء والباقي اللون
اخرى .

$$P_{4,2,1}^7 = \frac{7!}{4!2!1!} = 105 \text{ Methods}$$

2. Combination التوافيق

هي عملية اختيار او انتخاب (Selection) عدد من المفردات بحجم r من مجموعة كبيرة بحجم n
وبدون ترتيب وتستخدم الصيغة التالية :

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}, n, r \in I^+$$

مثال / ما هو عدد العينات التي يمكن تكوينها من مجتمع مؤلف من ست مفردات بحيث
يكون حجم العينة مفردتين اثنتين فقط .

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{6!}{2!4!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{2!4!} = 15 \text{ samples.}$$

مثال / ما هو عدد اللجان التي يمكن تأليفها من اربعة افراد بحيث ان كل لجنة تحتوي
على أ. فردين اثنين ب. ثلاثة افراد

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \left(\frac{4!}{2!2!} \right) = \frac{24}{2} = 6$$

$$\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{4!}{3!} = 4$$

ملاحظة : هناك علاقة بين التباديل والتوافيق وهي :

$$\binom{n}{r} = \frac{P^n_r}{r!},$$

Binomial theorem نظرية ذات الحدين

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

معادلات ذات الحدين binomial coefficients

$$= \frac{n}{a} + n a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^2 + \dots + b^n$$

ex/ Prove that

$$\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}$$

Sol. R.S

Facts about the sets حقائق حول المجموعات

$$1. A \cap \Phi = \Phi, A \cup \Phi = A, \left(A^c \right)^c = A$$

$$\left. \begin{aligned} 2. A^c \cup B^c &= (A \cap B)^c \\ A^c \cap B^c &= (A \cup B)^c \end{aligned} \right\} \text{Demo. Law}$$

$$3. \Phi^c = S, S^c = \Phi$$

$$4. A \cup A^c = S, A \cap A^c = \Phi$$

$$5. A_1 \cap A_2^c = A_1 - A_2 \quad \begin{array}{l} A_1 \text{ happens but } A_2 \text{ not happens} \\ A_1 \text{ or } A_2 \text{ happens} \end{array}$$

$$6. A_1 \cup A_2$$

$$7. (A_1 \cup A_2) - A_1 \cap A_2$$

$A_1 \text{ or } A_2 \text{ happens, but not both}$

$$8. A_1 \cap A_2$$

Both A_1 and A_2 happen

Axioms of Probability: بديهيات الاحتمالية

$$1. \text{ If } A \subseteq S, \text{ then } 0 \leq P(A) \leq 1$$

$$2. P(S) = 1$$

$$3. \text{ If } A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \text{ are sequence of disjoint events, then}$$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) \dots$$

$$\text{ie. } P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Note:- Special case of Ax.3

If A and B are disjoint events, then $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

ex. Toss a coin 3-times

a. Find the Pr. to get 2-H

b. Find the Pr. to get no-H

S has 8 elts

Sol. $S = \{HHH, HHT, \dots, TTT\}$

a. let A to get 2-H

$A = \{HHT, HTH, THH\}$ A has 3 elts

$$P(A) = \frac{3}{8} \in [0,1]$$

b. let B to get no-H

$$B = \{TTT\} \quad P(B) = \frac{1}{8} \in [0,1]$$

$$A^c = \text{to get less (2-H) or (3-H)} = \{S - A\} \quad A = \{2-H\}$$

$$= P(A^c) = 1 - P(A) \Rightarrow P(A^c) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8} \in [0,1]$$

How ex/ toss a die twice (a: Find the pr. That sum. of dots is equal to 8)

b. To get one 4, $P(c) = ?$, $P(c^c) = ?$

c. Find the pr. That $d_2 < 3$ $\Rightarrow \{(1,2), (2,1), (3,1), (4,1), (5,1), (6,1), (3,2), (4,2), (5,2), (6,2)\} \Rightarrow P(c) = \frac{10}{36} \in [0,1]$

Theorem 1 :- $P(\Phi) = 0$

Proof :- let A be any event

$$A \cap \Phi = \Phi$$

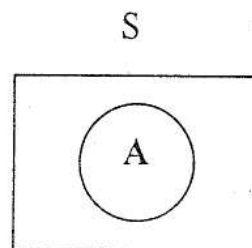
A & Φ are disj.

$$A \cup \Phi = A$$

$$P(A \cup \Phi) = P(A)$$

$$P(A) + P(\Phi) = P(A) \text{ by AX.3}$$

$$P(\Phi) = 0$$



Theorem 2 :- $P(A^c) = 1 - P(A)$

Proof :-

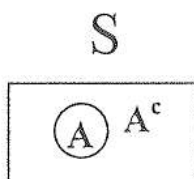
$$\because AA^c = \Phi$$

$\therefore A$ & A^c are disj

$$A \cup A^c = S \Rightarrow P(A \cup A^c) = P(S)$$

$$P(A) + P(A^c) = 1 \quad \text{by AX,2, AX,3}$$

$$\therefore P(A^c) = 1 - P(A)$$



Theorem 3 :- If A and B are joint events, then

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Proof :-

AB^c & AB are disjoint $\Rightarrow A = AB^c \cup AB$

$$P(A) = P(AB^c) + P(AB) \quad \text{by AX.3} \quad \dots (1)$$

BA^c & AB are disjoint

$$B = BA^c \cup AB$$

$$P(B) = P(BA^c) + P(AB) \quad \text{by AX.3}$$

$$P(BA^c) = P(B) - P(AB) \dots \dots \dots (2)$$

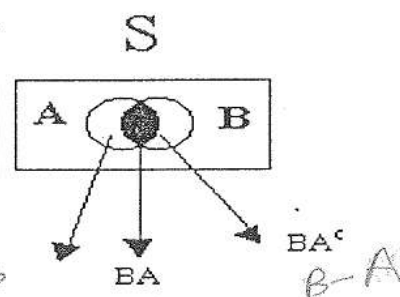
$\therefore AB^c, AB$ & BA^c are disjoint

$$A \cup B = AB^c \cup AB \cup BA^c$$

$$P(A \cup B) = P(AB^c) + P(AB) + P(BA^c)$$

$$\therefore P(A \cup B) = [P(A) - P(AB)] + P(AB) + [P(B) - P(AB)]$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$



Theorem 4 :- If A & B are events such that $A \subseteq B$, then $P(A) \leq P(B)$

Proof :- A and $A^c B$ are disj.

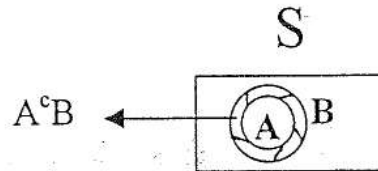
$$B = A \cup A^c B$$

$$P(B) = P(A \cup A^c B)$$

$$P(B) = P(A) + P(A^c B) \quad \text{by } AX_3$$

$$P(B) - P(A) = P(A^c B) \geq 0$$

$$P(B) - P(A) \geq 0 \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$



H.W For any events A and B, show that

$$1. P(AB) \leq P(A) \leq P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$$

$$2. \text{ If A and B are joint events, when } P(A) = 0.8; P(B) = 0.5$$

Find the conditions and the value of Max $P(AB)$ and Min $P(AB)$

$$3. \text{ If } P(A) = \frac{1}{3} \text{ \& } P(B) = \frac{1}{2} \text{ Find the value of } P(BA^c) \text{ when}$$

$$a. A \text{ \& } B \text{ are disj. events} \quad b. A \subseteq B \quad c. P(AB) = \frac{1}{8}$$

④ If A, B and c are dis J. events find

$$1. P[(A \cup B) \cap C] \quad 2. P[A^c \cup B^c]$$

Theorem 5 :- (H.W.)

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

Theorem 6 :-

Convergent of pr. $\rightarrow$ Th. 6 $\rightarrow$ Th. 7

If $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ be a sequence of infinite events such that

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots \subset A_n \subset \dots$$

$$\text{Then } P\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right] = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$$

(Conv. from above)

Proof:- $A_1, A_2 A_1^c, A_3 A_2^c, \dots, A_n A_{n-1}^c$ are disj

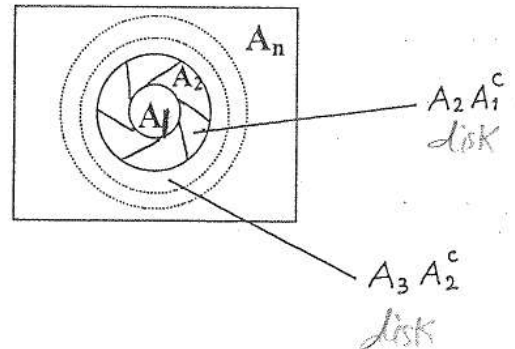
$$A_2 = A_1 \cup A_2 = A_1 \cup A_2 A_1^c$$

$$A_3 = A_1 \cup A_2 \cup A_3 = A_2 \cup A_3 A_2^c$$

$$A_n = \bigcup_{i=1}^n A_i A_{i-1}^c = \bigcup_{i=1}^n A_i A_{i-1}^c$$

$$\therefore P(A_n) = P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i A_{i-1}^c\right)$$

$$= \sum_{i=1}^n P(A_i A_{i-1}^c) \quad \text{by AX.3}$$



$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n P(A_i A_{i-1}^c)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i A_{i-1}^c) \dots (1)$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i A_{i-1}^c$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i A_{i-1}^c\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i A_{i-1}^c) \dots (2)$$

$$\therefore (1) = (2) \quad \therefore P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$$

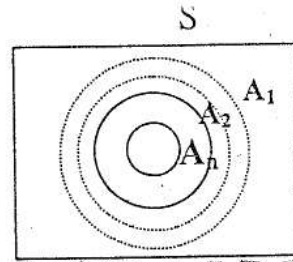
(Conv- from below)

Theorem 7 : Let $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$ be an infinite sequence of events such that

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$$

$$\text{Then } P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$$

Proof :- $A_1^c \subset A_2^c \subset A_3^c \dots \subset A_n^c \subset \dots \therefore$ By theor. 6



تعريف 6
 $A \subset B \iff A^c \supset B^c$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n^c)$$

$$P\left[\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c\right] = \lim_{n \rightarrow \infty} [1 - P(A_n)] \text{ by the th2. \& D.Law.}$$

$$1 - P\left[\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right] = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$$

$$P\left[\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right] = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$$

العينات العشوائية Random Sampling

Suppose a population of n -elts $(a_1, a_2, \dots, a_n)$. We want to choose a

subset of this population has (K) elts $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ at random $(k \leq n)$

These subset is called random samples. there are two kinds of random sample :-

1. Un Ordered Sample العينات غير المرتبة

Select (k) elts from (n) elts at once (at the same time)

2. Ordered Sample العينات المرتبة

a. one by one without replacement selecte (k) elts. From (n) elts.

one by one without repl .

b. one by one with replacement selecte (k) elts , From (n) elts.

one by one with replac .

Case 1 الحالة الاولى

Choose (k) elts . at the same time from (n) elts .

We use , (combination n , K) to find the number of all samples

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Ex/ Given a set of (4) elts. $\{a, b, c, d\}$

Choose a sample of (2) elts.

a. Find the sample space of all samples .

b. Find the pro. That a sample has elts . (b)

Sol/ a.

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2!} = \frac{12}{2} = 6 \text{ samples}$$

$$S = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (b, d), (c, d)\}$$

b. Let A be a sample has elts (b)

$$A = \{(a, b), (b, c), (d, d)\}$$

$$\therefore P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

i.e/

طريقة عامة . في السؤال السابق يكون هناك أربعة عناصر إما لو اخذنا 50 عنصر

يكون الاستخدام بالشكل التالي :

$$(\square, \square)$$

$$^3(a, c, d) \quad b$$

$$P_{3,1} \times b_{1,1}$$

$$\frac{3!}{2!} \times \frac{1!}{0!}$$

$$3 \times 1 = 3$$

$$(\square, \square)$$

$$(a_2, a_3, \dots, a_{50}) \quad 49 \quad a_1$$

$$P_{49,1} \times P_{1,1}$$

$$\frac{49!}{48!} \times \frac{1!}{0!}$$

Ex/ Given a set of (3) boys and (4) girls students. Choose a sample of (3) students

a. Find S

b. Find the pr. That a sample has 2 boys

c. Find the pr. That a sample has at least (2) girls .

sol/ a.

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!(4!)} = 35$$

$\therefore S$ has 35 samples

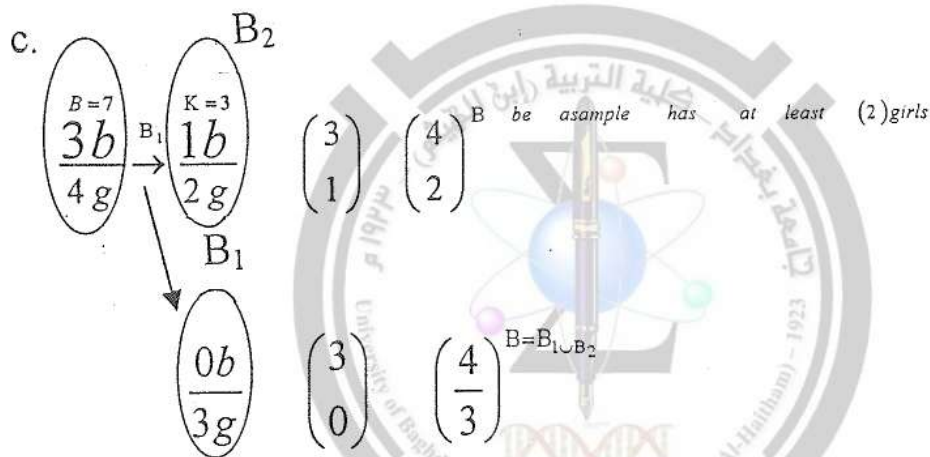
$$b. \left(\frac{3b}{3g} \right) \rightarrow \left(\frac{2b}{1g} \right)$$

A: be a sample that has (2) boys

$$\binom{3}{2}\binom{4}{1} = \left[\frac{3!}{2!(3-2)!} \right] \times \left[\frac{4!}{1!(4-1)!} \right] = 12$$

$3 \times 4 = 12$ [12 samples has 2 boys and girl]

$$\therefore P(A) = \frac{\binom{3}{2}\binom{4}{1}}{\binom{7}{3}} = \frac{12}{35}$$



$B = B_1 \cup B_2$ [B and B₂ are disj.]

$$P(B) = P(B_1) + P(B_2)$$

$$P(B) = \frac{\binom{3}{1}\binom{4}{2}}{\binom{7}{3}} + \frac{\binom{3}{0}\binom{4}{3}}{\binom{7}{3}} = 0.5$$

Case 2 :

a. Choose (k) elts. From (n) . elts. one by one with out replacement .

In this case we use (permutation n, k) to find the number of samples in S .

Where $P_k^n = \frac{n!}{(n-K)!}$

Ex/ Given a set of (4) elts. $\{a, b, c, d\}$

Choose a sample of (2) elts. one by one without replacement

a. Finds

b. Find the pr. That a sample has elts. (b) .

Sol/

$$P_2^4 = \frac{4!}{(4-2)!} = 12$$

S has (12) elts.

$$S = \left\{ \begin{array}{cccc} (a,b), & (b,a), & (c,d), & (d,a) \\ (a,c), & (b,c), & (c,b), & (d,b) \\ (a,d), & (b,d), & (c,d), & (d,c) \end{array} \right\}$$

$$A = \{(a,b), (b,a), (b,c), (b,d), (c,b), (d,b)\}$$

$$P(A) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

ex/ Given $\{2,3,5,6,8\}$ a set of (5) integers choose a sample of (3) integers one by one without replacement .

a. Find the pr. That the sample can be divided by 5

b. divided by (2) .

$$\text{Sol/ } P_3^5 = \frac{5!}{2!} = 60$$

S has (60) samples

a. let A be a sample which divided by (5)

2		
---	--	--

2	3	5
---	---	---

3	6
---	---

6	8
---	---

8

$$4 \times 3 \times 1 = 12$$

$\therefore$ A has (12) samples

$$P(A) = \frac{12}{60}$$

b. let B be a sample which divided by (2)

B has (36) samples

$$P(B) = \frac{36}{60} \in [0,1]$$

--	--	--

3	5	2
---	---	---

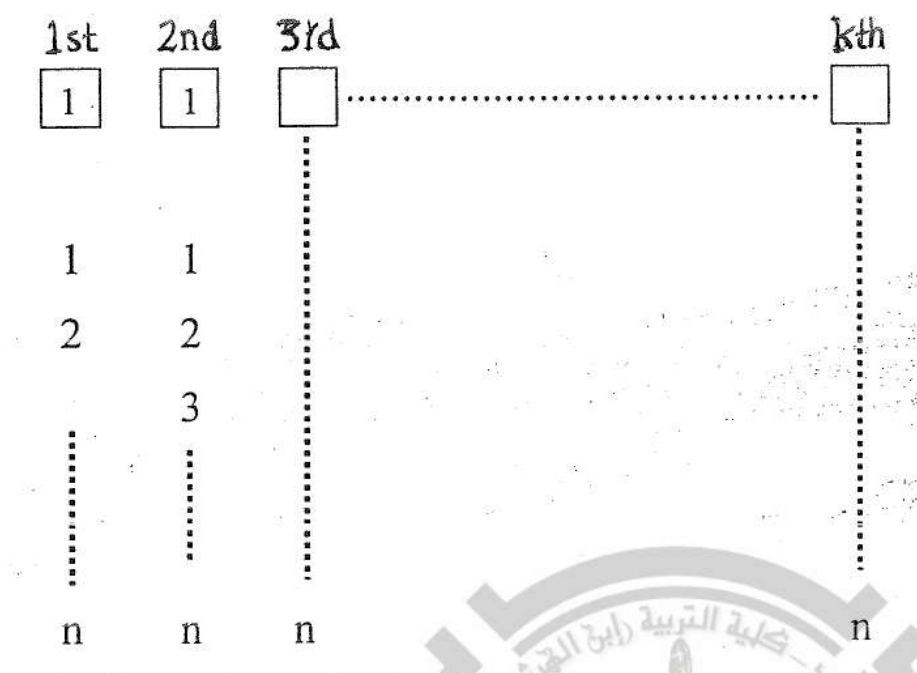
5	6	6
---	---	---

6	8	8
---	---	---

8

$$4 \times 3 \times 3 = 36$$

b. Choose (k) elts. From (n) elts , one by one with replacement.



$$n \times n \times n \dots \times n = n^k$$

$\therefore S$ has (n^k) samples

ex/ Given 4 elts $\{a, b, c, d\}$ choose a sample of 2 elts. One by one with replacement

a. Find S

b. Find the pr. That a sample has elt (b)

Sol/

a. $4^2=16$ S has (16) samples

$$S = \left\{ \begin{array}{cccc} (a, a), & (b, a), & (c, a), & (d, a) \\ (a, b), & (b, b), & (c, b), & (d, b) \\ (a, c), & (b, c), & (c, c), & (d, c) \\ (a, d), & (b, d), & (c, d), & (d, d) \end{array} \right\}$$

b. Let A be a sample has (b).

$$A = \{(a, b), (b, a), (b, b), (b, c), (b, d), (c, b), (d, b)\}$$

$$P(A) = \frac{7}{16}$$

Exercises :-

1. A box has (24) bulbs of which (4) are defective .Choose 4 bulbs , find the pr. That they are defective .
2. A set of (11) integers ; (5) of them are negative and the others are positive . Choose a sample of (4) integers and multiply them , then find the pr. That the product is .
a. negative b. positive
3. Given a set of (12) transistors of which (3) are defective .choose a sample of (4) transistors then find the pr. that .
a. Two transistor are defective .
b. at least one transistors is defective .
4. Find the pr. That two people of (K) people will have the same birthday .

Probability Space

Def :- (σ -Field)

A non-empty collection $\mathcal{F}$ subsets of a set (S) is called σ -field of subsets of (S) provided the following two properties holds .

1. If $A \in \mathcal{F}$, then $A^c \in \mathcal{F}$
2. If $A_n \in \mathcal{F}$, $n = 1, 2, \dots$

$$\text{then } \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F} \text{ \& } \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$$

Def:- A probability measure (p) on a ($\mathcal{F}$)-field of subsets ($\mathcal{F}$) is a real valued function having a domain ($\mathcal{F}$) and satisfying the following properties

1. $P(S) = 1$
2. $P(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{F}$
3. If $A_1, A_2, \dots, A_n$, are disjoint in $\mathcal{F}$ then

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

Def:- (Probability Space)

The triple $(S, \wp, P)$ is called a probability space .

Remarks :- the elements of S are called sample points .

Any $A \in \wp$ is know as event clearly A is a collection of sample points.

ex/ Toss a coin once

$$S = \{H, T\}$$

$$\wp = \{\{H\}, \{T\}, S, \Phi\} 2^n$$

ex/ Toss a coin twice

$$S = \begin{pmatrix} HH, & HT, & TH, & TT \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$$

$$\wp = \left\{ \begin{array}{l} \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\} \\ (b, d), \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\} \\ \{b, c, d\}, S, \Phi \end{array} \right\}$$

$$\frac{4}{2} = 16$$

Independent Events : الحوادث المستقلة

Def :- If A and B are events . We say A and B are independent events iff

$$P(A) \times P(B) = P(AB)$$

At the same time A and B are dependent events iff

$$P(A) \times P(B) \neq P(AB)$$

Ex/ Choose (2) integers From $\{1,2,3,4\}$ one by one without (with) replacement.

If A: 1st chosen int. is (2)

B: 2nd chosen int. is (1)

Are A and B ind. Events ? why

Sol/

1. Without repl.

$$P_2^4 = \frac{4!}{(4-2)!} = 12$$

S has (12) elts. = $\{(1,2), (2,1), (1,3), (3,1), (1,4), (4,1), (2,3), (3,2), (2,4), (4,2), (3,4), (4,3)\}$

$$A = \{(2,1), (2,3), (2,4)\} \Rightarrow P(A) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

$$B = \{(2,1), (3,1), (4,1)\} \Rightarrow P(B) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

$$AB = \{(2,1)\} \Rightarrow P(AB) = \frac{1}{12}$$

$$P(A) \times P(B) = \frac{1}{16} \neq \frac{1}{12} = P(AB)$$

A and B are dependent

2. With replace.

$$(n^K) = 4^2 = 16$$

$\therefore$ S has (16) samples

Joint $\Rightarrow$ Dep.

Ex.

Typical case

Joint $\neq$ indep.

while indep $\Rightarrow$ joint

$$A = \{(2,1), (2,2), (2,3), (2,4)\} \Rightarrow P(A) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

$$B = \{(1,1), (2,1), (3,1), (4,1)\} \Rightarrow P(B) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

$$AB = \{(2,1)\} \Rightarrow P(AB) = \frac{1}{16}$$

$$P(A) \times P(B) = \frac{1}{16} = P(AB)$$

$\therefore$ A and B are indep.

Theorem 8 : If A and B are independent event such that $A \neq \Phi, B \neq \Phi$ then A and B are Joint events .

Proof :- $\because$ A and B ind $\Rightarrow P(A), P(B) = P(AB)$

T.P/ A and B are Joint

ie/ T.P/ $AB \neq \Phi$

$$\because A \neq \Phi \Rightarrow P(A) \neq 0$$

$$B \neq \Phi \Rightarrow P(B) \neq 0$$

$$P(A) \times P(B) \neq 0$$

$$P(AB) \neq 0 \quad \text{By hyp}$$

$$\therefore AB \neq \Phi$$

ملاحظة : العكس من النظرية اعلاه غير صحيح بمعنى اذا كانت A و B حادثتين متصلتين

(Joint) فانه ليس من الضروري ان تكون الحادثتين A و B مستقلتين (independent) مثال

على ذلك المثال السابق في حالة بدون ارجاع (Without repel).

Theorem 9 : If A and B are disjoint events , such that $A \neq \Phi, B \neq \Phi$ then A and B are dependent .

Proof :- $\because$ A and B are disjoint

$$\therefore AB = \Phi \Rightarrow P(AB) = 0 \dots\dots (1)$$

$$\therefore A \neq \Phi \Rightarrow P(A) \neq 0$$

$$B \neq \Phi \Rightarrow P(B) \neq 0$$

$$P(A) \times P(B) \neq 0 \dots\dots\dots (2)$$

$$P(A)P(B) \neq P(AB)$$

A, B are dependent

Theorem 10 : If A and B are independent events, then .

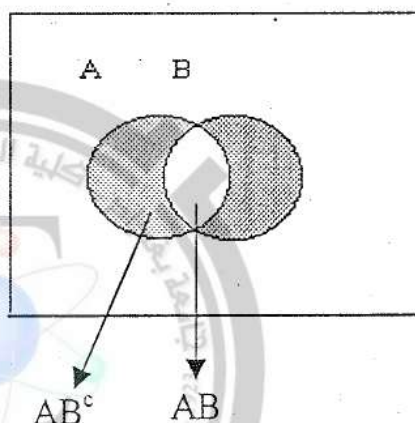
1. A and B^c are independent .

2. B and A^c are independent .

3. A^c and B^c are independent .

Proof (1) :- Tp. $A \& B^c$ are ind.

ie/ Tp. $P(A)P(B^c) = P(AB^c)$



$$A = AB^c \cup AB$$

$$P(A) = P(AB^c) + P(AB) \text{ by AX.3}$$

$$P(AB^c) = P(A) - P(AB)$$

$$= P(A) - P(A)P(B) \quad \text{by hyp.}$$

$$= P(A)[1 - P(B)]$$

$$= P(A)P(B^c)$$

Independence of Three Events :

Def :- If A, B and C are events, then A, B and C are independent events iff

1. a. $P(A)P(B) = P(AB)$ (A, B are ind.)

b. $P(A)P(C) = P(AC)$ (A, C are ind.)

c. $P(B).P(C) = P(BC)$ (B, C are ind.)

2. $P(A).P(B).P(C) = P(ABC)$

Note :- If satisfy only condition (I) , then A,B and C are said to be pairwise independent .

ex/ Given $S = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,1)\}$

A: 1st coordinate is (1)

B: 2nd coordinate is (1)

C: 3rd coordinate is (1)

Are A,B and C indep ? why ?

Conditional Probability الاحتمال الشرطي

Def :- Let A,B are events if event A happens first , then event B happens .

Or event A given then event B happens denoted by $(B | A)$.

Where $(B \setminus A)$ is called condition events .

Also $P(B \setminus A)$ is called conditional probability .

Where $P(B \setminus A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$, $P(A) \neq 0$ (بمعنى A ليس مجموعة خالية)

Note :- 1. If A and B are indep. Events

$$P(B \setminus A) = \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B)$$

2. From def. of cond. pr.

ex/ $P(AB) = P(A)P(B \setminus A)$ multiplication rule (بمعنى B لا يتبع A)

ex/ Toss a dice twice

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ (بمعنى A و B مجموعهما)

Find the pr. That $d_1 + d_2 \leq 6$

Given that $d_1 + d_2 = \text{odd}$

Sol/ $P(B \setminus A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$

$$A = \left\{ (1,2), (2,1), (3,2), (4,1), (5,2), (6,1), \right. \\ (1,4), (2,3), (3,4), (4,3), (5,4), (6,3) \\ \left. (1,6), (2,5), (3,6), (4,5), (5,6), 6,5 \right\}$$

$$B = \left\{ (1,1), (2,1), (3,1), (4,1), (5,1) \right. \\ (1,2), (2,2), (3,2), (4,2) \\ (1,3), (2,3), (3,3) \\ (1,4), (2,4) \\ \left. (1,5) \right\}$$

$$P(A) = \frac{18}{36}$$

$$P(B) = \frac{15}{36}$$

$$AB = \left\{ (1,2), (2,1), (3,2) \right. \\ \left. (1,4), (2,3), (2,4) \right\}$$

$$\therefore P(AB) = \frac{6}{36}$$

$$P(B \setminus A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{6}{36}}{\frac{18}{36}} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3} \in [0,1]$$

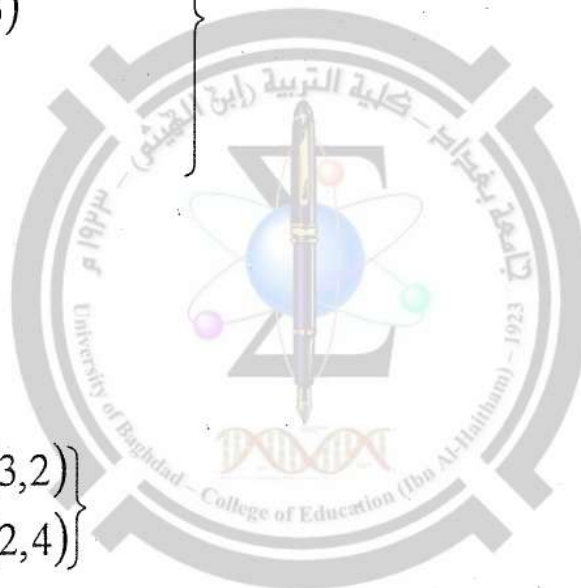
$$P(A \setminus B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \\ = \frac{6}{15}$$

مطلوب $P(AB)$

A/B indep.
 $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$

A/B dep.

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B|A)$$



Theorem 11 :- let $A_1, A_2, \dots, A_n$ be an events where

$A_i \neq \Phi \quad i = 1, 2, \dots, n$ then

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 \setminus A_1) \cdot P(A_3 \setminus A_1 A_2) \cdot P(A_4 \setminus A_1 A_2 A_3) \dots P(A_n \setminus A_1 A_2 A_3 \dots A_{n-1})$$

Proof :- right side

$$\begin{aligned} &= P(A_1) \frac{P(A_1 A_2)}{P(A_1)} \cdot \frac{P(A_1 A_2 A_3)}{P(A_1 A_2)} \cdot \frac{P(A_1 A_2 A_3 A_4)}{P(A_1 A_2 A_3)} \dots \frac{P(A_1 A_2 A_3 \dots A_n)}{P(A_1 A_2 A_3 \dots A_{n-1})} \\ &= P(A_1 A_2 A_3 \dots A_n) \end{aligned}$$

= left side

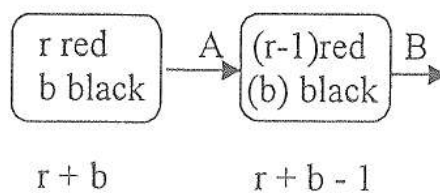
ex/ A box has (r) red balls and (b) black balls. Choose (2) balls one by one without replac.

1. If the first chosen ball is red find the pr. that both balls has different colour.
2. Find the pr. that the 1st & 2nd chosen ball are red.
3. Find the pr. That at most one, ball is red

Sol/ Let A: be the 1st red ball

B: be 1st chosen black ball

$$P(B \setminus A) = \frac{b}{r+b-1}, \quad P(A) = \frac{r}{r+b}$$



2. C: be 2nd chosen ball is red

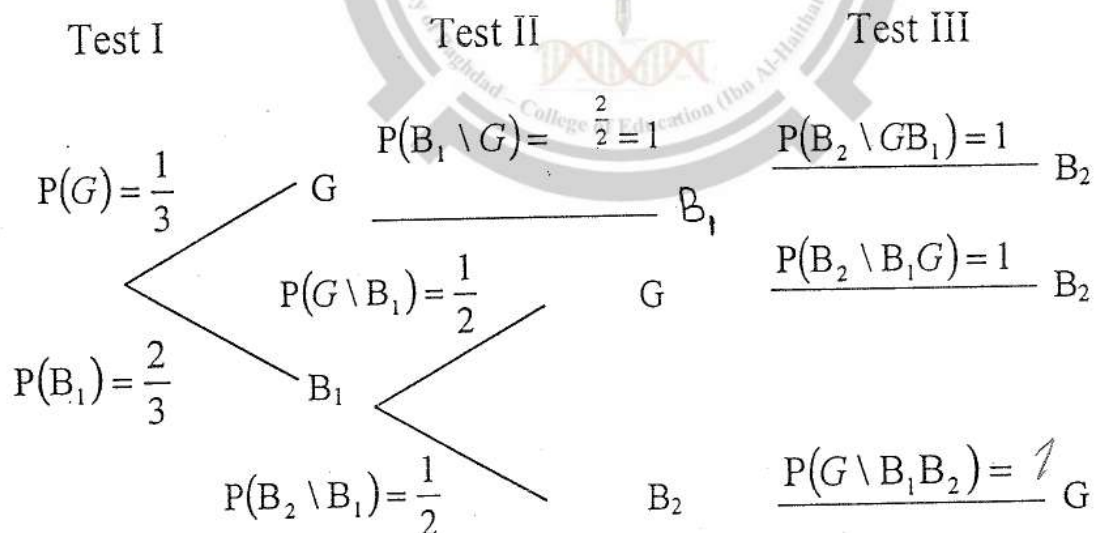
$$\begin{aligned} P(AC) &= P(A)P(C \setminus A) \\ &= \frac{r}{r+b} \cdot \frac{r-1}{r+b-1} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
 & P(A \cup B) - P(AB) \\
 &= 1 - P(A)P(B \setminus A) \\
 &= 1 - \frac{r}{r+b} \cdot \frac{b}{r+b-1}
 \end{aligned}$$

ex. 2/ Given (2) bad tubes and (1) good tube . Take the tube one by one until both bad tubes are founds . find the pr. that 2nd bad tube is found on

1. test 1
2. test 2
3. test 3



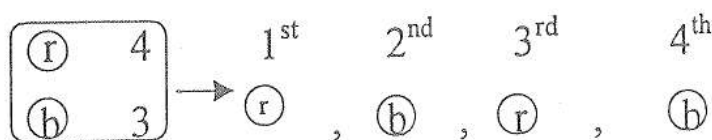
$$1. P(B_2 \text{ on test I}) = P(\Phi) = 0$$

$$\begin{aligned} 2. P(B_2 \text{ on test II}) &= P(B_1 B_2) \\ &= P(B_1) \cdot P(B_2 \setminus B_1) \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. P(B_2 \text{ on test III}) &= P(GB_1 B_2 \cup B_1 GB_2) \\ &= P(GB_1 B_2) + P(B_1 GB_2) \\ &= P(G)P(B_1 \setminus G)P(B_2 \setminus GB_1) + P(B_1)P(G \setminus B_1)P(B_2 \setminus B_1 G) \\ &= \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

ex/ A box has (4) red and (3) black balls choose a sample of (4) balls one by one without repl. Find the pr. to get a sample r,b,r,b

Sol/



$$N = 4 + 3 = 7$$

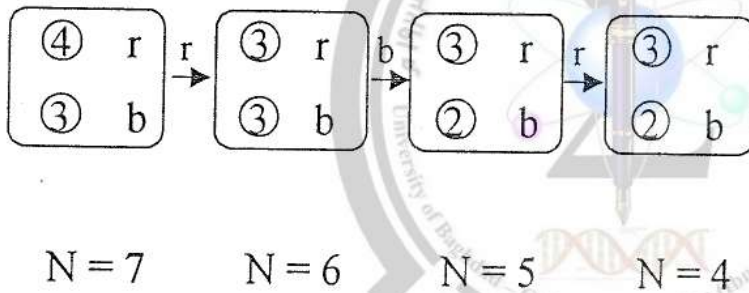
Let R_1 : to Choose 1st red ball

$B_1 \setminus R_1$: to choose 1st black ball , given 1st red ball

$R_2 \setminus R_1 B_1$: to choose 2nd red ball , given 1st red , 1st black balls

$B_2 \setminus R_1 B_1 R_2$: to choose 2nd black ball , given 1st red , 1st black and 2nd red balls

$$\begin{aligned}
 P(R_1 B_1 R_2 B_2) &= P(R_1) \cdot P(R_1 \setminus B_1) \cdot P(R_2 \setminus R_1 B_1) \cdot P(B_2 \setminus R_1 B_1 R_2) \\
 &= \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \\
 &= \frac{3}{35}
 \end{aligned}$$



Partition Of a Sample Space

(Ex. Rolling a die once)

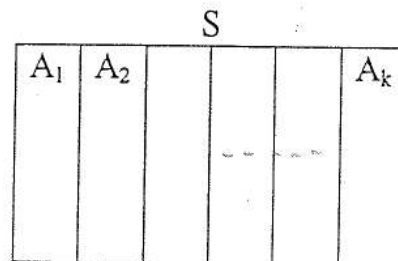
Def :- A Finite sequence of event $A_1, A_2, \dots, A_K$ Form partition of (S)

iff

1. $A_1, A_2, \dots, A_K$ are disjoint

$$\text{i.e.} \bigcap_{i=1}^K A_i = \Phi$$

$$2. \bigcup_{i=1}^K A_i = S$$



هذا هو تقسيم المجال العيني الى مجموعات متمايزة
 بحيث لا يوجد تقاطع بينها
 $\Phi = \bigcap_{i=1}^K A_i$

ex/ Toss a dice once $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$A_1 = \{1, 3, 5\}$$

$$A_2 = \{2, 4, 6\}$$

$$\left. \begin{array}{l} A_1 A_2 = \Phi \\ A_1 \cup A_2 = S \end{array} \right\} \Rightarrow A_1, A_2 \text{ form a partition of } S$$

A_1	A_2
1 3 5	2 4 6
S	

Theorem 12:- If A_i ($i = 1, 2, \dots, K$), $A_i \neq \Phi$ form a partition of S . If

$$\Phi \neq B \subset S, \text{ then } P(B) = \sum_{i=1}^K P(A_i)P(B \mid A_i)$$

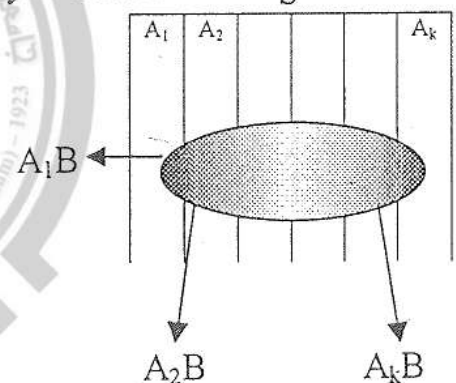
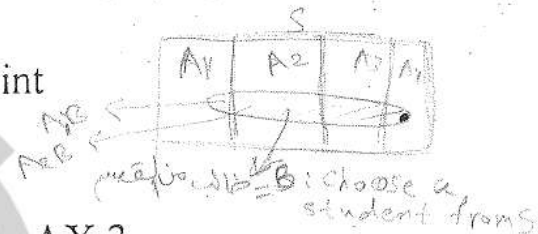
Proof :- $A_1 B, A_2 B, A_3 B, \dots, A_K B$ are disjoint

$$B = A_1 B \cup A_2 B \cup A_3 B \cup \dots \cup A_K B$$

$$P(B) = P(A_1 B) + P(A_2 B) + \dots + P(A_K B) \text{ by AX.3}$$

$$= \sum_{i=1}^K P(A_i B)$$

$$= \sum_{i=1}^K P(A_i)P(B \mid A_i) \text{ by theorem 11}$$



Theorem 13 :- (Bayes Theorem)

If A_j ($j = 1, 2, \dots, K$) From a partitions of S , where $A_j \neq \Phi$, and if

$\Phi \neq B \subset S$ then

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{\sum_{j=1}^K P(A_j)P(B \mid A_j)}$$

EX1: prior information (before the test)

EX2: after the test

A_1	A_2	A_3	A_4
0.25	0.20	0.20	0.25
0.70	0.60	0.25	0.60
0.20	0.40	0.25	0.40

$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = S$

if $P(B)$ is given, then we can find $P(A_i \mid B)$ by Bayes theorem

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{\sum_{j=1}^K P(A_j)P(B \mid A_j)}$$

where (i) is a one value of (j)

Proof :- by theorem 12

$$P(B) = \sum_{i=1}^K P(A_i)P(B \setminus A_i)$$

$$P(A_i \setminus B) = \frac{P(A_i B)}{P(B)} \quad \text{by def of cond.pr.}$$

$$= \frac{P(A_i)P(B \setminus A_i)}{\sum_{j=1}^K P(A_j)P(B \setminus A_j)} \quad \text{by theorem II and theorem 12}$$

Note :

1. $P(A_i \setminus B)$ is called the posterior pr. (it is the pr. Of an event which is the source when a result is given) .

2. $P(A_i)$ is called prior pr.

ex/ Given the following boxes :-

box 1 has (3) red and (5) white balls

box 2 has (2) red and (4) white balls

choose a box , then choose a ball from the chosen box

a. Find the pr. that a white ball is chosen .

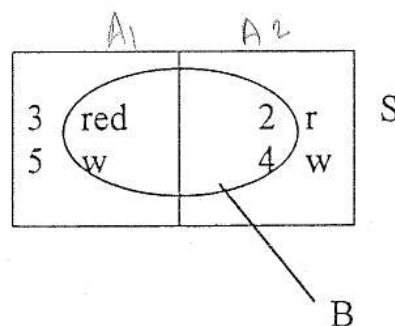
b. If a red ball is chosen , Find the pr. that it is from box 2 .

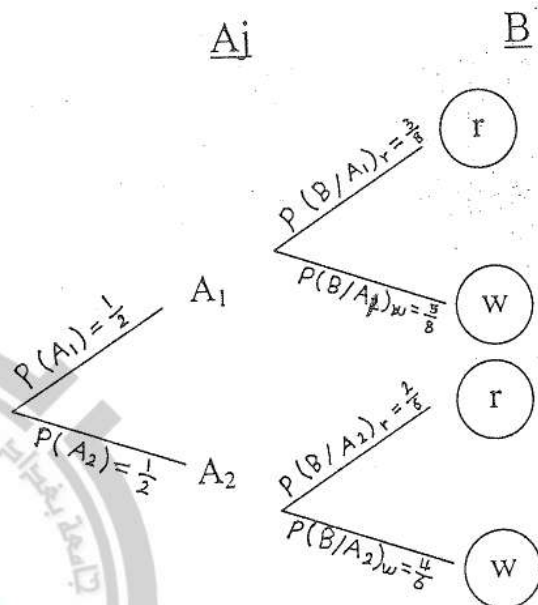
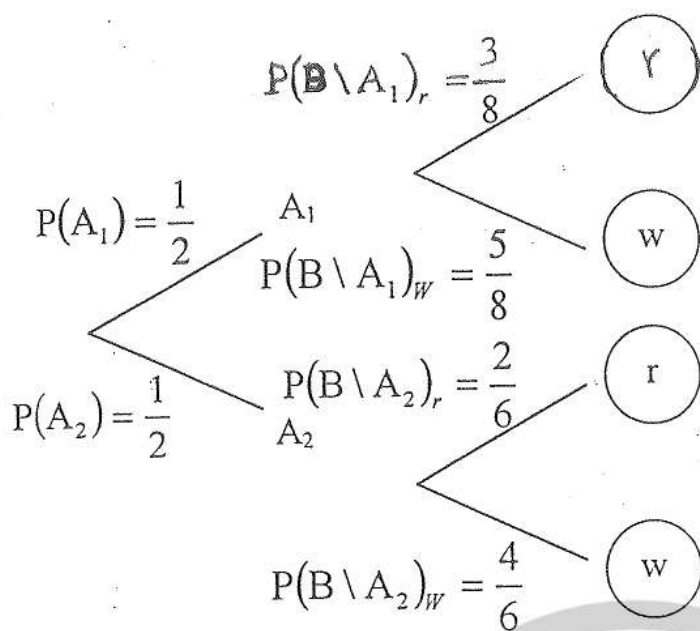
Sol/

Let A_1 : choose box 1

A_2 : choose box 2

B : choose a ball





$$\begin{aligned}
 \text{a. } P(B)_w &= \sum_{j=1}^2 P(A_j) \cdot P(B \setminus A_j)_w \\
 &= P(A_1)P(B \setminus A_1)_w + P(A_2)P(B \setminus A_2)_w \\
 &= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{5}{8}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{4}{6}\right) = ?
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b. } P(A_2 \setminus B)_r &= \frac{P(A_2)P(B \setminus A_2)_r}{\sum_{j=1}^2 P(A_j)P(B \setminus A_j)_r} \\
 &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{6}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{8}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{6}\right)}
 \end{aligned}$$

H.W. Find $p(B)_r$, $P(A \setminus B)_w$

ex/ Three Machines M_1 , M_2 and M_3 produce glasses

M_1 Produce 20% of glasses

M_2 Produce 30% of glasses

M_3 Produce 50% of glasses

Also

1% of glass produced by M_1 is defective

2% of glass produced by M_2 is defective

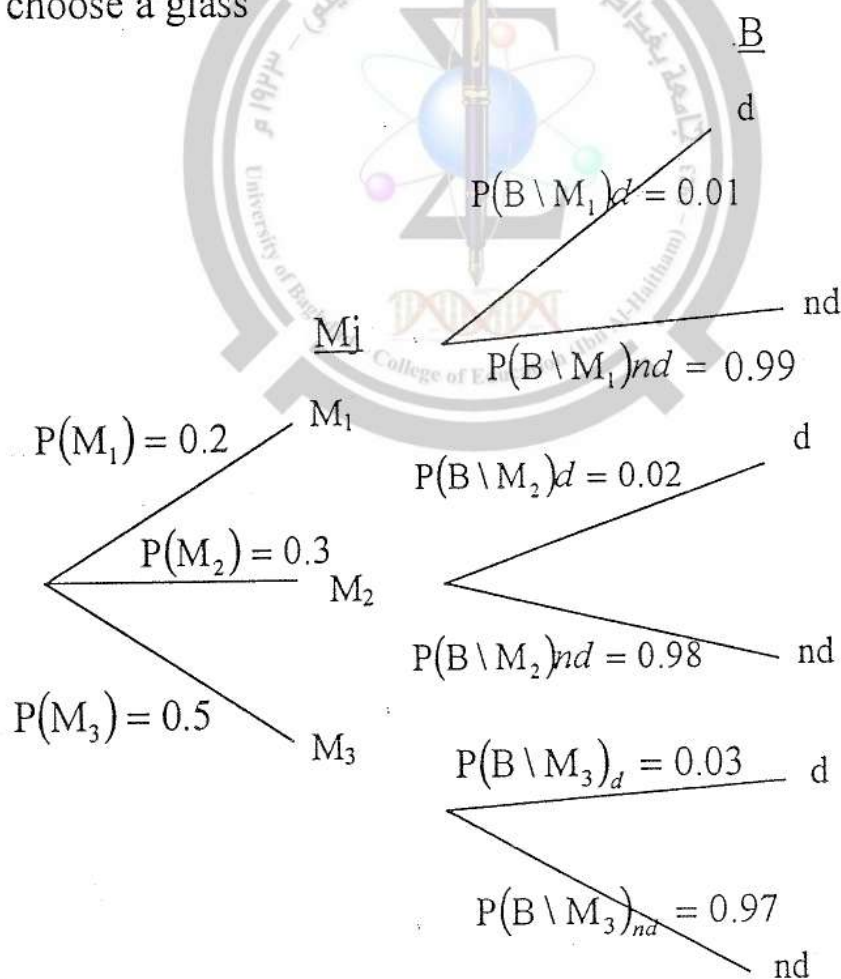
3% of glass produced by M_3 is defective

Choose a glass, then

a. Find the pr. That the glass is produced by M_3 if it is defe.

b. Find the pr. That the glass is def.

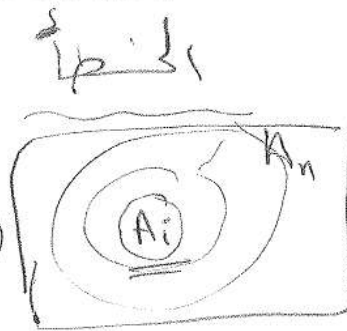
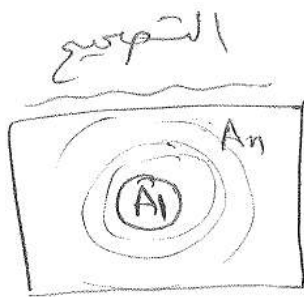
Let B choose a glass



أخطاء مطبعية في ملزمة Ch.2 / مادة الاحتمالية
المرحلة الثالثة / قسم الرياضيات

رقم الصفحة

١٥



$$A = \{(a, b), (b, c), (b, d)\} \quad A = \{(a, b), (b, c), \underline{(d, d)}\}$$

١٧

$$b. \frac{3b}{4g} \rightarrow \frac{2b}{1g}$$

$$b. \frac{3b}{3g} \rightarrow \frac{2b}{1g}$$

١٨

(Def: σ -field)

(Def: σ -Field)

٢٤

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

$$P(\underline{B}, \underline{A}) = \frac{P(AB)}{\underline{P(B)}}$$

٣٠

$$= P(R_1)P(B|R_1)P(R_2|R_1B) = P(R_1)P(\underline{R_1|R_1})P(R_2|R_1B)$$

٣٤

$$\underline{P(A_i|B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^K P(A_j)P(B|A_j)}$$

Th. 13

$$\underline{P(A_i)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^K P(A_j)P(B|A_j)}$$

٣٥

$$P(B) = \sum_{j=1}^K P(A_j)P(B|A_j)$$

$$= \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^K P(A_j)P(B|A_j)}$$

$$P(B) = \sum_{j=1}^K \underline{P(A_j)} \underline{P(B|A_j)}$$

٣٦

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^K P(A_j)P(B|A_j)}$$

٤١

(2) Coins
(3) =
(4) =

2 Coin
3 Coin
4 Coin

1 (Some Questions About Chapter two)

Q1: Urm has (8) cards which have the number (1, 2, ..., 8); Choose one card then find the pr. that chosen card have a number which divided by 3 or 4.

Sol: $A = \{3, 6\} \Rightarrow P(A) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

$B = \{4, 8\} \Rightarrow P(B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

Since $AB = \emptyset \Rightarrow A, B$ are disjoint events.

$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (By Ax.3)

or $= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$

$= \frac{1}{2} \in [0, 1]$

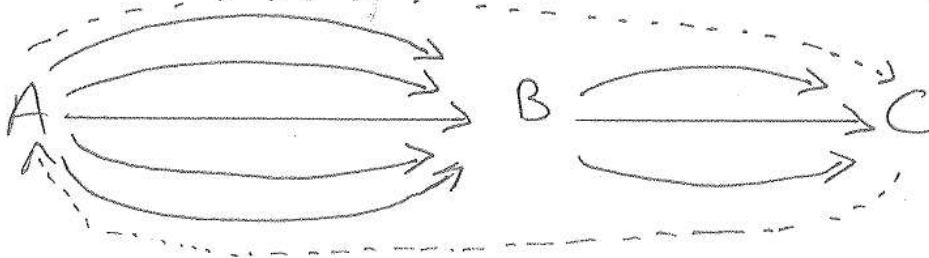
Are A and B independent events?

$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \quad \left. \begin{array}{l} P(AB) \neq P(A) \cdot P(B) \\ AB = \emptyset \Rightarrow P(AB) = 0 \end{array} \right\} \therefore A, B \text{ are independent.}$

OR By Th. (since A, B are disjoint then A, B are depen.)

Q2 If there are five roads from A to B and there are three roads from B to C, then how many ways can one make roads from A to C crossing B and return from C to A.

Sol:



$A \rightarrow C \quad X$

15

$P_1^5 \cdot P_1^3$

5×3

15

X

X

$A \leftarrow C$

15

$P_1^3 \cdot P_1^5$

3×5

15

$= 225$ ways from A to C and from C to A

2
Q₃: How many arrangement can be made of the letters of words (MISSISSIPPI) taken all together?

Sol.

الحرف	الكرار
M	1
I	4
S	4
P	2
$\Sigma = 11$	

$$P_{1,4,4,2}^{11} = \frac{11!}{1! 4! 4! 2!} = 34650$$

✓

Q₄: Choose a Card from playing Cards, find:

- (1) The pr. that a Card will be diamond (A).
- (2) The pr. that a Card will be a picture (B).
- (3) The pr. of getting a Jack (C).
- (4) The pr. of getting a queen (D).

Sol.

$$(1) P(A) = \frac{{}^1C_{13}}{{}^1C_{52}} = \frac{13}{52}$$

$$(2) P(B) = \frac{{}^1C_{12}}{{}^1C_{52}} = \frac{12}{52}$$

$$(3) P(C) = \frac{{}^1C_4}{{}^1C_{52}} = \frac{4}{52}$$

$$(4) P(D) = \frac{{}^1C_4}{{}^1C_{52}} = \frac{4}{52}$$

Q₅: Three Cards are drawn at random from deck of (52) Cards, let the events:

A: 2-Cards of diamond

B: one number Card; one Jack and the queen of hearts.

Sol. $P(A) = \frac{{}^2C_2 \cdot {}^{39}C_1}{{}^3C_{52}}$

→ P(A) =

Q9. في مدينة ما ، 40% من المواطنين لهم شعر بني اللون ، 25% منهم لهم عيون بنية اللون و 15% لهم شعر بني و عيون بنية اللون ، اختير مواطن بطريقة عشوائية من المدينة .

- (i) اذا كان شعره بني فما هو احتمال ان تكون ايضا عيناه بنيتان ؟
 (ii) اذا كانت عينه بنية ، فما هو احتمال ان يكون شعره بنياً ؟
 (iii) ما هو احتمال ان لا يكون شعره بنياً ولا ان تكون عينه بنية ؟

Sol. $P(A) = .40$, $P(B) = .25$ و $P(AB) = .15$

(i) $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{.15}{.40} = \frac{3}{8} \in [0,1]$

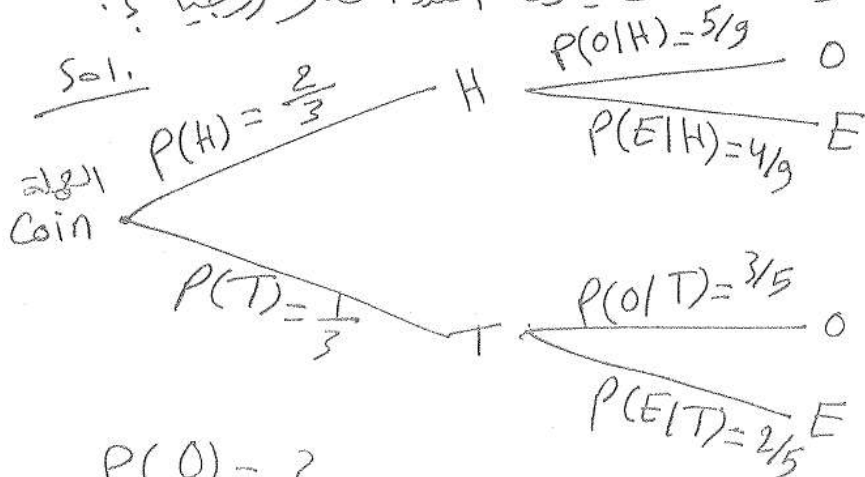
(ii) $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{.15}{.25} = \frac{3}{5} \in [0,1]$

(iii) $P(A^c B^c) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B)$ (By Demo. Law & Th. 2)

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ (A, B are joint).
 $= .40 + .25 - .15$
 $= .50 \Rightarrow 50\%$

$P(A^c B^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - .50 = .50$

Q10. صنعت قطعة نقود بحيث يكون احتمال ظهور الصورة H $(2/3)$ والكتابة T $(1/3)$ ، أُلقيت هذه القطعة مرة واحدة . نختار بعد ذلك عدداً عشوائياً من 1 الى 5 و اذا ظهرت الصورة ، اما اذا ظهرت الكتابة فنختار بطريقة عشوائية عدداً من 1 الى 5 . ما هو احتمال ان يكون العدد المختار زوجياً ؟



$O = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
 $E = \{2, 4, 6, 8\}$

$O = \{1, 3, 5\}$
 $E = \{2, 4\}$

$P(O) = ?$

$P(E) = ?$

$$P(B) = \frac{{}^{40}C_1 \cdot {}^4C_1 \cdot {}^1C_1 \cdot {}^7C_0}{{}^{52}C_3} = \underline{\underline{3}}$$

Q6: One card are drawn at random from deck of (52) cards.
let the events:

A: to get 10.

B: to get diamoned ($\heartsuit$).

C: to get no. card.

$$52 = 13 \times 4 = \text{العدد الكلي}$$

$$12 = 4 \times 3 = \text{عدد الصور}$$

$$40 = 4 \times 10 = \text{عدد الأرقام}$$

Sol. $P(A) = P(10) = \frac{{}^4C_1}{{}^{52}C_1}$

$$P(B) = P(\heartsuit) = \frac{{}^{13}C_1}{{}^{52}C_1}$$

$$P(C) = P(\text{no.}) = \frac{{}^{40}C_1}{{}^{52}C_1}$$

Q7: Find pr. that:

$$1. P(\text{red card}) = \frac{26}{52}$$

$$2. P(2) = \frac{4}{52}$$

$$3. P(K) = \frac{4}{12}$$

$$4. P(\text{red}, 2) = \frac{2}{26}$$

$$5. P(\text{pic.}) = \frac{12}{52}$$

$$6. P(\heartsuit, 7) = \frac{1}{13}$$

Q8

أخذ رجل (5) أوراق اللعب واحدة بعد الأخرى، ما هو احتمال

أن تكون جميع الأوراق من نوع ($\heartsuit$) ؟

$$P(\heartsuit \heartsuit \heartsuit \heartsuit \heartsuit) = \frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} \cdot \frac{11}{50} \cdot \frac{10}{49} \cdot \frac{9}{48}$$

(By Th. II)

5

$$P(O) = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{77}{135} \in [0,1] \quad (\text{بالتحتمل نظرية})$$
$$P(E) = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{58}{135} \in [0,1] \quad (\text{بنظر التمهيدية})$$

Q11 في إحدى الكليات راسب 25% من الطلبة في امتحان الرياضيات وراسب 15% من الطلبة في امتحان الكيمياء وراسب 10% في امتحان الرياضيات والكيمياء. اختير أحد الطلبة بطريقة عشوائية:

(i) إذا كان راسباً في الكيمياء، فما هو احتمال أن يكون راسباً في الرياضيات؟

(ii) إذا كان راسباً في الرياضيات، فما هو احتمال أن يكون راسباً في الكيمياء؟

(iii) ما هو احتمال أن يكون راسباً في الرياضيات أو الكيمياء؟

Sol.

$$M = \{ \text{الطلبة الراسبون في الرياضيات} \}$$
$$C = \{ \text{الطلبة الراسبون في الكيمياء} \}$$

$$MC = \{ \text{الطلبة الراسبون في الرياضيات والكيمياء} \}$$

$$P(M) = 0.25, P(C) = 0.15, P(MC) = 0.10$$

$$(i) P(M|C) = \frac{P(MC)}{P(C)} = \frac{0.10}{0.15} = \frac{2}{3} \in [0,1]$$

$$(ii) P(C|M) = \frac{P(MC)}{P(M)} = \frac{0.10}{0.25} = \frac{2}{5} \in [0,1]$$

$$(iii) P(M \cup C) = P(M) + P(C) - P(MC) = \frac{3}{10}$$

= 30

Q12: جادستان A, B بحيث أن $P(A|B) = \frac{1}{4}$ وأن $P(B|A) = \frac{1}{2}$ و $P(A)$ و $P(B)$ = $\frac{1}{4}$. اذكر هذه الصلوات التالية صحيحة؟

① A, B are independent

② IS A ⊂ B

Sol.

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(AB)}{1/4} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = P(AB) \Rightarrow \boxed{P(AB) = \frac{1}{8}}$$

→ follows

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = P(B) \Rightarrow P(B) = \frac{1}{8} \cdot 4 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \boxed{P(B) = \frac{1}{2}}$$

(استخدم النظرية)

$$(1) \left. \begin{aligned} P(AB) &= P(A)P(B) \\ \frac{1}{8} &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow A, B \text{ are independent events.}$$

$$(2) \text{ By Th. 4 } \text{if } A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

$$P(A) = \frac{1}{4}, P(B) = \frac{1}{2}$$

$$P(A) \leq P(B)$$

$$\frac{1}{4} \leq \frac{1}{2}$$

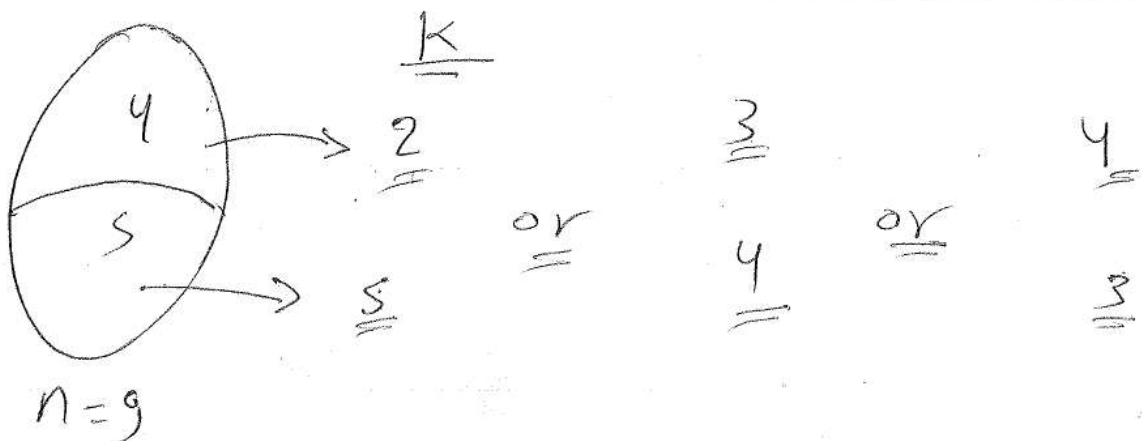
$$\Rightarrow A \subseteq B$$

Q13: A student is to answer (7) out of (9) questions on an exam. Find the pr. that he must answer at least (2) of the first (4) questions.

Sol.

Let W : be a student answer at least (2) of the first (4) questions.

$$P(W) = \frac{{}^4C_2 \binom{5}{5} + {}^4C_3 \binom{5}{4} + {}^4C_4 \binom{5}{3}}{{}^9C_7} \in [0, 1]$$



Chapter 1.2 Introduction to Probability

- Exercises -

(PP.14) ✓

For any events A and B, show that :

$$1. P(AB) \leq P(A) \leq P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$$

Proof:

$$\circ \circ AB \subset A \quad (\text{By Fact})$$

$$\circ \circ P(AB) \leq P(A) \quad (\text{By Th. 4}) \dots \textcircled{1}$$

$$\circ \circ A \subset A \cup B \quad (\text{By Fact})$$

$$\circ \circ P(A) \leq P(A \cup B) \quad (\text{By Th. 4}) \dots \textcircled{2}$$

$$\circ \circ A, B \text{ are joint events (since } P(AB) \neq \emptyset)$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) \quad (\text{By Th. 3})$$

$$\Rightarrow P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

$$\text{But } 0 \leq P(AB) \leq 1 \quad (\text{By Axiom 1})$$

$$\Rightarrow 0 \leq P(A) + P(B) - P(A \cup B) \leq 1$$

$$\Rightarrow P(A) + P(B) - P(A \cup B) \geq 0$$

$$\Rightarrow P(A) + P(B) \geq P(A \cup B)$$

$$\text{i.e., } P(A \cup B) \leq P(A) + P(B) \dots \textcircled{3}$$

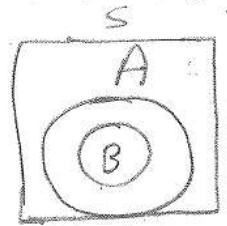
By $\textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3}$ we get :

$$P(AB) \leq P(A) \leq P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$$

• If A and B are joint events, when $P(A) = 0.8$, $P(B) = 0.5$. Find the conditions and the value of $\max P(AB)$ and $\min P(AB)$.

Sol. ∵ A and B are joint.

$$\Rightarrow AB \neq \emptyset$$



Case ① If $B \subseteq A$ (Since $P(B) \leq P(A)$ / By Th. 4)

$$B \subseteq A \Rightarrow AB = B$$

$$\Rightarrow P(AB) = P(B) = 0.5$$

Case ② If $B \not\subseteq A$ & A, B are joint events;

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) \quad (\text{By Th. 3})$$

$$= 0.8 + 0.5 - P(AB)$$

$$P(AB) = 1.3 - P(A \cup B) \geq 0 \quad (\text{By Ax. 1})$$

$$0 \leq P(A \cup B) \leq 1 \quad (\text{By Axiom 1})$$

$$0 \geq -P(A \cup B) \geq -1$$

$$1.3 \geq 1.3 - P(A \cup B) \geq -1 + 1.3$$

$$1.3 \geq 1.3 - P(A \cup B) \geq 0.3$$

$$1.3 \geq P(AB) \geq 0.3 \Rightarrow P(AB) \geq 0.3$$

$$\therefore \text{If } A \subseteq B \Rightarrow \max P(AB) = 0.5$$

$$\text{If } A \not\subseteq B \Rightarrow \min P(AB) \geq 0.3$$

3. If $P(A) = \frac{1}{3}$ & $P(B) = \frac{1}{2}$. Find the value of $P(BA^c)$ when:

a. A & B are disjoint events

b. $A \subseteq B$

c. $P(AB) = \frac{1}{8}$

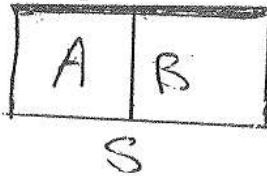


$A \subseteq B$

Sol.

a. If A and B are disjoint.

eg A, B are disjoint



$$P(BA^c) = P(B) = \frac{1}{2}$$

b. If $A \subseteq B$

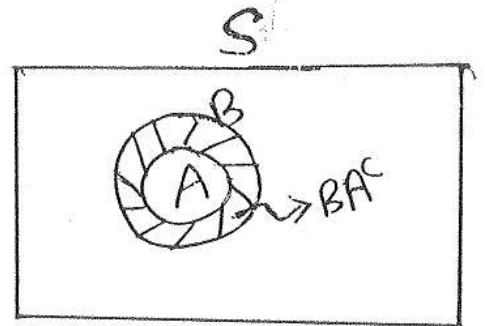
$$B = A \cup BA^c$$

where A & BA^c are disjoint events.

$$P(B) = P(A) + P(BA^c) \quad (\text{By Ax. 3})$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + P(BA^c)$$

$$P(BA^c) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$



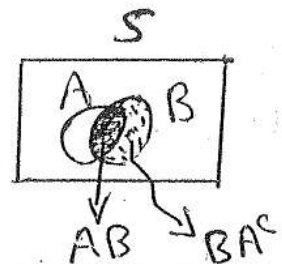
c. $P(AB) = \frac{1}{8} \Rightarrow P(AB) \neq 0 \Rightarrow AB \neq \emptyset$ (By Th. 1).

$$B = AB \cup BA^c \quad (\text{when } AB, BA^c \text{ are disjoint events})$$

$$P(B) = P(AB) + P(BA^c) \quad (\text{By Ax. 3})$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{8} + P(BA^c)$$

$$\Rightarrow P(BA^c) = \frac{3}{8} \in [0, 1]$$



4. If A, B and C are disjoint events, find:

$$\begin{aligned} 1. P[(A \cup B) \cap C] &= P[AC \cup BC] = P(\emptyset \cup \emptyset) \quad (\text{since } AB = \emptyset \\ &= P(\emptyset) \quad AC = \emptyset \\ &= 0 \quad BC = \emptyset) \\ &\quad (A, B, C \text{ are disj.}) \\ &\quad (\text{By Th. 1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. P(A^c \cup B^c) &= P[(AB)^c] = P(\emptyset)^c = P(S) = 1 \\ &\quad (\text{By Demo. (By } AB = \emptyset \text{ (By Ax. 2) } \\ &\quad \text{Lows) } (A, B \text{ are } \text{disj. events)}) \end{aligned}$$

1. A box has (24) bulbs of which (4) are defective. Choose (4) bulbs, find the pr. that they are defective.

Sol.



$$n=24$$

$$n(S) = \binom{n}{r} = \binom{24}{4} \quad (\text{Choose at once})$$

Let E : be defective bulbs.

$$n(E) = \binom{4}{4} \cdot \binom{20}{0} = 1 \cdot 1 = 1$$

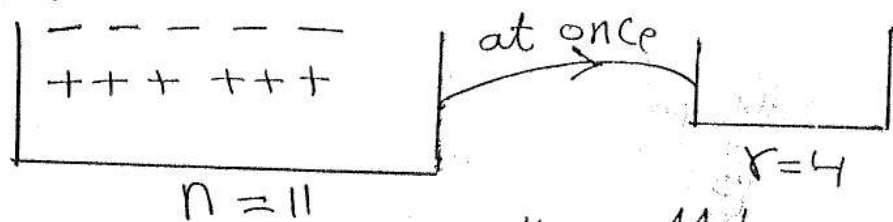
(Since $\binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{0} = 1$)

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{\binom{4}{4} \cdot \binom{20}{0}}{\binom{24}{4}} = \frac{1}{\binom{24}{4}} \in [0, 1].$$

2. A set of (11) integers; (5) of them are negative and the others are positive. Choose a sample of (4) integers and multiply them, then find the pr. that the product is:

a. negative b. positive

Sol.

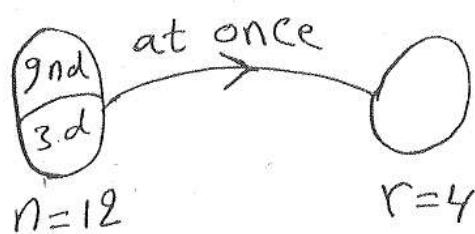


$$n=11$$

$$n(S) = \binom{n}{r} = \binom{11}{4} = \frac{11!}{4!7!} = 330$$

$\therefore S$ has (330) samples.

a. Let A be the sample that the product multiple of (4) chosen integers is positive.

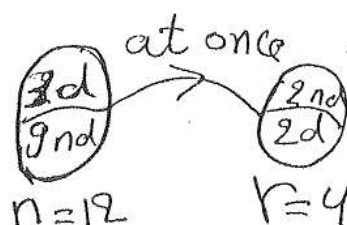


$$n(s) = \binom{12}{4} = \frac{12!}{4!(12-4)!} = 495 \text{ samples}$$

② Let A : be a sample has 2d (2-defective) and 2nd (2-not defective).

$$n(A) = \binom{3}{2} \binom{9}{2}$$

$$\therefore P(A) = \frac{\binom{3}{2} \binom{9}{2}}{\binom{12}{4}}$$



③ Let B : be the sample that has at least one defective than.

$$B = B_1 \cup B_2 \cup B_3$$

B_1, B_2, B_3 are disjoint events.

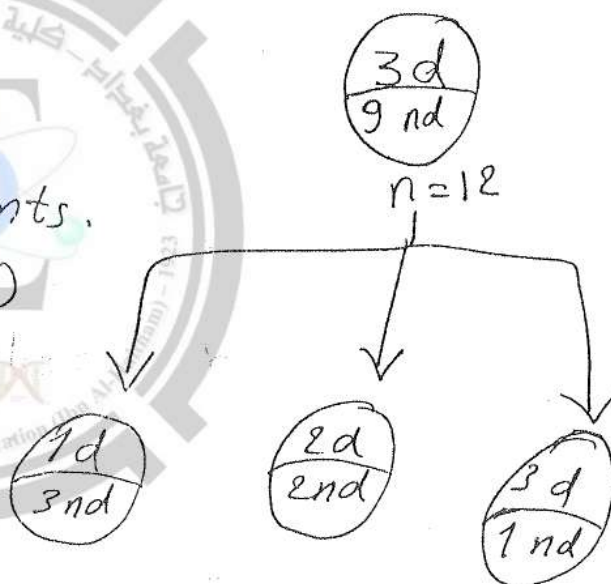
$$\therefore P(B) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3)$$

$$P(B_1) = \frac{\binom{3}{1} \binom{9}{3}}{\binom{12}{4}}$$

$$P(B_2) = \frac{\binom{3}{2} \binom{9}{2}}{\binom{12}{4}}$$

$$P(B_3) = \frac{\binom{3}{3} \binom{9}{1}}{\binom{12}{4}}$$

$$P(B) = \frac{\binom{3}{1} \binom{9}{3} + \binom{3}{2} \binom{9}{2} + \binom{3}{3} \binom{9}{1}}{\binom{12}{4}} \in [0, 1]$$



PP. (42)

— Exercises —

① Given (9) Coins. (2) Coins have (H) on one side and (T) on the other, (3) Coins have (H) on both side and (4) Coins have (T) on both side. Choose a Coin and find the pr. that H happens.

$$\left. \begin{aligned} +, +, +, + &= + \rightarrow A_1 \\ +, +, -, - &= + \rightarrow A_2 \\ -, -, -, - &= + \rightarrow A_3 \end{aligned} \right\} A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \quad (3 \text{ cases})$$

$\Rightarrow A_1, A_2 \text{ and } A_3 \text{ are disjoint events.}$

$$\therefore P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$$

$$P(A_1) = \frac{{}^6C_4 {}^2C_0}{{}^{11}C_4} = \frac{15}{330} \in [0, 1]$$

$$P(A_2) = \frac{{}^6C_2 {}^4C_2}{{}^{11}C_4} = \frac{150}{330} \in [0, 1]$$

$$P(A_3) = \frac{{}^6C_0 {}^5C_4}{{}^{11}C_4} = \frac{5}{330} \in [0, 1]$$

$$\therefore P(A) = \frac{15 + 150 + 5}{330} = \frac{170}{330} = \frac{17}{33} \in [0, 1]$$

b. Let B be the sample that the Product multiple of (4) Chosen integer is negative.

$$\text{i.e. } \left. \begin{aligned} +, +, +, - &= - \rightarrow B_1 \\ +, -, -, - &= - \rightarrow B_2 \end{aligned} \right\} B = B_1 \cup B_2$$

$B_1, B_2 \text{ are disjoint events}$

$$\therefore P(B) = P(B_1) + P(B_2)$$

OR Since the product is positive or negative, then:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A^c) = 1 - P(A) && (\text{By Th. 2}) \\ &= 1 - \frac{17}{33} \\ &= \frac{16}{33} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} S \\ \boxed{\begin{array}{cc} + & - \\ \hline \end{array}} \\ \cdot = \text{product} \end{array}$$

3. Given a set of (12) transistors of which (3) are defective. Choose a sample of (4) transistors, then find the pr. that:

a. Two transistors are defective

b. At least one transistors is defective.

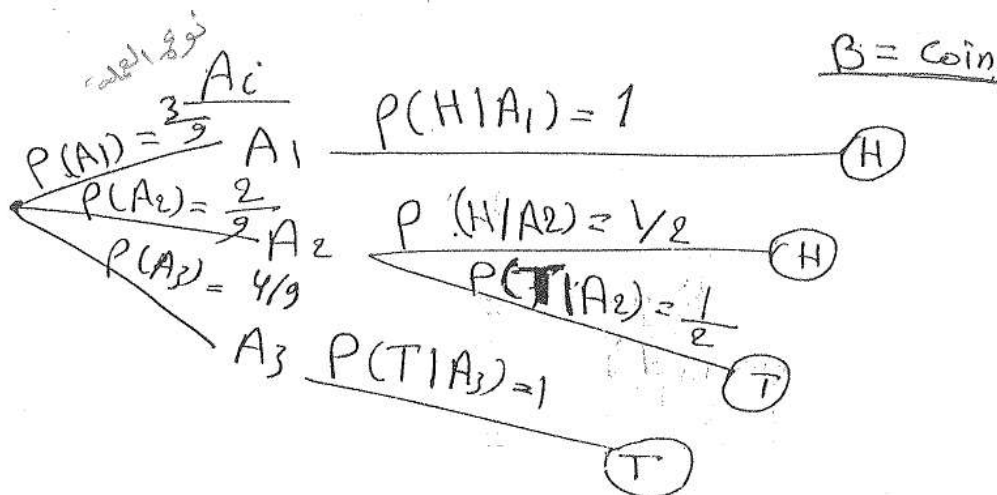
Sol.

Sol.

$$\begin{matrix} A_1 \\ H/H \\ (3) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} A_2 \\ H/T \\ (2) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} A_3 \\ T/T \\ (4) \end{matrix}$$



Let B : be a coin to get (H)

$$\begin{aligned}
 P(\text{to get } H) &= P[(A_1, H) \cup (A_2, H)] \\
 &= P(A_1, H) + P(A_2, H) \\
 &= P(A_1) \cdot P(H|A_1) + P(A_2) \cdot P(H|A_2) \\
 &= \left(\frac{3}{9}\right) \cdot (1) + \left(\frac{2}{9}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \\
 &= \frac{4}{9} \in [0, 1]
 \end{aligned}$$

② Choose a sample of (5) balls from (6) white and (10) black balls one by one with out replace. Find the Pr. to get a sample (w, w, b, w, b) .

Sol.

6 w	10 b
n=16	

$\xrightarrow[\text{with rep.}]{(1-1)}$

13
r=5

$$P(w_1, w_2, b_1, w_3, b_2) = ? \quad (\text{By multip. rule})$$

$$\begin{aligned}
 P(w_1, w_2, b_1, w_3, b_2) &= P(w_1) \cdot P(w_2|w_1) \cdot P(b_1|w_1, w_2) \cdot P(w_3|w_1, w_2, b_1) \\
 &\quad \cdot P(b_2|w_1, w_2, b_1, w_3) \\
 &= \frac{6}{16} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{10}{14} \cdot \frac{4}{13} \cdot \frac{9}{12} \in [0, 1]
 \end{aligned}$$

(7)

Given (one) blue Card and (4) red Cards which are named A, B, C and D, choose (2) Cards one by one without replace. Find the pr. that:

- a- both cards are red, given that Card A is chosen.
- b. both cards are red, given one red card is chosen.

Sol.

$$\boxed{\text{blue}}_{n_1} + \boxed{A \mid B \mid C \mid D}_{n_2} \rightarrow \frac{n_1 + n_2}{n}$$

$$n(S) = P_2^5 = \frac{5!}{3!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3!} = 5 \times 4 = 20 = n(S)$$

a- Both cards are red, given that Card A is chosen.

$$E = \left\{ \begin{array}{l} (A, B), (B, A), (C, A), (D, A) \\ (A, C), (B, C), (C, B), (D, B) \\ (A, D), (B, D), (C, D), (D, C) \end{array} \right\} \rightarrow n(E) = 12$$

$$P(E) = \frac{12}{20} \in [0, 1]$$

$$F = \left\{ \begin{array}{l} (A, b), (b, A) \\ (A, B), (B, A) \\ (A, C), (C, A) \\ (A, D), (D, A) \end{array} \right\} \rightarrow n(F) = 8$$

$$P(F) = \frac{8}{20} \in [0, 1]$$

$$EF = \left\{ \begin{array}{l} (A, B), (B, A) \\ (A, C), (C, A) \\ (A, D), (D, A) \end{array} \right\} \rightarrow n(EF) = 6$$

$$P(EF) = \frac{6}{20} \in [0, 1]$$

L. side $\binom{n+1}{r} = \frac{(n+1)!}{r!((n+1)-r)!}$

*

$$= \frac{(n+1)n!}{r!((n+1)-r)!}$$

$$= \frac{n!(r+n-r+1)}{r!(n-r+1)!}$$

$$= \frac{rn! + n!(n-r+1)}{r!(n+1-r)!}$$

$$= \frac{rn!}{r!(n+1-r)!} + \frac{n!(n-r+1)}{r!(n+1-r)!}$$

$$= \frac{\cancel{r}n!}{\cancel{r}(r-1)!(n+1-r)!} + \frac{(n-r+1)n!}{r!((n+1)-r)(n-r)!}$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!(n-(r-1))!} + \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$= \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}$$

∴

$$\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}$$

$$P(E|F) = \frac{n(EF)}{P(F)} = \frac{\frac{6}{20}}{\frac{8}{20}} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \in [0,1]$$

b- Both cards are red, given one red card is chosen.

$$G = \left\{ \begin{array}{ll} (A,b), & (b,A) \\ (B,b), & (b,B) \\ (C,b), & (b,C) \\ (D,b), & (b,D) \end{array} \right\} \rightarrow n(G) = 8$$

$$P(G) = \frac{8}{20} \in [0,1]$$

$$EG = \emptyset \rightarrow P(EG) = P(\emptyset) = 0$$

$$P(E|G) = \frac{P(EG)}{P(G)} = \frac{0}{8/20} = 0 \in [0,1]$$

Ex. Prove that:

$$\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}$$

Sol.

R. Side $\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} =$

$$= \frac{n!}{r!(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}$$

$$= \frac{n!}{r(r-1)!(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)(n-r)!}$$

$$= n! \left[\frac{(n-r+1) + r}{r(r-1)!(n-r+1)(n-r)!} \right]$$

$$= \frac{(n+1)n!}{r!(n-r+1)!} = \frac{(n+1)!}{r!(n-r+1)!}$$

$$= \binom{n+1}{r} = \text{L.S.}$$

(9)

→

" In Playing Cards "

Example (1): How many 5 - cards will have 3 aces and 2 king

Sol.
$$n = C_3^4 \cdot C_2^4$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 aces(A) king

How many 5-cards will have 3 hearts and 2 spades?

$$n = C_3^{13} \cdot C_2^{13}$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 hearts(♥) spades (♠)

Note: Ace (A), Heart (♥), Club (♣), Diamond(♦), Spade

Jack (J), Queen (Q), King (K) = the face cards (Pict.)

These are standard deck of (52) cards has four suits (♥, ♣, ♦, ♠) with (13) cards in each suit.

(♦, ♥) → red cards (26) & (♣, ♠) → black cards (26)

Example (2):

✓ Let E = the drawn card is a spade (♠).
 F = the drawn card is a face card. (صورة)

Let G = the drawn card is a heart (♥).
 H = the drawn card is a club (♣).

① Are E & F independent events?

② Are G & H independent events?

Sol. ① $P(E) = \left(\frac{13}{52}\right)$, $P(F) = \left(\frac{12}{52}\right)$

$$P(E \cap F) = P(\text{J♠, Q♠, K♠}) = \frac{3}{52}$$

$$P(E \cap F) = \frac{3}{52} = P(E) \cdot P(F) = \left(\frac{13}{52}\right) \cdot \left(\frac{12}{52}\right) = \frac{3}{52}$$

Then E & F are indep. events.

$$(2) P(G) = \frac{13}{52}, P(H) = \frac{13}{52}, G \cap H = \emptyset$$

$$\therefore P(G \cap H) = P(\emptyset) = 0 \quad (\text{by Th. 1})$$

$$P(G)P(H) = \left(\frac{13}{52}\right)\left(\frac{13}{52}\right) = \frac{1}{16} \neq P(G \cap H) = 0$$

Example (3): A single card is drawn from a standard 52-card deck. Test the following events for independence:

(A) E = the drawn card is a red card.

F = the drawn card's number is divisible by 5.

(B) G = the drawn card is a king.

H = the drawn card is a queen.

① Are E & F indep. events?

② Are G & H indep. events?

H.W.

Example (4): In a single card is drawn from a standard 52-card deck. Find the pr. of each of the following events.

$$① P(\text{ace}) = \frac{4}{52} \quad ② P(\text{face card}) = \frac{12}{52}$$

$\{\heartsuit A, \diamondsuit A, \clubsuit A, \spadesuit A\}$

$$③ P(\text{spade}) = \frac{13}{52}$$

$$④ P(\text{spade or heart}) = \frac{13}{52} + \frac{13}{52} = \frac{26}{52}$$

$$⑤ P(\text{red card}) = \frac{26}{52}, \quad ⑥ P(\text{red or face}) = \frac{26}{52} + \frac{12}{52} - \frac{6}{52}$$

↓
($\heartsuit$ & $\diamondsuit$)
13 ← 13

(face & red) ←
(J, K, Q (2 red)) = 6

Example (5): Find the pr. of randomly drawing two aces from an ordinary deck of 52 playing cards; if we sample:

(a) without replacement. (b) with replacement.

Sol. (a) $P = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} = P(AA)$ (by multiplication rule)

→ 15 ← → 15 ←

(b) $P = \frac{4}{52} \cdot \frac{4}{52} = P(AA)$ (= = =)

(c) at once → $P = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{52}{2}} = P(2A)$

Example (1): If a coin is tossed twice.

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

and Let:

$$A = \text{ahead on the first toss} = \{HH, HT\}$$

$$B = \text{ahead on the second toss} = \{HH, TH\}$$

Are A & B independent events?

Sol. $P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$$AB = \{TH\} \rightarrow P(AB) = \frac{1}{4}$$

$$P(A)P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = P(AB)$$

$\therefore$ A & B are indep. events.

Example (2): Roll a die once.

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Find the pr. that:

E_1 : The die shows an even number.

E_2 : The die shows a (1).

E_3 : The die shows a multiple of (3) = $\{3, 6\}$

E_4 : The die shows a number less than (5) = $\{1, 2, 3, 4\}$

E_5 : The die shows a number (7) = $\emptyset$

E_6 : The die shows a number less than (10).
= $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = S$

H.W.

Example (3): Rolling a die twice. Find the pr. that the sum of the numbers rolled is greater than (3).

Sol. $P(\text{sum} > 3) = ?$

$$P(\text{sum} \leq 3) = P(\text{sum is 2}) + P(\text{sum is 3})$$

$$= \left(\frac{1}{36} + \frac{2}{36} \right) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

$\{1, 1\}$ $\{2, 1\}, \{1, 2\}$

$$\therefore P(\text{sum} > 3) = 1 - P(\text{sum} \leq 3) \quad (\text{by Th. } P(A) = 1 - P(A^c))$$
$$= 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$$

3

Example (4): Suppose that two dice are rolled.
 (A) what is the pr. that a sum of (7) or (11) turns up?
 (B) what is the pr. that both dice turn up the same or that a sum less than (5) turns up?

Sol. $A = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\} \rightarrow n(A) = 6$
 (A) $B = \{(5,6), (6,5)\} \rightarrow n(B) = 2$
 $n(S) = 6^2 = 36$, $AB = \emptyset$ (A & B are disjoint).

$$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$= \frac{6}{36} + \frac{2}{36} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

(B) $A = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$
 $B = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (3,1)\}$
 $AB = \{(1,1), (2,2)\} \rightarrow A$ & B are joint events.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

$$= \frac{6}{36} + \frac{6}{36} - \frac{2}{36} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

Now; (C) what is the pr. that a sum of (2) or (3) turns up?

(D) what is the pr. that both dice turn up the same or that a sum greater than (8) turns up? (H.W.)

Example (5): What is the pr. that a number selected at random from the first (500) positive integers is (exactly) divided by (3) or (4)?

$$A: \frac{500}{3} \approx 166, \quad B: \frac{500}{4} = 125$$

AB : the largest integer less than or equal to $\frac{500}{12} = 41$

$$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

$$= \frac{166}{500} + \frac{125}{500} - \frac{41}{500} = .5$$

Example (6): what is the pr. that a number selected at random from the first (140) positive integer is (exactly) divided by (4) or (6)?

(H.W.)

4

Example (7): In a certain College, 25% of the students failed mathematics, 15% of the students failed Chemistry, and 10% of the students failed both mathematics and Chemistry. A student is selected at random.

- (i) If the student failed Chemistry, what is the pr. that he failed mathematics?
 (ii) If he failed mathematics, what is the pr. that he failed Chem?
 (iii) What is the pr. that he failed math. or Chemistry?

Sol. Let $M = \{ \text{students who failed math.} \}$
 $C = \{ \text{students who failed Chem.} \}$

$$P(M) = .25, P(C) = .15, P(MC) = .10$$

$$(i) P(M|C) = \frac{P(MC)}{P(C)} = \frac{.10}{.15} = \frac{2}{3}$$

$$(ii) P(C|M) = \frac{P(MC)}{P(M)} = \frac{.10}{.25} = \frac{2}{5}$$

$$(iii) P(M \cup C) = P(M) + P(C) - P(MC) \\ = .25 + .15 - .10 = .30 = \frac{3}{10} = 30\%$$

Example (8): Rolling a die twice. Find the pr. that:

(a) the first die shows a (2) or the sum of the results is (6) or (7).

Sol. $P(A) = \frac{6}{36}, P(B) = \frac{11}{36}, P(AB) = \frac{2}{36}$ s.t.

$$A = \{ (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6) \}$$

$$B = \{ (5,1), (5,2), (6,1), (4,2), (4,3), (3,3), (3,4), (2,4), (2,5), (1,5), (1,6) \}$$

$$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) \quad (\text{by Th. 3}) \\ = \frac{6}{36} + \frac{11}{36} - \frac{2}{36} \quad (\text{Since } A \text{ \& } B \text{ are joint events.}) \\ = \frac{15}{36} = \frac{5}{12} \in [0,1]$$

(b) The sum of the results is 11, or the Second die shows a (5).

Sol. $P(\text{sum is 11}) = \frac{2}{36}, P(2^{\text{nd}} \text{ die shows a (5)}) = \frac{6}{36}$

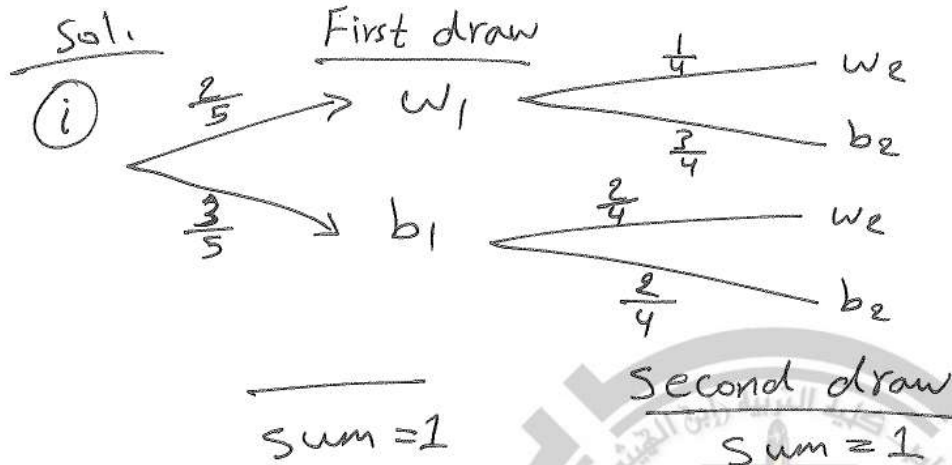
$$\underline{\underline{5}} \quad \frac{5}{12}$$

$$P(\text{sum is 11 and } 2^{\text{nd}} \text{ die shows } a(5)) = \frac{1}{36}$$

$$P(\text{sum is 11 or } 2^{\text{nd}} \text{ die shows } a(5)) = \frac{2}{36} + \frac{6}{36} - \frac{1}{36}$$

$$= \frac{7}{36}$$

Example (9): Two balls are drawn without replacement, from a box containing (3) blue and (2) white balls. What is the pr. of drawing a white ball on the 2nd draw?



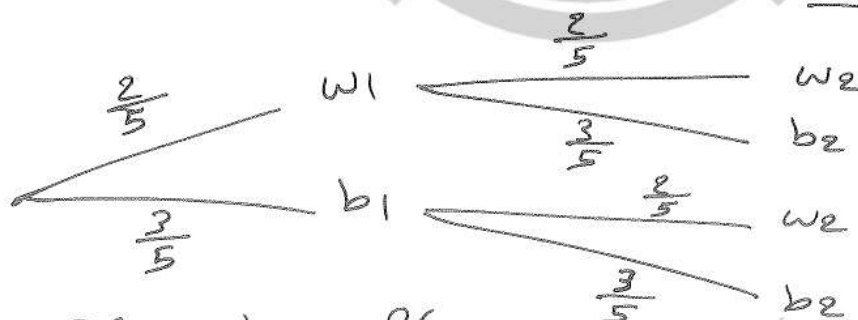
$$P(w_2) = P(w_1 w_2) + P(b_1 w_2)$$

$$= \left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{3}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \in [0, 1]$$

(نظرية بيز التفاضلية) (Th. 1.2)

(ii) If two balls are drawn with replacement?



$$P(w_2) = P(w_1 w_2) + P(b_1 w_2)$$

$$= \left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right) + \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)$$

$$= (0.16) + (0.24)$$

$$= 0.40$$

(by Th. 1.2) (نظرية بيز التفاضلية)

المطلوب: ان تكون الكرة بيضاء (w) وفي التجربة (2) : w_2

١. إذا كان احتمال أن يعيش رجل (10) سنوات أخرى هو $(\frac{1}{4})$.
 واحتمال أن تعيش زوجته (10) سنوات أخرى هو $(\frac{1}{3})$. جد احتمال:

- ① أن يعيش الاثنان (10) سنوات أخرى .
- ② أن يعيش أحدهما على الأقل (10) سنوات أخرى .
- ③ أن يموت الاثنان خلال السنوات العشر .
- ④ أن تعيش الزوجة (10) سنوات (ويموت الرجل) .
- ⑤ أن يعيش أحدهما على الأكثر (10) سنوات أخرى .

Sol. A: أن يعيش الرجل (10) سنوات أخرى .
 B: أن تعيش زوجته (10) سنوات أخرى .
 (الحدثان مستقلتان) indep.

$$P(A) = \frac{1}{4} , P(B) = \frac{1}{3}$$

$$\textcircled{1} P(AB) = P(A)P(B) \quad (\text{by def. of independent events})$$

$$= (\frac{1}{4})(\frac{1}{3}) = \frac{1}{12}$$

$$\textcircled{2} P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

$$= (\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{12})$$

يعيشان كلاهما

$$\textcircled{3} P(A^c B^c) = 1 - P(A \cup B)$$

$$= 1 - \frac{7}{12}$$

by $(A^c B^c = (A \cup B)^c)$ Demorgan law

$$\textcircled{4} P(A^c B) = P(A^c) \cdot P(B)$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4} \quad (\text{by Th. (Th. 10)})$$

$P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$$\textcircled{5} P = P(A^c B) + P(AB^c) + P(A^c B^c)$$

يعيش الرجل ويموت المرأة $\nearrow$ $\xrightarrow{A^c B}$
 يعيش الرجل وتعيش المرأة $\nearrow$ $\xrightarrow{AB}$
 يموت الاثنان $\nearrow$ $\xrightarrow{A^c B^c}$

$$P(B^c) = 1 - P(B)$$

$$= 1 - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{2}{3}$$

Complete ---

مثال: اختيرت ورقة من اوراق لعب البالغة (٥٢) ورقة جد

(أ) احتمال الورقة التي تحمل الرقم ١٠

(ب) احتمال ان تكون الورقة نوع $\diamond$

(ج) اذا اختيرت (٤) اوراق ، ما احتمال ان تكون احدهم J .

(د) اذا اختيرت (٣) ورقات ما احتمال ان تكون احدهم 3 والاخرى صورة والثالثة أي ورقة اخرى من اوراق اللعب .

الحل :- (أ)

$$P(10) = \frac{\binom{4}{1}}{\binom{52}{1}} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

(ب)

$$P(\diamond) = \frac{\binom{13}{1}}{\binom{52}{1}} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

(ج)

$$P(J, \underset{\substack{\text{سماكة} \\ \text{أربعة}}}{C, C, C}) = \frac{\binom{4}{1} \binom{48}{3}}{\binom{52}{4}}$$

(د)

$$P(3, \underset{\substack{\text{صورة} \\ \text{أوراق}}}{P, c}) = \frac{\binom{4}{1} \binom{12}{1} \binom{36}{1}}{\binom{52}{3}} = \frac{4 * 12 * 36}{\binom{52}{3}}$$

مثال / البيانات التالية تمثل مجموعة من الطلبة مصنفة حسب القسم والجنس

قسم الفيزياء B_1	قسم علوم الحياة B_2	
٢١٠	١٨٠	A1 ذكور (٣٩٠)
١١٥	١٢٥	A2 إناث (٢٤٠)
٣٢٥	٣٠٥	العدد الكلي (٦٣٠)

إذا اختير طالب واحد من العينة ما احتمال (أ) أن يكون الطالب من قسم الفيزياء (ب) أن يكون ذكر (ج) أن تكون أنثى ومن علوم الحياة (د) أن يكون ذكر أو من الفيزياء
الحل :- (أ)

$$P(B_1) = \frac{\binom{325}{1}}{\binom{630}{1}} = \frac{325}{630} = \frac{65}{126}$$

(ب)

$$P(A_1) = \frac{\binom{390}{1}}{\binom{630}{1}} = \frac{390}{630} = \frac{13}{21}$$

(ج)

$$P(A_2 B_2) = \frac{\binom{125}{1}}{\binom{360}{1}} = \frac{125}{360} = \frac{25}{72}$$

(د)

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup B_1) &= P(A_1) + P(B_1) - P(A_1 B_1) \\ &= \frac{\binom{390}{1}}{\binom{630}{1}} + \frac{\binom{325}{1}}{\binom{630}{1}} - \frac{\binom{210}{1}}{\binom{630}{1}} \\ &= \frac{390 + 325 - 210}{630} \\ &= \frac{505}{630} = \frac{101}{126} \end{aligned}$$

مثال : مجتمع يضم (١٠٠) شخص تم اجراء فحص لمعرفة صنف الدم لكل منهم وكانت

النتائج كالتالي

صنف الدم	A	B	AB	O
العدد	٢٢	١١	٦٠	٧
المجموع (١٠٠) شخص				

ما احتمال أ) شخص يحمل صنف الدم AB

ت) شخص لا يحمل صنف الدم O

ث) ثلاث اشخاص ادهم يحمل صنف الدم O

ج) شخصين ادهم يحمل صنف الدم A والاخر B

$$P(AB) = \frac{\binom{60}{1}}{\binom{100}{1}} = \frac{60}{100} = 0.6$$

أ)

$$P(O) = \frac{\binom{7}{1}}{\binom{100}{1}} = \frac{7}{100} = 0.07$$

ب)

يحمل صنف O

$$P(O^c) = 1 - P(O) \rightarrow P(O^c) = 1 - 0.07 = 0.93$$

لا يحمل صنف O

ح) F : تمثل ثلاث اشخاص ادهم يحمل الصنف O

$$P(F) = \frac{\binom{7}{1} \binom{93}{2}}{\binom{100}{3}}$$

(د) E: تمثل القيمة المكونة من شخصين احدهم يحمل الصنف A والاخر الصنف B

$$P(A, B) = P(E) = \frac{\binom{22}{1} \binom{11}{1}}{\binom{100}{2}} = \frac{22 * 11}{100! / 2!(98)!}$$

مثال / البيانات التالية تمثل عدد الاشخاص الذين هم بحاجة الى طبيب عام او اسنان من نوع الدعم المالي

الحل :-

مصدر الدعم / الاختصاص	طبيب عام B1	طبيب اسنان B2	
A1 حكومي	٢٨٠	٤٧٠	٧٥٠
A2 شخصي	١٤٠	١١٠	٢٥٠
	٤٢٠	٥٨٠	١٠٠٠

اذا اختير شخص وبشكل عشوائي فما احتمال ان

(أ) ان يكون الدعم حكومي (ب) يراجع طبيب اسنان

(ج) ذو دعم شخصي او يراجع طبيب عام

(د) ذو دعم حكومي ويراجع طبيب اسنان

الحل :- (أ)

$$P(A1) = \frac{\binom{750}{1}}{\binom{1000}{1}}$$

(ب)

$$P(B2) = \frac{\binom{580}{1}}{\binom{1000}{1}}$$

$$P(A_2 \cup B_1) = P(A_2) + P(B_1) - P(A_2 B_1)$$

$$P(A_2 \cup B_1) = \frac{\binom{250}{1}}{\binom{1000}{1}} + \frac{\binom{420}{1}}{\binom{1000}{1}} - \frac{\binom{140}{1}}{\binom{1000}{1}}$$

$$= \frac{53}{100}$$

(ج)

$$P(A_1 B_2) = \frac{\binom{470}{1}}{\binom{1000}{1}}$$

$$= \frac{470}{1000} = 0.47$$

(د)

اسئلة عامة

١) اختيرت ورقة واحدة من أوراق اللعب البالغة ٥٢ فما احتمال

(١) ان يكون نوع ٥ (٣) ان يكون K او Q

(٢) ان تكون صورة (٤) ليست اس A

٢) اذا اختيرت ثلاث ورقات فما احتمال

(١) ان تكون جميعها حمراء حمراء 26

(٢) احتوائها على الاقل A (اس) (دعنا نكتب) سوداء 26

(٣) احتوائها على الاكثر رقم ١٠

الكلبي 52

(٤) اثنان صور

الحل :- (١)

$$P(RRR) = \frac{\binom{26}{3}}{\binom{52}{3}}$$

$$= \frac{26!}{3!23!} = \frac{24}{204}$$

$$= \frac{3!23!}{52!} = \frac{24}{204}$$

(٢) على الأقل A $\Leftarrow$ AXX ، AAX ، AAA المكمل هي XXX (المكمل ليس هو A)

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{\binom{48}{3}}{\binom{52}{3}} \quad \leftarrow \quad P(A^c) = \frac{\binom{48}{3}}{\binom{52}{3}} =$$

$$P(10) = \frac{\binom{4}{1} \binom{48}{2}}{\binom{52}{3}} + \frac{\binom{48}{3}}{\binom{52}{3}}$$

$$\frac{\binom{12}{2} \binom{40}{1}}{\binom{52}{3}} =$$

P (صورة وصورة C)

الحوادث المستقلة "Independent Events"

يقال للحدثين A, B في الفضاء العيني لتجربة عشوائية معينة أنها مستقلة إذا لم يؤثر أحدهما على وقوع الآخر .

وهذا يعني أن A, B حادثين مستقلين إذا وفقط إذا تحققت العلاقة التالية

$$P(A) \times P(B) = P(AB)$$

ملاحظة : كل حادثين مستقلين في Ω فانهما يجب ان يكون متصلين والعكس غير صحيح

مثال :- إذا كان A, B حادثين مستقلين في Ω بحيث ان

$$P(A) = 0.4 , P(B) = 0.2$$

جد :- $P(A \cup B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

الحل :-

$$= P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$$

$$= 0.4 + 0.2 - (0.4)(0.2)$$

$$= 0.6 - 0.08$$

$$= 0.52$$

نظرية ١

نظرية (١) إذا كان كل من A و B حادثين مستقلين في تجربة عشوائية معينة فان :-

(١) $P(A) \cdot P(B^c) = P(AB^c)$ ← [indep. Events] أيضا

(٢) $P(A^c) \cdot P(B) = P(A^c B)$ ← [indep. Events] أيضا

(٣) $P(A^c) \cdot P(B^c) = P(A^c B^c)$ ← [indep. Events] أيضا

مثال :- إذا كان احتمال نجاح احمد في امتحان معين هو (٠,٨) واحتمال نجاح سعيد في

نفس الامتحان هو (٠,٧) جد :-

(١) احتمال نجاح احمد وعدم نجاح سعيد

(٢) احتمال نجاح إحداهما على الأكثر

الحل :-

نفرض ان نجاح احمد هو $P(A) = 0.8 \leftarrow A$

نفرض ان نجاح سعيد هو $P(B) = 0.7 \leftarrow B$

نلاحظ استقلال الحادثين

(١)

$$P(AB^c) = P(A)P(B^c) = (0.8)[1 - 0.7] = 0.24$$

(٢)

$$P(AB^c) + P(A^c B) + P(A^c B^c)$$

$$\begin{aligned} &= P(A)P(B^c) + P(A^c) \cdot P(B) + P(A^c)P(B^c) \\ &= (0.8)(0.3) + (0.2)(0.7) + (0.2)(0.3) \\ &= 0.44 \end{aligned}$$

نظرية (٢) إذا كان كل من A, B حادثين منفصلين (disjoint events) بحيث ان $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$

فان A, B حادثين معتمدين (غير مستقلين) (dependent)

“Dependent Events”

الحوادث المعتمدة

يقال ان A, B حادثين معتمدين (غير مستقلين) اذا فقط اذا $P(A) \cdot P(B) \neq P(AB)$

مثال :- سحب عنصرين من مجموعة مكونة من أربعة عناصر {1,2,3,4} عنصر عنصر

بدون ارجاع (ومع الارجاع) فاذا كانت الحادثين B,A كما يلي :-

A : العنصر الاول فيها هو (٢).

B : العنصر الثاني بها هو (١).

هل ان A,B حادثين مستقلين ؟

$$P_2^4 = \frac{4!}{2!} = 12$$

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{cccc} (1,2) & (2,1) & (3,1) & (4,1) \\ (1,3) & (2,3) & (3,2) & (4,2) \\ (1,4) & (2,4) & (3,4) & (4,3) \end{array} \right\}$$

الحل :- (١) طريقة السحب الاول (بدون ارجاع)

$$A = \{(2,1), (2,3), (2,4)\} \subset S \Rightarrow P(A) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

$$B = \{(2,1), (3,1), (4,1)\} \subset S \Rightarrow P(B) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

$$AB = \{(2,1)\} \subset S \Rightarrow P(AB) = \frac{1}{12}$$

$$P(A) \times P(B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

نلاحظ الآن

$$P(AB) = \frac{1}{12}$$

$$\therefore P(A) \times P(B) \neq P(AB)$$

$\therefore A$ و B غير مستقلين

الحادثين A,B غير مستقلين
 ٢) طريقة السحب الثانية (مع الارجاع)
 عدد عناصر هو $16=4^2$

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} (1,1) \ (2,1) \ (1,11) \ (4,11) \\ (1,2) \ (2,2) \ (3,2) \ (4,2) \\ (1,3) \ (2,3) \ (3,3) \ (3,3) \\ (1,4) \ (2,4) \ (3,4) \ (4,4) \end{array} \right\}$$

$$A = \{(2,1), (2,2), (2,3), (2,4)\} \Rightarrow P(A) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

$$B = \{(1,1), (2,1), (3,1), (4,1)\} \Rightarrow P(B) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

$$AB = \{(2,1)\} \Rightarrow P(AB) = \frac{1}{16}$$

$$P(A) \times P(B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

$$\therefore P(AB) = P(A) \times P(B)$$

∴ A,B حادثين مستقلين

اسود	احمر	اسود	احمر
			
A	A	A	A
2	2	2	2
3	3	3	3
4	4	4	4
5	5	5	5
6	6	6	6
7	7	7	7
8	8	8	8
9	9	9	9
10	10	10	10
J	J	J	J
Q	Q	Q	Q
K	K	K	K

اسئلة وتوضيح حول ورق اللعب :

العدد الكلي $52 = 13 \times 4$

عدد الصور $12 = 4 \times 3$

اسئلة : اختيرت ورقة من الاوراق البالغة (52) جد :

أ. احتمال ان تكون الورقة تحمل رقم (10) .

ب. احتمال ان تكون الورقة من نوع  .

ج. اذا اختيرت (4) ما هو احتمال ان تكون احدهم A .

د. اذا اختيرت (5) ورقات فما هو احتمال ان تكون احدهم A والثانية صمورة والثالثة اي ورقة اخرى من اوراق اللعب .
الحل :-

Let B = to get 10

$$P(B) = \frac{\binom{4}{1}}{\binom{52}{1}} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

ب.

Let C = to get $\diamond$ ($\diamond$ diomoned)

$$\therefore P(C) = \frac{\binom{13}{1}}{\binom{52}{1}} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

D = To get 4 cards one of them is A
52 - 4 = 48

$$\therefore P(D) = \frac{\binom{4}{1} \binom{48}{3}}{\binom{52}{4}}$$

Let E = to get (3) cards one of them A and the second is a picture and the third any other card

$$\therefore P(E) = \frac{\binom{4}{1} \binom{12}{1} \binom{36}{1}}{\binom{52}{3}}$$

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة ديالى

كلية تربية المقداد / قسم الرياضيات

محاضرات مادة

الإحصاء والاحتمالية

للعام الدراسي (2023-2024)

المرحلة الثالثة

Chapter Three

مدرس المادة: م.م هند إبراهيم محمد

Chapter Three

"Random variables and Probability Distribution"

Def.: A random variable X is a function that maps all elements $s \in S$ (all event in ζ) to a real numbers (R_x) denoted by R. V.

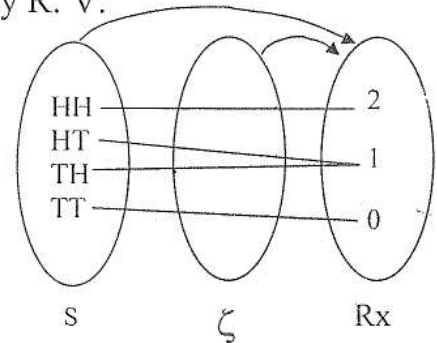
Ex 1.: Toss a coin twice.

Let X = number of H show that X is a R. V.

$S = \{HH, HT, TH, TT\}$

$x(HH) = 2, x(HT) = 1, x(TH) = 1, x(TT) = 0$

$R_x = \{x; x = 0, 1, 2\}$ countable



Note: We shall use X to denoted of R. V. X and x to denote of value of R. V. $X, x \in X: 0, 1, 2$ (in ex. "1").

Ex2.: Choose a point from interval $(0, 1)$.

Let X be the chosen point, to show X is a R. V.

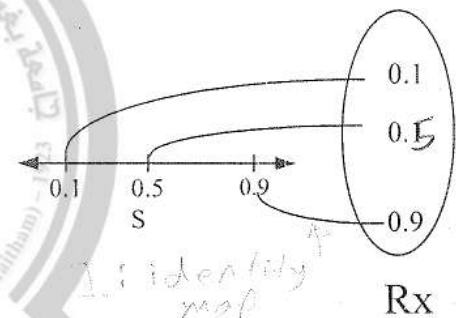
S consist all point in $(0, 1)$

$\therefore S$ has infinite number of points

The points in S are mapped to a real numbers.

then X is a R. V.

$R_x = \{x; 0 < x < 1\}$ uncountable.



Def.: A random variable X is say to be discret r. v. if R_x is countable.

See ex. "1" above, denoted by d. r. v.

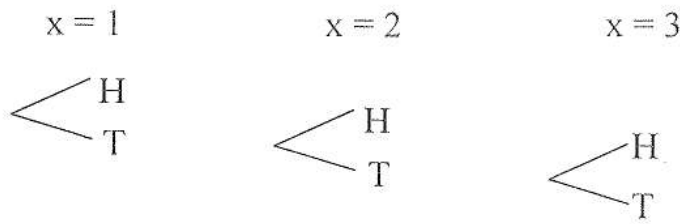
Def.: A random variable x is say to be continuous r. v. if R_x is uncountable denoted by c.r.v.

See ex, "2" above.

Ex.3: Toss a coin until first H appears.

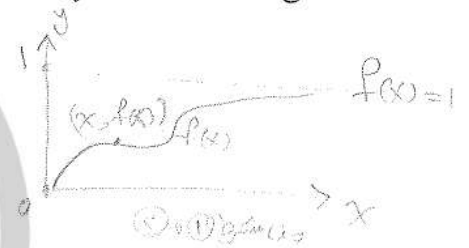
Let x : number of tosses. show that x is d.r.v.

Sol.:

 $x \in X: 1, 2, 3, 4, \dots$ $\therefore R_X = \{x; x \in \mathbb{N}\}$ countable $\therefore x$ is d.r.v.**Def.: Probability Mass function (P. M. f).**Let X be a d.r.v.A function f is a p.m.f. of X if $f(x) = p(X=x)$, and satisfy the following conditions: -

1. $f(x) \geq 0, \forall x \in X$

2. $\sum_{x \in X} f(x) = 1$

Note: 1. condition (1) shows the graph of $f(x)$ above of the x -axis.

2. Also, if $A \subset S$ then $P(x \in A) = \sum_{x \in A} f(x) = 1$

Ex.: Given $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{10}, & \text{for } x = 0, 1, 2, 3, 4 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$

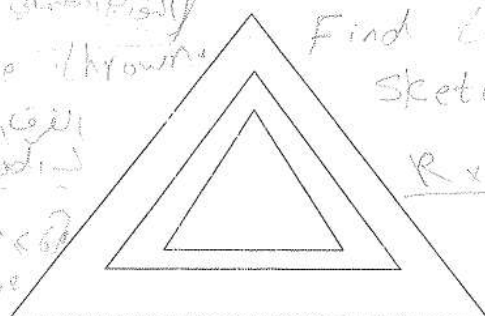
Show that $f(x)$ is a p.m.f.

$X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ (discrete random variable)

p.d.f. = $\left\{ \left(0, \frac{0}{10}\right), \left(1, \frac{1}{10}\right), \left(2, \frac{2}{10}\right), \left(3, \frac{3}{10}\right), \left(4, \frac{4}{10}\right) \right\}$

ex. Two dices are thrown
let $X = |d_1 - d_2|$

Find the p.m.f. $f(x)$ and sketch $f(x)$.



sol. $S = \{(d_1, d_2) : d_1, d_2 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$
 $n(S) = 36 = 6^2$

$P_X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} = \text{discrete}$

$f(0) = P(X=0) = \frac{6}{36} > 0$

$f(1) = P(X=1) = \frac{10}{36} > 0$

$f(2) = P(X=2) = \frac{8}{36} > 0$

$f(3) = P(X=3) = \frac{6}{36} > 0$

$f(4) = P(X=4) = \frac{4}{36} > 0$

$f(5) = P(X=5) = \frac{2}{36} > 0$

$\sum_{x \in X} f(x) = 1$

x	$f(x)$
0	$\frac{6}{36}$
1	$\frac{10}{36}$
2	$\frac{8}{36}$
3	$\frac{6}{36}$
4	$\frac{4}{36}$
5	$\frac{2}{36}$

cond. "1": T.p $f(x) \geq 0 \forall x \in X$

$$f(0)=0, f(1)=\frac{1}{10}, f(2)=\frac{2}{10}, f(3)=\frac{3}{10}, f(4)=\frac{4}{10}$$

$$\therefore f(x) \geq 0 \forall x \in X$$

$\therefore$ cond (1) satisfied.

$$\text{cond "2": T.p } \sum_{x=0}^4 f(x) = 1$$

$$\sum_{x=0}^4 f(x) = 0 + \frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \frac{3}{10} + \frac{4}{10} = \frac{10}{10} = 1.$$

$\therefore f(x)$ is a p. M.f

$$* p(x=1) = f(1) = \frac{1}{10}$$

$$* p(x=8) = f(8) = 0$$

$$* p(x \geq 3) = p[(x=3) \cup (x=4)] = p(x=3) + p(x=4) \\ = f(3) + f(4) = \frac{3}{10} + \frac{4}{10} = \frac{7}{10}$$

$$\text{or by note 2 } p(x \geq 3) = \sum_{x=3}^4 f(x) = f(3) + f(4) = \frac{7}{10}$$

$$* p(x \leq 2) = p[(x=2) \cup (x=1)] = p(x=2) + p(x=1) \\ = f(2) + f(1) = \frac{2}{10} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$$

Ex.: Given a p. m . f. $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{k}, & \text{for } x = 1, 2, 3, 4, 5 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$

find the value of k and sketch $f(x)$.

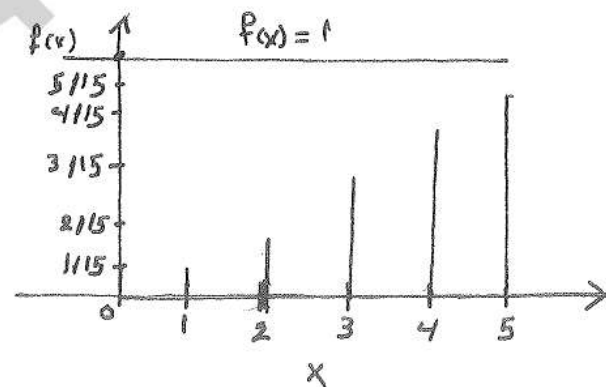
Sol.: $\therefore f(x)$ is a p. m . f.

$$\therefore \text{ by cond "2" we get } \sum_{x=1}^5 f(x) = 1$$

$$f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) = 1$$

$$\frac{1}{k} + \frac{2}{k} + \frac{3}{k} + \frac{4}{k} + \frac{5}{k} = 1 \Rightarrow \therefore k = 15$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} \frac{x}{15}, & \text{for } x = 1, 2, 3, 4, 5 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$



Ex.: Toss a coin 3-times. Let x = number of H. find the p. M.f. of x and sketch it's graph.

Sol.: $S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$

$\therefore S$ has (8) elements

x = no. of H,

$x \in X;$

$x = 0, 1, 2, 3$

$R_x = \{x; x = 0, 1, 2, 3\},$

R_x is a countable

x is d. r. v.

Event $(X = x)$: to get xH , $x = 0, 1, 2, 3$ when toss a coin 3- times

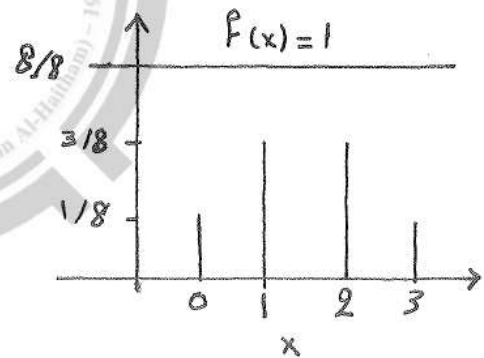
$\binom{3}{x}$: number of samples in event $(X = x)$ when toss a coin 3- times

$$f(x) = p(X = x) = \begin{cases} \frac{\binom{3}{x}}{8} & \text{for } x = 0, 1, 2, 3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

pr. d. f. = $\{(x_i, f(x_i))\}$

x	$f(x) = \frac{\binom{3}{x}}{8}$
0	1/8
1	3/8
2	3/8
3	1/8

$$\sum_{x=0}^3 f(x) = 1$$



Def.: "probability distribution"

A probability dist. of a r.v. X is a set of all ordered pair of x and $f(x)$, $\forall x \in X$.

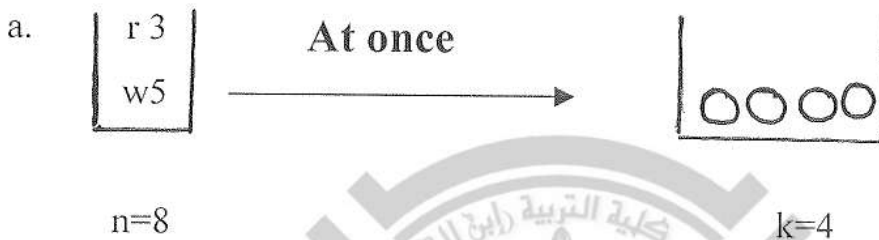
i. e.: pr. dist. of $x = \{(x_i, f(x_i)); \forall x_i \in X\}$ of X .

In ex. above: pr. dist. of $x = \left\{ \left(0, \frac{1}{8}\right), \left(1, \frac{3}{8}\right), \left(2, \frac{3}{8}\right), \left(3, \frac{1}{8}\right) \right\}$

Ex.: Given (3) red and (5) white balls choose a sample of any (4) balls, let x = number of white ball in a sample.

- Find the P. m. f of x
- Find the pr. that a sample has (2) white balls.
- Find the pr. that a sample has at least (3) white balls.

Sol.:



$\binom{8}{4}$: no. of sample in S

x = no. of w ball in a sample, $x = 1, 2, 3, 4$

Event ($X = x$): to get x w ball and $(4-x)$ r ball in a sample.

$\therefore$ Number of samples $\in (X = x)$ is $\binom{5}{x} \binom{3}{4-x}$

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} \frac{\binom{5}{x} \binom{3}{4-x}}{\binom{8}{4}}, & \text{for } x = 1, 2, 3, 4 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\text{b. } p(x = 2) = f(2) = \frac{\binom{5}{2} \binom{3}{2}}{\binom{8}{4}}$$

$$\text{c. } p(x \geq 3) = \sum_{x=3}^4 f(x) = f(3) + f(4)$$

Uniform Distribution of discrete random variable:

Def.: Given k integers: $1, 2, 3, \dots, k$ choose one integer

Let x = the chosen int., $S = \{1, 2, 3, \dots, k\}$

$$\therefore f(x) = p(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{k}, & \text{for } x = 1, 2, 3, \dots, k \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

is called uniform dist. of k integers.

To show $f(x)$ is a p. m. f. ?

cond. "1": T. p. $f(x) \geq 0$

$$\therefore k > 0 \Rightarrow \frac{1}{k} > 0$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{k} > 0 \quad \text{for } x = 1, 2, 3, \dots, k$$

$$= 0 \quad \text{otherwise}$$

$$\therefore f(x) \geq 0$$

cond "2": T. p. $\sum_{x=1}^k f(x) = 1$

$$\sum_{x=1}^k f(x) = \underbrace{\frac{1}{k} + \frac{1}{k} + \dots + \frac{1}{k}}_{k \text{ - times}} = \frac{k}{k} = 1$$

$\therefore f(x)$ is a p.m.f.

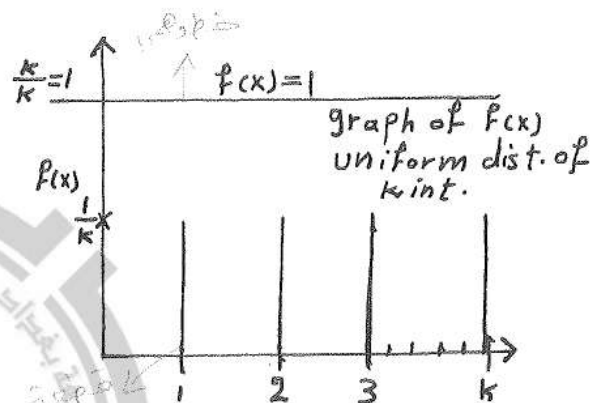
Exercise: 1

1. A r.v. x has a discrete dist. with p.m.f., $f(x) = \begin{cases} cx, & x = 1, 2, 3, 4, 5 \\ 0, & \text{o.w.} \end{cases}$
Find the pr. dist. of x .

2. x has a uniform dist. on six integers: $2, 3, 4, 5, 6, 7$ find the p.m.f. of x .

3. Given a set of integers $2, 3, \dots, 15$ choose one integer which divisible by 3.

Let x = the chosen int. find the p.m.f. of x .



4. Given a set of integers $\{1, 2, \dots, 10\}$ choose an integer and determine its divisors.

Let x = number of divisors. find the p.m.f. of x .

Probability density function (P.d.f):=

Let x be a c.r.v.

A function $f(x)$ is a p.d.f of x if for any interval $A \subset \mathbb{R}_x$

$p(x \in A) = \int_A f(x) dx$. and satisfy the following conditions:

$$1. f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad 2. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

$X(s) = x \in \mathbb{R}_x$, $\mathbb{R}_x$ is uncountable $A \subset \mathbb{R}_x$

A is a set of real no.

Suppose that $A = \{x; a < x < b\}$.

$$p(x \in A) = p(a < x < b) = \int_a^b f(x) dx$$

= Area under curve from a to b .

$f(x)$ is cont. over (a, b)

let $c \in (a, b)$

$f(x)$ is cont. at (c)

$$p(x = c) = \text{no.} = 0 \Rightarrow \int_c^c f(x) dx = 0$$

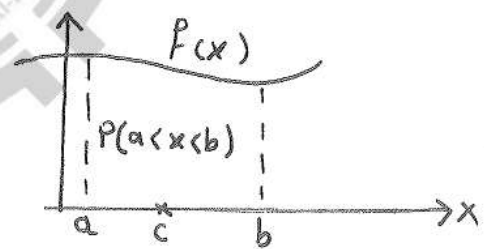
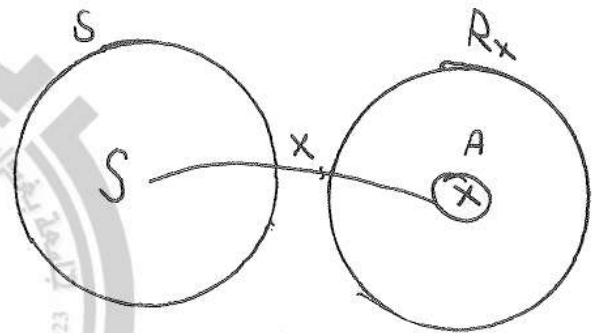
$$p(a \leq x \leq b) = p(x = a) + p(a < x < b) + p(x = b)$$

$$= p(a < x < b)$$

Note: When x is a d. r. v.

1. $p(a \leq x \leq b)$ not necessary equal to $p(a < x < b)$.

2. $p(x = c) = f(c)$ not necessary equal to zero.



Ex "1": Given a p.d.f,
$$f(x) = \begin{cases} kx & \text{for } 0 < x < 2 \\ k & \text{for } 2 \leq x < 4 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

a. find the value of k and sketch $f(x)$.

b. find $p(x > 1)$, $p(x < 3)$, $p(\frac{3}{2} < x < \frac{5}{2})$, $p(x < 1 | \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2})$

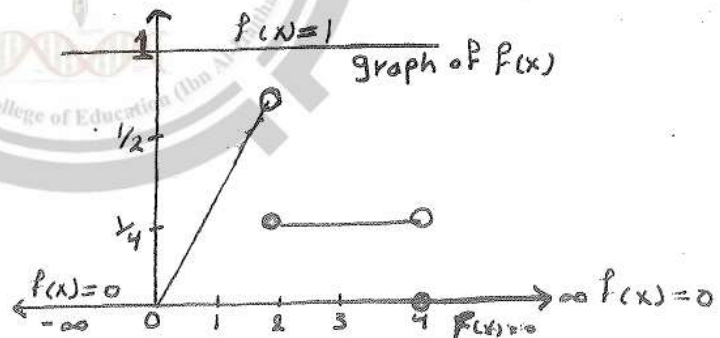
Sol.: a. by cond. "2" of p.d.f. $\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

$$1 = \int_0^2 kx dx + \int_2^4 k dx \Rightarrow 1 = \frac{k}{2} x^2 \Big|_0^2 + kx \Big|_2^4$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{k}{2} [4 - 0] + k[4 - 2] \Rightarrow 1 = 2k + 2k$$

$$\Rightarrow 1 = 4k \Rightarrow k = \frac{1}{4}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{4} & \text{for } 0 < x < 2 \\ \frac{1}{4} & \text{for } 2 \leq x < 4 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$



MATHEMATICS

$$\begin{aligned} \text{b. } p(x > 1) &= \int_1^2 \frac{x}{4} dx + \int_2^4 \frac{1}{4} dx \\ &= \frac{1}{8} x^2 \Big|_1^2 + \frac{1}{4} x \Big|_2^4 = \frac{1}{8} (4 - 1) + \frac{1}{4} (4 - 2) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} = \frac{7}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(x < 3) &= \int_0^2 \frac{x}{4} dx + \int_2^3 \frac{1}{4} dx \\ &= \frac{1}{8} x^2 \Big|_0^2 + \frac{1}{4} x \Big|_2^3 = \frac{1}{8} (4 - 0) + \frac{1}{4} (3 - 2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p\left(\frac{3}{2} < x < \frac{5}{2}\right) &= \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} \frac{x}{4} dx + \int_{\frac{5}{2}}^5 \frac{1}{4} dx \\ &= \frac{1}{8} x^2 \Big|_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{4} x \Big|_{\frac{5}{2}}^5 = \frac{1}{8} \left(4 - \frac{9}{4}\right) + \frac{1}{4} \left(\frac{5}{2} - 2\right) \\ &= \frac{1}{8} \left(\frac{7}{4}\right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{32} + \frac{1}{8} = \frac{11}{32} \end{aligned}$$

$$P\left(x < 1 \mid \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}\right) = P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

$$A = \{x; x < 1\} = \{x; 0 < x < 1\}, \quad B = \left\{x; \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}\right\}$$

$$AB = \left\{x; \frac{1}{2} < x < 1\right\}$$

$$P(B) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{x}{4} dx = \frac{1}{8} x^2 \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{8} \left(\frac{9}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

$$P(AB) = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x}{4} dx = \frac{1}{8} x^2 \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{8} \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8} \left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{32}$$

$$P\left(x < 1 \mid \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}\right) = \frac{3/32}{1/4} = \frac{3}{8}$$

Ex "2": Given a p. d. f $f(x) = \begin{cases} ke^{-x} & \text{for } x > 0 \\ 0 & \text{for o.w} \end{cases}$

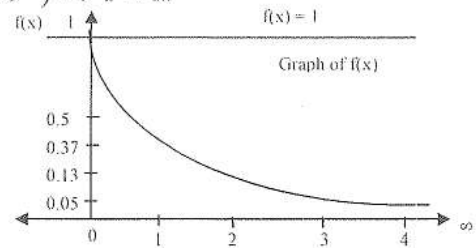
a. find the value of k and sketch $f(x)$

b. find $p(x < 2)$.

Sol.: a. by cond. "2" of p.d.f $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

$$1 = k \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x} dx \Rightarrow 1 = -ke^{-x} \Big|_0^{\infty} \Rightarrow 1 = -k(e^{-\infty} - e^0) \Rightarrow 1 = k$$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{for } x > 0 \\ 0 & \text{for o.w} \end{cases}$$



x	$f(x) = e^{-x}$
0	$e^0 = 1$
1	$e^{-1} = \frac{1}{e} = \frac{1}{2.7} = 0.37$
2	$e^{-2} = 0.13$
3	$e^{-3} = 0.05$
∞	$e^{-\infty} = 0$

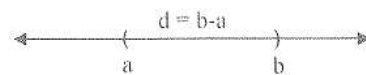
$$b. p(x < 2) = \int_{-\infty}^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^0 0dx + \int_0^2 e^{-x}dx = -e^{-x} \Big|_0^2 = -[e^{-2} - e^0] = 1 - e^{-2} = 1 - 0.13 = 0.87$$

Uniform distribution on interval (a, b):

Given an interval (a, b), $b > a$

Choose a point x from (a, b) then $a < x < b$

A function $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{for } a < x < b \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$



Is called uniform dist. on (a, b)

To show that $f(x)$ a p.d.f

Cond. "1": T.p $f(x) \geq 0$

$$\because b - a > 0 \text{ since } a < b$$

$$\therefore \frac{1}{b-a} > 0 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{b-a} > 0 \text{ for } a < x < b$$

$$f(x) \geq 0 \quad \quad \quad = 0 \quad \quad \quad \text{o.w}$$

Cond "2": T.p $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= \int_{-\infty}^a 0 dx + \int_a^b \frac{1}{b-a} dx + \int_b^{\infty} 0 dx \\ &= \int_a^b \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} x \Big|_a^b \\ &= \frac{1}{b-a} (b-a) = 1 \end{aligned}$$

$\therefore f(x)$ is a p.d.f

Ex "1": If x has a uniform dist. on $(-2, 3)$ [$x \sim \text{unif. } (-2, 3)$]

a. find a p.d.f of x and sketch $f(x)$.

b. Find $f(x > 0 | -\frac{1}{2} < x < 2)$

$$\text{Sol.: a. } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3 - (-2)} = \frac{1}{5} & \text{for } -2 < x < 3 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

$$\text{b. } p(x > 0 | -\frac{1}{2} < x < 2) = \frac{p(AB)}{P(B)}$$

$$A = \{x; 0 < x < 3\}$$

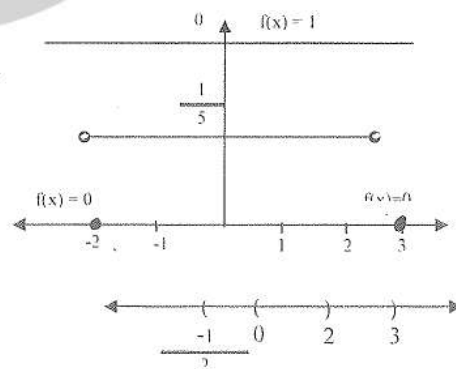
$$B = \left\{x; -\frac{1}{2} < x < 2\right\}$$

$$AB = \{x; 0 < x < 2\}$$

$$P(B) = \int_{-\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{5} dx = \frac{1}{5} x \Big|_{-\frac{1}{2}}^2 = \frac{1}{5} (2 + \frac{1}{2}) = \frac{1}{5} (\frac{5}{2}) = \frac{1}{2}$$

$$P(AB) = \int_0^2 \frac{1}{5} dx = \frac{1}{5} x \Big|_0^2 = \frac{1}{5} (2 - 0) = \frac{2}{5}$$

$$\therefore p(x < 0 | -\frac{1}{2} < x < 2) = \frac{2/5}{1/2} = \frac{4}{5}$$



H.W.: 2

1. $x \sim \text{unif.} (-1, 3)$ find p.d.f of x and find $p(0 \leq x < 2)$, $p(x < 1 | -1 < x < 2)$.

2. Given $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ for $-\infty < x < \infty$. Show that $f(x)$ is a p.d.f.

Note: $f(x)$ above is called cauchy dist.

Cumulative Distribution Function (c. d. f)

(Distribution Function (d. f)) or (Cumulative Distribution Fun.)
c. d. F

Def.: Let x be a r. v. either d. r.v. or c.r.v

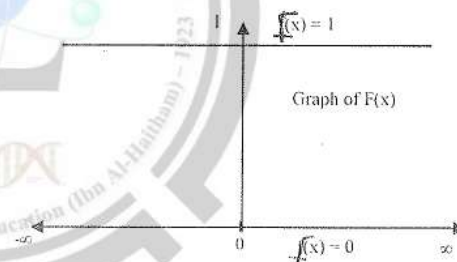
A function $F(x)$ is a c.d.f of x iff

$$F(x) = p(X \leq x); -\infty < x < \infty$$

Event $(X \leq x) = \text{all point in } (-\infty, x], 0 \leq p(X \leq x) \leq 1 \Rightarrow 0 \leq F(x) \leq 1$

That is mean $F(x)$ is bounded by zero and one.

i.e.: The graph of $F(x)$ lies between the line $F(x) = 0$ and the line $F(x) = 1$



Note: We shall use $F(x)$ to denote of a c.d.f of x and $f(x)$ to denote of p.m.f or p.d.f.

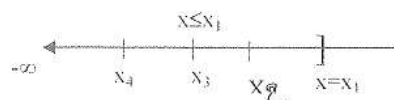
To find $F(x)$ when x is d.r.v.

Let x be a d.r.v. with p.m.f $f(x)$

$R_x = \{x_j \in I, j = 1, 2, 3, \dots\}$ countable

$F(x) = p(X \leq x)$ by def.

Choose x and let $x = x_1$ ($x_1 \in I$)



Event $(X \leq x) = \{x_j \leq x_i, i, j = 1, 2, \dots\}$

$(X \leq x) = \{(X=x_1) \cup (X=x_2) \cup (X=x_3) \cup \dots \cup (X=x_j) \cup \dots\}$

$$P(X \leq x) = P(X=x_1) + P(X=x_2) + P(X=x_3) + \dots + P(X=x_j) + \dots$$

$$= f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \dots$$

$$p(X \leq x) = \sum_{x_j \leq x} f(x_j)$$

$$F(x) = \sum_{x_j \leq x} f(x_j) \quad \text{c.d.f of } x \text{ when it's d.r.v.}$$

Ex. "1": Given a p.m.f $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{10} & \text{for } x = 1, 2, 3, 4 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$

a. Find the c.d.f $F(x)$ and sketch it's graph.

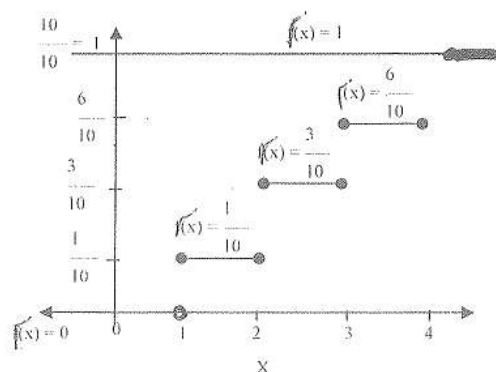
b. Find $p(x \leq 2)$, $p(x > 3)$, $p(x < 2)$, $p(1 < x \leq \frac{3}{2})$, $p(1 \leq x < \frac{3}{2})$

Sol.: a. $R_x = \{x, x = 1, 2, 3, 4\}$ count.

$$F(x) = \sum_{x_j \leq x} f(x_j)$$

Interval of x	$x_j \in I$	$f(x) = \frac{x}{10}$	$F(x) = \sum_{x_j \leq x} f(x_j)$
$x < 1$	0	0	$F(x) = 0$
$1 \leq x < 2$	1	$\frac{1}{10}$	$F(x) = 0 + \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$
$2 \leq x < 3$	2	$\frac{2}{10}$	$F(x) = 0 + \frac{1}{10} + \frac{2}{10} = \frac{3}{10}$
$3 \leq x < 4$	3	$\frac{3}{10}$	$F(x) = 0 + \frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \frac{3}{10} = \frac{6}{10}$
$x \geq 4$	4	$\frac{4}{10}$	$F(x) = 1$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 1 \\ \frac{1}{10} & \text{for } 1 \leq x < 2 \\ \frac{3}{10} & \text{for } 2 \leq x < 3 \\ \frac{6}{10} & \text{for } 3 \leq x < 4 \\ 1 & \text{for } x \geq 4 \end{cases}$$



NOTE: 1- $F(X)$ discont. at $x=1,2,3,4$.

2- $F(X)$ is cont. to the right for each interval of continuity.

$$b. p(x \leq 2) = F(2) = \frac{3}{10}$$

$$(F(a) = p(x \leq a))$$

$$\text{or } p(x \leq 2) = \sum_{X=1}^2 f(x) = f(1) + f(2) = \frac{1}{10} + \frac{2}{10} = \frac{3}{10}$$

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - F(3) = 1 - \frac{6}{10} = \frac{4}{10}$$

$$\text{Or } p(x > 3) = p(x = 4) = f(4) = \frac{4}{10}$$

$$P(x < 2) \neq F(2) \quad [p(x \leq x) = f(x)]$$

$$P(x < 2) = p(x = 1) = f(1) = \frac{1}{10}$$

$$P(1 < x \leq \frac{3}{2}) = p(\phi) = 0$$

$$\text{Since } \nexists \text{ integer } \in (1, \frac{3}{2}]$$

$$P(1 \leq x < \frac{3}{2}) = p(x = 1) = f(1) = \frac{1}{10}$$

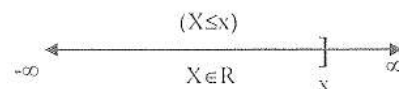
H.W. 2 Given an integers ,5,6,7,.....,15 Choose one even integer. Let x be the chosen integer. Find $F(x)$ and sketch it's $\rightarrow$ graph.

To find $F(x)$ when x is c.r.v.

Let x be a c.r.v. with p.d.f $f(x)$

$F(x) = p(X \leq x)$ by def.

To find $p(X \leq x)$



$$\because x \text{ has a p.d.f } f(x) \Rightarrow p(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

$$\therefore F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \quad [\text{c.d.f of } x \text{ when } x \text{ is c.r.v}]$$

$f(x)$ is cont. $\forall x \in (-\infty, x)$

Ex. "1": Given a p.d.f $f(x) = \begin{cases} 3(1-x)^2 & \text{for } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$

a. Find $F(x)$ and sketch it's graph.

b. Find $p(x \leq \frac{1}{3})$, $p(x < \frac{1}{3})$, $p(x > 1)$, $p(x \leq -\frac{1}{2})$, $p(-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{4})$

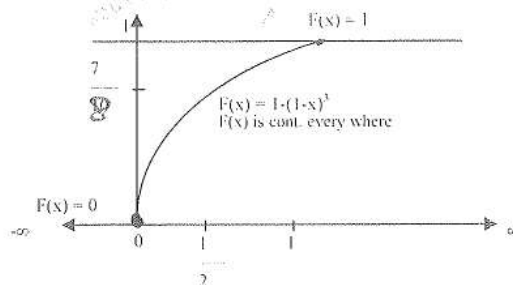
Sol.: a. $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$

$$= \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x 3(1-t)^2 dt = 3 \int_0^x (1-t)^2 dt$$

$$= -3 \frac{(1-t)^3}{3} \Big|_0^x = -[(1-x)^3 - 1] = 1 - (1-x)^3$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ 1 - (1-x)^3 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

x	$F(x) = 1 - (1-x)^3$
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{8}$
1	1



$$b. p(x \leq \frac{1}{3}) = F(\frac{1}{3}) = 1 - (1 - \frac{1}{3})^3 = 1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27}$$

$$p(x < \frac{1}{3}) \neq F(\frac{1}{3})$$

$$p(x < \frac{1}{3}) = 3 \int_0^{\frac{1}{3}} (1-x)^2 dx = -3 \frac{(1-x)^3}{3} \Big|_0^{\frac{1}{3}} = -(1-x)^3 \Big|_0^{\frac{1}{3}}$$

$$= -[(1 - \frac{1}{3})^3 - 1] = -[(\frac{2}{3})^3 - 1] = 1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27}$$

$$p(x > 1) = 1 - p(x \leq 1) = 1 - F(1) = 1 - 1 = 0$$

$$p(x \leq -\frac{1}{2}) = F(-\frac{1}{2}) = 0$$

$$p(-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{4}) = \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{4}} f(x) dx = \int_{-\frac{1}{3}}^0 0 dx + \int_0^{\frac{1}{4}} 3(1-x)^2 dx$$

$$= -(1-x)^3 \Big|_0^{\frac{1}{4}} = -[(1 - \frac{1}{4})^3 - 1] = 1 - (\frac{3}{4})^3$$

$$= 1 - \frac{27}{64} = \frac{37}{64}$$

Note: If F is conts. at $x=a$, then $p(x \leq a) = p(x < a) = F(a)$

H.W4

only when X is continuous

$$1. \text{ Given a p.d.f } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{for } x > 1 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

a. Find c.d.f of x

b. Find $p(x > 4.2)$ and $p(x < 3.5)$ and $p(x \leq -1)$

$$2. \text{ Given a p.d.f } f(x) = \begin{cases} Ce^{-x} & \text{for } x > 0 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

a. Find the value of c and sketch $F(x)$.

b. Find $F(x)$ and sketch it's graph.

c. $p(x \leq 3)$, $p(x < 3)$.

Chapter Three

Random Variables and Probability Distribution

Exercise / P.6

Q₁: A r.v. X has a discrete distribution with p.m.f.

$$f(x) = \begin{cases} cx & \text{for } x=1, 2, 3, 4, 5 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

Find the pr. dist. of X .

Sol. ∵ $f(x)$ is a p.m.f.

∵ Condition ② is satisfied $\sum_{x=1}^5 f(x) = 1$

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^5 f(x) &= f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) = 1 \\ &= c[1+2+3+4+5] = 1 \\ &= c \left[\frac{5(5+1)}{2} \right] = 1 \\ &= 15c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{15} \end{aligned}$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} \frac{x}{15} & \text{for } x=1, 2, 3, 4, 5 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{pr. dist. of } X &= \{ (x_i, f(x_i)) , \forall x_i \in X \} \\ &= \left\{ \left(1, \frac{1}{15}\right), \left(2, \frac{2}{15}\right), \left(3, \frac{3}{15}\right), \left(4, \frac{4}{15}\right), \left(5, \frac{5}{15}\right) \right\} \end{aligned}$$

Q₂: X has a uniform dist. on six integers: 2, 3, 4, 5, 6, 7. Find the p.m.f. of X .

Sol. $X = 2, 3, 4, 5, 6, 7 \Rightarrow 6\text{-integers}$

$X \sim \text{uniform}(6)$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} \frac{1}{K} & \text{for } x=1, 2, \dots, K \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{for } x=2, 3, 4, 5, 6, 7 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

Q3: Given a set of integers 2, 3, ..., 15 Choose one integer which divisible by 3.

Let X = the chosen int. find the p.m.f. of X .

Sol. $X = \{3, 6, 9, 12, 15\} = \text{d.r.v.}$

$R_X = \{3, 6, 9, 12, 15\}$ is Countable.

$X \sim \text{uniform}(5)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} & \text{for } x = 3, 6, 9, 12, 15 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

p.m.f.

Q4: Given a set of integers $\{1, 2, \dots, 10\}$, choose an integer and determine its divisors.

Let X = no. of divisors.

Find the p.m.f. of X .

Sol. X = no. of divisors.

integer	divisor	No. of divisor	$f(x) = \text{p.m.f.} = \frac{x}{10}$
1	1	1	$\frac{1}{10}$
2	1, 2	2	$\frac{2}{10}$
3	1, 3	2	$\frac{2}{10}$
4	1, 2, 4	3	$\frac{3}{10}$
5	1, 5	2	$\frac{2}{10}$
6	1, 2, 3, 6	4	$\frac{4}{10}$
7	1, 7	2	$\frac{2}{10}$
8	1, 2, 4, 8	4	$\frac{4}{10}$
9	1, 3, 9	3	$\frac{3}{10}$
10	1, 2, 5, 10	4	$\frac{4}{10}$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} & \text{for } x=1 \\ \frac{2}{10} & \text{for } x=2 \\ \frac{3}{10} & \text{for } x=3 \\ \frac{4}{10} & \text{for } x=4 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

p.m.f.

Exercise / P. 12

Q1: $X \sim \text{unif.}(-1, 3)$. Find p.d.f. of X and find $P(0 \leq X \leq 2)$, $P(X < 1 / -1 \leq X \leq 2)$

Sol. ^{given} $X \sim \text{unif.}(-1, 3)$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3-(-1)} & \text{for } -1 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{for } -1 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

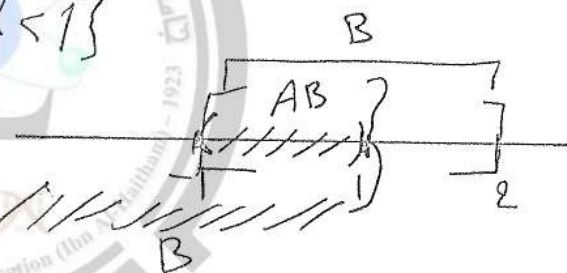
$$P(0 \leq X \leq 2) = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 \frac{1}{4} dx = \frac{1}{4} x \Big|_0^2 = \frac{1}{4} [2-0] = \frac{1}{2}$$

$$P\left(\frac{X < 1}{-1 \leq X \leq 2}\right) = P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

$$A = \{X : X < 1\} = \{X : -1 \leq X < 1\}$$

$$B = \{X : -1 \leq X \leq 2\}$$

$$AB = \{X : -1 \leq X < 1\}$$



$$P(B) = \int_{-1}^2 \frac{1}{4} dx = \frac{1}{4} x \Big|_{-1}^2 = \frac{1}{4} [2+1] = \frac{3}{4} \in [0, 1]$$

$$P(AB) = \int_{-1}^1 \frac{1}{4} dx = \frac{1}{4} x \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{4} (1+1) = \frac{1}{2} \in [0, 1]$$

$$P(X < 1 / -1 \leq X \leq 2) = \frac{1/2}{3/4} = \frac{2}{3} \in [0, 1]$$

Q2: Given $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ for $-\infty < x < \infty$. Show that $f(x)$ is a p.d.f.

Note: $f(x)$ is called Cauchy dist.

Sol. I.P. Cond. ① $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_x = (-\infty, \infty)$

$$x^2 \geq 0 \Rightarrow \pi(1+x^2) \geq 0 = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \geq 0$$

$$= f(x) \geq 0$$

$$x \in (-\infty, \infty)$$

$$\text{if } x < \infty \rightarrow f(x) \geq 0$$

$$\text{if } x > -\infty \rightarrow f(x) \geq 0$$

$$\therefore f(x) \geq 0 \quad \forall x \in (-\infty, \infty)$$

T.P. Cond. ② is satisfied

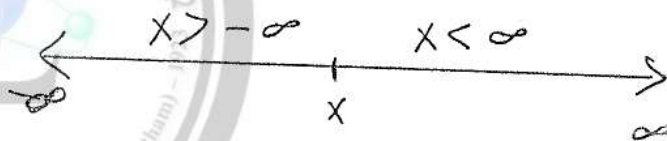
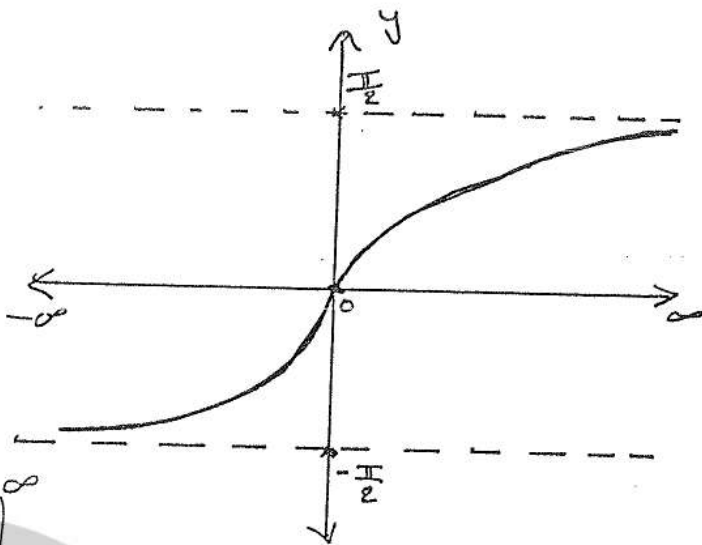
i.e. T.P. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{1}{\pi} \tan^{-1} x \Big|_{-\infty}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{\pi} [\tan^{-1}(\infty) - \tan^{-1}(-\infty)] = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \left[-\frac{\pi}{2} \right] \right] = \frac{1}{\pi} (\pi) = 1$$

$\therefore$ Cond. ② is satisfied.

$\therefore f(x)$ is a p.d.f.



H.w. P.14 Given an integer 5, 6, 7, ..., 15. Choose one even integer. Let X be the chosen integer. Find $F(x)$ and sketch its graph.

Sol.

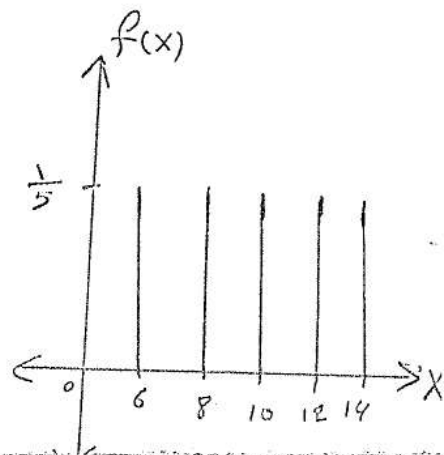
X = The even integer

$$\therefore X = 6, 8, 10, 12, 14$$

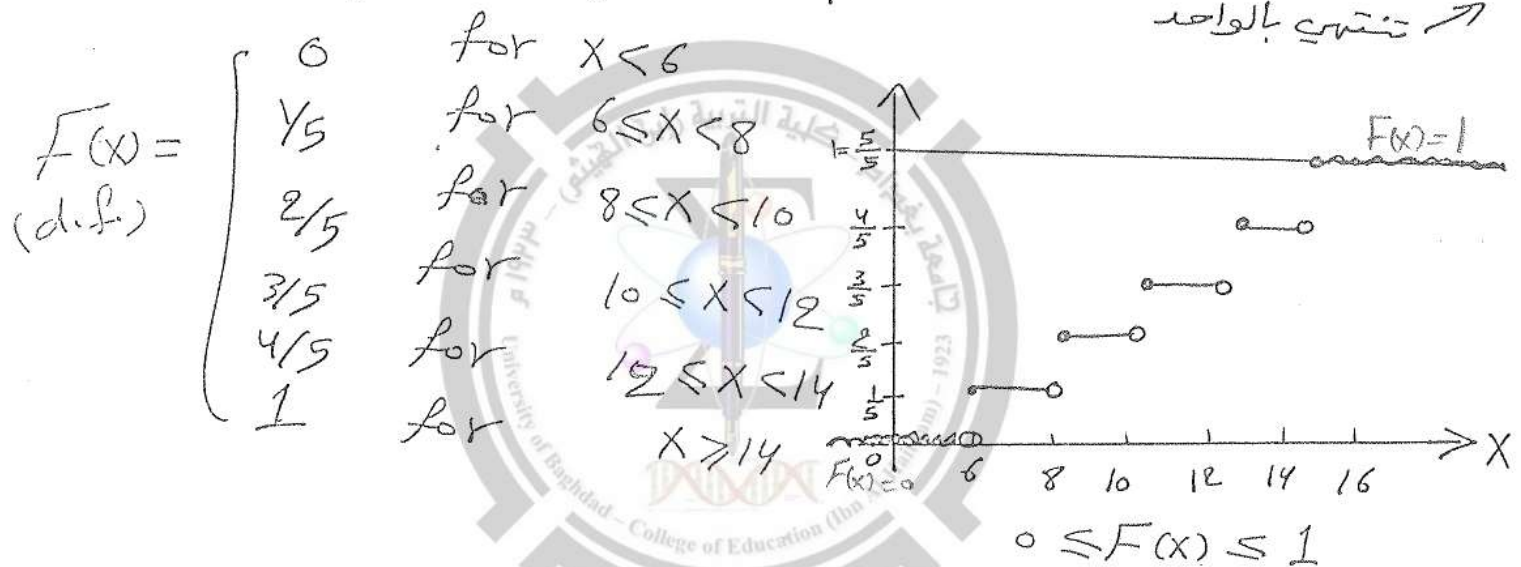
$$R_X = \{x : x = 6, 8, 10, 12, 14\} = \text{d.v.v.}$$

$$X \sim \text{unif.}(5)$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} & \text{for } x = 6, 8, 10, 12, 14 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$



interval of X	X integer	P.m.f $f(x) = \frac{1}{5}$	$F(x) = \text{c.d.f.}$
$X < 6$	no. int.	0	0 ← بدا الصفر
$6 \leq X < 8$	6	$\frac{1}{5}$	$0 + \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$
$8 \leq X < 10$	8	$\frac{1}{5}$	$0 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$
$10 \leq X < 12$	10	$\frac{1}{5}$	$0 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$
$12 \leq X < 14$	12	$\frac{1}{5}$	$0 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$
$X \geq 14$	14	$\frac{1}{5}$	$0 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{5}{5} = 1$ → انتهى بالواحد



Exercise / p.16

Q1: Given a p.d.f.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{for } x > 1 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

a. Find c.d.f. of X

b. Find $P(X > 4.2)$ and $P(X < 3.5)$ and $P(X \leq -1)$

Sol: $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_1^x \frac{1}{t^2} dt = \left. -\frac{1}{t} \right|_1^x = -\left[\frac{1}{x} - 1 \right] = 1 - \frac{1}{x}$

$$\therefore F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x} & \text{for } x \geq 1 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

Note : $F(x)$ is conts. at $x=1$
 Since $\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = 1 - \frac{1}{1} = 0 = F(1)$
 $\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = 0 = F(1)$

$$\begin{aligned} \text{Now, } P(X > 4.2) &= 1 - P(X \leq 4.2) \\ &= 1 - F(4.2) \\ &= 1 - \left(1 - \frac{1}{4.2}\right) = 0.238 \end{aligned}$$

$$P(X < 3.5) = \int_1^{3.5} \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{3.5} = -\left[\frac{1}{3.5} - 1\right] = 0.714$$

$$P(X \leq -1) = F(-1) = 0$$

Q2: Given a p.d.f.

$$f(x) = \begin{cases} ce^{-x} & \text{for } x > 0 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

- Find the value of c and sketch $F(x)$.
- Find $F(x)$ and sketch its graph.
- $P(X \leq 3)$, $P(X < 3)$.

Sol. $\therefore f(x)$ is p.d.f.

a. $\therefore$ cond. ② is satisfied : $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^{\infty} ce^{-x} dx = -c[e^{-x}]_0^{\infty} = -c(0 - 1) = c = 1$$

$$\therefore \boxed{c=1}$$

$$F(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = 0$$

$\therefore F(1^-) \neq F(1) \Rightarrow F(x)$ is not conts. at $x=1$

• H.W / P. 20 Given a c.d.f.

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{4}{x^2} & \text{for } x > 2 \\ 0 & \text{for } x \leq 2 \end{cases}$$

1. Find $f(x)$ and sketch $F(x)$ & $f(x)$ (H.W.)
2. Find $P(X \leq 4)$, $P(X > 8)$, $P(2 < X \leq 8)$, $P(X=2)$.

Solⁿ $F(x)$ is conts at $x=2$

since $F(2^+) = F(2^-)$

$$F(2^+) = \lim_{x \rightarrow 2^+} F(x) = 1 - \frac{4}{4} = 0$$

$$F(2^-) = \lim_{x \rightarrow 2^-} F(x) = 0$$

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} \frac{8}{x^3} & \text{for } x > 2 \\ 0 & \text{for } x \leq 2 \end{cases}$$

$$P(X \leq 4) = F(4) = 1 - \frac{4}{16} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \quad (\text{By def. of } F(x))$$

$$\begin{aligned} P(X > 8) &= 1 - P(X \leq 8) \\ &= 1 - F(8) \\ &= 1 - \left(1 - \frac{1}{16}\right) = 1 - \frac{15}{16} = \frac{1}{16} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(2 < X \leq 8) &= F(8) - F(2) \\ &= \left(1 - \frac{4}{64}\right) - 0 \\ &= 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16} \end{aligned}$$

By Th. $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$

$$P(X=2) = F(2^+) - F(2^-)$$

By Th. $P(X=x) = F(x^+) - F(x^-)$

$$= 0$$

Since $F(x)$ is continuous at $x=2$

$$a. f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{for } x > 0 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

$$b. F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \\ = \int_0^x e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^x = -[e^{-x} - \underline{e^0}] = 1 - e^{-x}$$

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{for } x \geq 0 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases} \leftarrow F(x) \text{ is conts. at } x=0 \text{ since}$$

$$\begin{cases} F(0^+) = F(0^-) \\ F(0^+) = 1 - e^0 = 1 - 1 = 0 \\ F(0^-) = 0 \end{cases}$$

$$c. P(X \leq 3) = F(3) = 1 - e^{-3}$$

$$P(X \leq 3) = \int_0^3 e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^3 = -[e^{-3} - e^0] \\ = 0.9502$$

$$\text{or } P(X < 3) = P(X \leq 3) = F(3)$$

since (c.v.v.) of F is conts. at $x=3$

Ex. 17 Given a c.d.f. $F(x)$:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{for } x \geq 1 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

Find the p.d.f. $f(x)$.

Sol. $F(x)$ is conts. function. $\Rightarrow F(x)$ is diff.

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = F'(x)$$

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{for } x > 1 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

But is $F(x)$ conts. at $x=1$?

$$F(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = 1 - e^{-1} \neq 0$$

Q₁: Toss a coin 3-times. If X be the number of head (H). Find the p.f. of X .

Sol. $X \equiv$ number of H.

$X = 0, 1, 2, 3$
 $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 TTT HHT HHT HHH

$R_X = \{X: X=0, 1, 2, 3\} = \text{Countable}$
 $\therefore X$ is d.r.v.

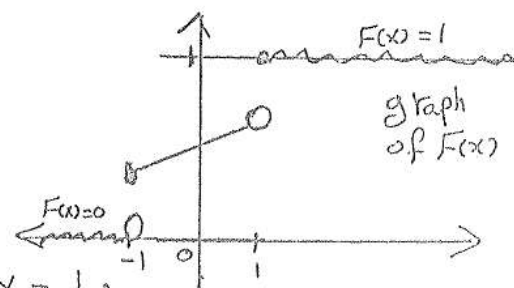
$\binom{3}{x} \equiv$ number of sample in event $(X=x)$ when toss a coin 3-times.

$$P(X=x) = f(x) = \begin{cases} \frac{\binom{3}{x}}{8} & \text{for } x=0, 1, 2, 3 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

p.f. $\nearrow$

Q₂: Given a d.f.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < -1 \\ \frac{x+2}{4} & \text{for } -1 \leq x < 1 \\ 1 & \text{for } x \geq 1 \end{cases}$$



① Sketch $F(x)$ and find $P(X=-1)$ and $P(X=\frac{1}{2})$.

② If $F(x)$ conts. at $x=\frac{1}{2}$? why?

Sol. $P(X=-1) = F(-1^+) - F(-1^-)$

$$= \frac{-1+2}{4} - 0 = \frac{1}{4}$$

By Th. $P(X=x) = F(x^+) - F(x^-)$

$$P(X=\frac{1}{2}) = \frac{\frac{1}{2}+2}{4} - \frac{\frac{1}{2}+2}{4} = 0$$

$F(x)$ is conts. at $x=\frac{1}{2}$ since $P(X=\frac{1}{2}) = 0$

Q3: Given a p.d.f. $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{for } |x| < 1 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

Find the d.f. $F(x)$ and find $P(X > 0)$ & $P(|X| > \frac{1}{2})$.

Sol.

$$|x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$$

$$|x| = -x \Rightarrow -1 < x < 0$$

$$|x| = x \Rightarrow 0 \leq x < 1$$

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{for } -1 < x < 0 \\ 1-x & \text{for } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

$$F(x) = \begin{cases} \int_{-1}^x (1+t) dt & \text{for } -1 \leq x < 0 \\ \int_0^x (1-t) dt & \text{for } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{for } x < -1 \\ 1 & \text{for } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Find } P(X > 0) &= 1 - P(X \leq 0) \\ &= 1 - F(0) = 1 - \int_0^0 (1-t) dt = \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(|X| > \frac{1}{2}) &= 1 - P(|X| \leq \frac{1}{2}) \\ &= 1 - P(-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{2}) \\ &= 1 - \left[\int_{-\frac{1}{2}}^0 f(x) dx + \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx \right] \\ &= 1 - \left[\int_{-\frac{1}{2}}^0 (1+x) dx + \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x) dx \right] \\ &= \dots \end{aligned}$$

Q 4: Two dice are thrown once, let X be the absolute difference between the two numbers shown by the dice. Find the p.m.f. and c.d.f. of X .

Sol. $S = \{ (d_1, d_2) : 1 \leq d_i \leq 6 ; i=1,2 \} = 6^2 = 36$ ✓

$$X = \left\{ \begin{array}{lll} |1-1|=0 & , & |2-1|=1 & , \dots , & |6-1|=5 \\ |1-2|=1 & & |2-2|=0 & & |6-2|=4 \\ |1-3|=2 & & |2-3|=1 & & |6-3|=3 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ |1-6|=5 & & |2-6|=4 & & |6-6|=0 \end{array} \right\}$$

∴ $X = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

Event $(X=0) = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\} = (6) \text{ elements}$

$f(x) = P(X=x)$

$f(0) = P(X=0) = \frac{6}{36}$

Event $(X=1) = \{(2,1), (1,2), (2,3), (3,2), (4,3), (3,4), (4,5), (5,4), (5,6), (6,5)\} = (10) \text{ elements}$

$f(1) = P(X=1) = \frac{10}{36}$

Event $(X=2) = \{(1,3), (3,1), (2,4), (4,2), (3,5), (5,3), (4,6), (6,4)\} = (8) \text{ elements}$

$f(2) = P(X=2) = \frac{8}{36}$

Event $(X=3) = \{(1,4), (4,1), (2,5), (5,2), (3,6), (6,3)\} = (6) \text{ elements}$

$f(3) = P(X=3) = \frac{6}{36}$

Event $(X=4) = \{(1,5), (5,1), (2,6), (6,2)\} = (4) \text{ elements}$

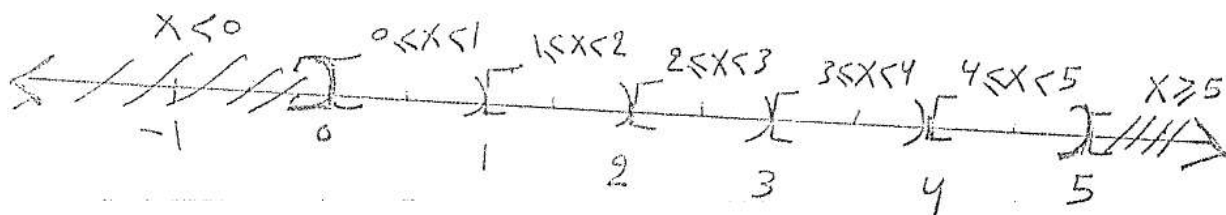
$f(4) = P(X=4) = \frac{4}{36}$

Event $(X=5) = \{(1,6), (6,1)\} = (2) \text{ elements}$

$f(5) = P(X=5) = \frac{2}{36}$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} \frac{6}{36} & \text{for } x=0 \\ \frac{10}{36} & \text{for } x=1 \\ \frac{8}{36} & \text{for } x=2 \\ \frac{6}{36} & \text{for } x=3 \\ \frac{4}{36} & \text{for } x=4 \\ \frac{2}{36} & \text{for } x=5 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ \frac{6}{36} & \text{for } 0 \leq x < 1 \\ \frac{16}{36} & \text{for } 1 \leq x < 2 \\ \frac{24}{36} & \text{for } 2 \leq x < 3 \\ \frac{30}{36} & \text{for } 3 \leq x < 4 \\ \frac{34}{36} & \text{for } 4 \leq x < 5 \\ 1 & \text{for } x \geq 5 \end{cases}$$



Q5: Given a p.f.

$$f(x) = \begin{cases} K \left(\frac{2}{3}\right)^x & \text{for } x=1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

Find the value of K .

Sol: Since $f(x)$ is p.m.f. then cond. ② $\sum_{x \in R_x} f(x) = 1$ is satisfied.

By cond. ② we get: $\sum_{x=1}^{\infty} K \left(\frac{2}{3}\right)^x = 1$

$$1 = K \sum_{x=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x$$

$$1 = K \left[\left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^n + \dots \right]$$

$$1 = \left(\frac{2}{3}\right) K \left[1 + \left(\frac{2}{3}\right) + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \dots \right]$$

Geometric Series

∵ $r = \left(\frac{2}{3}\right) < 1 \Rightarrow$ the series is convergent.

$$1 = \left(\frac{2}{3}\right) K \left[\frac{1}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)} \right] = \left(\frac{2}{3}\right) K \left[\frac{1}{\frac{1}{3}} \right] = \left(\frac{2}{3}\right) K (3) = 2K$$

بوجود متوالية هندسية
حاصلها $\left(\frac{2}{3}\right)$

$$\therefore 2K = 1 \Rightarrow \boxed{K = \frac{1}{2}}$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x & \text{for } x=1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

Q6: Given a p.f.:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-1}}{x!} & \text{for } x=0, 1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

Show that $f(x)$ is a p.m.f.

بشكل

Sol. T.P. Cond. ①: $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_x$

$$\frac{1}{e} > 0, \frac{1}{x!} > 0 \quad \forall x = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{Since if } x=0 \Rightarrow \frac{1}{e} > 0, \frac{1}{0!} = 1 > 0$$

$$\& \quad x=1 \Rightarrow \frac{1}{e} > 0, \frac{1}{1!} = 1 > 0$$

$\vdots$

$$\Rightarrow \frac{1}{e x!} > 0 \Rightarrow \text{Cond. ① is satisfied.}$$

$$\text{T.P. Cond. ②: } \sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{e x!} = 1$$

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{e x!} = \frac{1}{e} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{x!} = \frac{1}{e} \cdot e = 1$$

$\therefore$ Cond. ② is satisfied. $\Rightarrow \therefore f(x)$ is p.m.f.

Q7: Given a p.d.f.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} x & \text{for } 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

(a) Find the value (t) s.t. $P(X \leq t) = \frac{1}{4}$

(b) Find the value (t) s.t. $P(X \leq t) = \frac{1}{2}$

Sol.

$$(a) \quad P(X \leq t) = \frac{1}{4} \quad \dots \text{①}$$

$$\frac{1}{8} \int_0^t x dx = \frac{1}{16} x^2 \Big|_0^t = \frac{1}{16} t^2 \Rightarrow P(X \leq t) = \frac{1}{16} t^2 = \frac{1}{4} \quad (\text{by ①})$$

$$\frac{1}{4} t^2 = 1 \Rightarrow t^2 = 4 \Rightarrow t = \sqrt{4} = \pm 2 \Rightarrow \boxed{t=2} \text{ only}$$

since $\{0 \leq x \leq 4\} = \mathbb{R}_x$ is positive.

$$(b) \quad P(X \leq t) = \frac{1}{2}$$

$$P(X \leq t) = \frac{1}{8} \int_0^t x dx = \frac{1}{16} x^2 \Big|_0^t = \frac{1}{16} t^2 \Rightarrow \frac{1}{16} t^2 = \frac{1}{2} \rightarrow t =$$

$$\frac{1}{8}t^2 = 1 \Rightarrow t^2 = 8 \Rightarrow t = \pm 2\sqrt{2} \Rightarrow t = +2\sqrt{2} \text{ (only)}$$

Since $R_X = \{x: 0 \leq x \leq 4\}$ is positive.

Now; Find $P(X \leq 2\sqrt{2})$?

$$P(X \leq 2\sqrt{2}) = \frac{1}{8} \int_0^{2\sqrt{2}} x \, dx = \frac{1}{16} x^2 \Big|_0^{2\sqrt{2}} = \frac{1}{16} (2\sqrt{2})^2 = \frac{1}{16} (8) = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

(c) Find the c.d.f. of X .

$$F(x) = \int_0^x f(t) \, dt = \int_0^x \frac{1}{8} t \, dt = \frac{x^2}{16}$$

$$\therefore F(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ \frac{x^2}{16} & \text{for } 0 \leq x < 4 \\ 1 & \text{for } x \geq 4 \end{cases}$$

(القيمة غير
مستمرة عند $x=4$)

Note $F(x)$ is conts. at $x=0$ since $F(0^+) = \frac{0^2}{16} = 0 = F(0^-)$.
 $F(x)$ is conts. at $x=4$

Q8: Suppose that the c.d.f. of a.r.v. X is as follows:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x \leq 0 \\ \frac{x^2}{9} & \text{for } 0 < x \leq 3 \\ 1 & \text{for } x > 3 \end{cases}$$

Find and sketch (H.W.) the p.d.f. of X .

Sol. $f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = F'(x)$ and $F(x)$ is conts. and diff.

$$f(x) = F'(x) = \frac{2}{9} x$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{9} & \text{for } 0 < x \leq 3 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

Note $F(3^+) = 1$
 $F(3^-) = \frac{3^2}{9} = 1$

$$\therefore F(3^+) = F(3^-)$$

$\therefore F(x)$ is conts. at $x=3$

Q9: Answer by (true) or (False) and given the reason

① If X is c.r.v., then $P(a \leq X \leq b) \neq P(a < X < b)$.

(False) since $P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b)$ if X is c.r.v., because $P(X=a)=0$ & $P(X=b)=0$ when X is c.r.v.

② If X is d.r.v. with c.d.f. $F(x)$, then $f(x) = \frac{d}{dx} F(x)$.
(False), only when X is c.r.v., $f(x) = \frac{d}{dx} F(x)$.

③ If X is a.r.v. with c.d.f. $F(x)$, then $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$.

(False), since by Th. $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$

④ If a c.d.f. $F(x)$ conts. at $x=a$, then $P(X=a)=0$.
(True), since if $F(x)$ conts. at $x=a$, then $F(a^+) = F(a^-)$ and $P(X=a) = F(a^+) - F(a^-)$ (by Theorem).

⑤ $F(\infty) = 0$ & $F(-\infty) = 1$
(False), $F(\infty) = 1$ and $F(-\infty) = 0$ (By Theorem).

⑥ state (Cauchy dist.) :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi(1+x^2)} & \text{for } -\infty < x < \infty \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases} \quad \text{and p.m.f.}$$

(False), Cauchy dist. is p.d.f. since $\mathbb{R}_X = \{x; -\infty < x < \infty\}$ and $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ for $-\infty < x < \infty$ (only).

Hiw. : Given a.c.d.f. $F(x) = \begin{cases} x-3 & \text{for } x \leq 3 \\ 0 & \text{for } x > 3 \end{cases}$

① Find and sketch the p.d.f. $f(x)$.

② Is $F(x)$ conts. at $x=3$? Why?

Q10: Show that there does not exist any number (c) s.t. the following function $f(x)$ would be a p.d.f.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{1+x} & \text{for } x > 0 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

Sol. If cond. ② is satisfied then $f(x)$ is p.d.f.

I.e. T.P. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \stackrel{?}{=} 1$ (if we can that) لا يوجد عدد (c) يجعل هذه $f(x)$ دالة احتمالية

$$\int_0^{\infty} \frac{c}{1+x} dx = c \ln(1+x) \Big|_0^{\infty} = c [\ln(\infty) - \ln(1)] = c [\infty - 0] = \infty$$

$\therefore$ c is not exist.

Then does not exist any no. (c) s.t. $f(x)$ be a p.f.

H.w. Given a p.d.f. $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} ce^{-2x} & \text{for } x > 0 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

① Find the value c and sketch it's graph.

② Find the c.d.f. of X ($F(x)$) and sketch it's graph.

Q11: Show that the following function be a p.f.

Sol. T.P. cond. ①

$$f(x) = \begin{cases} 2 \sin x \cos x & \text{for } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

Note: $2 \sin x \cos x = \sin 2x$

Sol. T.P. cond. ① $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$

$$2 \sin x \cos x \geq 0 \quad \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$$

T.P. cond. ②

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin x \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2} [\cos \pi - \cos 0] = -\frac{1}{2} [-1 - 1] = 1$$

$\therefore$ By cond. ① and ② we get: $f(x)$ is p.d.f.

Q12: Show that if the following function be p.r.f.:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) & \text{for } 0 < x < \pi \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

Sol. T.P. Cond. ①

i.e. $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in (0, \pi)$

$$\sin^2 \frac{x}{2} \geq 0 \Rightarrow \frac{2}{\pi} \sin^2 \frac{x}{2} \geq 0 \quad \forall x \in (0, \pi)$$

T.P. Cond. ②

Note: $\sin^2 x = 1 - \cos x$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 2 \sin^2 \frac{x}{2} dx &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (1 - \cos x) dx \\ &= \frac{1}{\pi} (x - \sin x) \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi} [(\pi - 0) - (0 - 0)] \\ &= \frac{\pi}{\pi} = 1 \end{aligned}$$

$\therefore f(x)$ is a p.r.f.

Q13: A box has (4) red and (3) black balls. Choose a sample of (3) balls one by one without replacement. Let X be a number of black in a sample. Find the p.m.f. of X and sketch its graph. Also find the pr. that a sample has at least (2) red balls.

Sol.

4	r
3	b

$\xrightarrow[\text{without rep.}]{(1-1)}$

$K=3$

$X \equiv$ no. of black balls in a sample.

$\therefore X = 0, 1, 2, 3 = \text{d.r.v.}$

$f(x) = P(X=x) = \text{p.m.f.}$

Event $(X=x)$: a sample have (x) black and $(3-x)$ red balls.

$\therefore \rightarrow$

Event $(X=x)$ has $P_x^3 P_{3-x}^4$ and $n(s) = P_3^7$
 no. of black balls no. of red balls

$$f(x) = P(X=x) = \begin{cases} \frac{P_x^3 P_{3-x}^4}{P_3^7} & \text{for } x=0, 1, 2, 3 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

H.w. Find $F(x)$ of this problem.

Q14: Consider the following c.d.f

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < -1 \\ \frac{1}{2}(x^3+1) & \text{for } -1 \leq x < 1 \\ 1 & \text{for } x \geq 1 \end{cases}$$

- Find ① $P(-1 < X < 1)$, $P(-1 \leq X \leq 1)$
 ② p.d.f. $f(x)$
 ③ $P(-2 < X < 2)$

Sol.

$$\begin{aligned} \textcircled{1} P(-1 < X < 1) &= P(-1 \leq X \leq 1) = F(1) - F(-1) \quad (\text{by Th.}) \\ &= 1 - \frac{1}{2}((-1)^3 + 1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

$\uparrow$
 x is c.v.
 $\& F(x)$ is conts. $dx=1$

$$\textcircled{2} f(x) = F'(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2 & \text{for } -1 \leq x < 1 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

$\uparrow$
 p.d.f. of x

Note: $F(x)$ is conts. at $x=-1$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} P(-2 < X < 2) &= P(-2 \leq X \leq 2) = F(2) - F(-2) \quad (\text{by Th.}) \\ &= 1 - 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Note $F(-2) = F(-2^+) - F(-2^-)$
 $= 0 - 0 = 0 \Rightarrow F$ is conts. at $x=-2$

Q15: Given a p.d.f.

$$f(x) = \begin{cases} b \sin x \cos x & \text{for } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

Find the value of b .

Sol. $\because f(x)$ is a p.d.f. $\Rightarrow$ cond. (2) is satisfied.

$$\because b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x dx = 1$$

$$1 = b \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sin 2x dx \right] \quad (\text{since } \sin 2x = 2 \sin x \cos x)$$

$$1 = -\frac{b}{2} \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$1 = -\frac{b}{2} [\cos \pi - \cos 0]$$

$$1 = -\frac{b}{2} [-1 - (1)] \Rightarrow b = 1$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} \sin x \cos x & \text{for } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

Q16: Given a d.f.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < -2 \\ \frac{x+3}{5} & \text{for } -2 \leq x < 2 \\ 1 & \text{for } x \geq 2 \end{cases}$$

(1) Find $P(X = -2)$, $P(-3 < X < -2)$

(2) Find $f(x)$

(3) Is $F(x)$ conts. at $x = 2$? why?

Sol.

$$(1) P(X = -2) = F(-2^+) - F(-2^-) \\ = \left(\frac{-2+3}{5} \right) - 0 = \frac{1}{5}$$

$$\text{by Th. } P(X=x) = F(x^+) - F(x^-)$$

$$P(-3 < X < -2) \neq P(-2 < X < -2)$$

since $F(x)$ is discontinuous at $x = -2$

$\therefore \rightarrow$

$$(2) f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = F'(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} & \text{for } -2 < x < 2 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

$$P(-3 < x < -2) = \int_{-3}^{-2} f(x) dx = 0$$

$$(3) F(x) \text{ is conts. at } x=2 \text{ since } F(2^-) = F(2^+), \\ F(2^+) = 1, F(2^-) = \frac{2+3}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

Q17% Given the following p.m.f.

$$f(x) = \begin{cases} K \left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} & \text{for } x=2,3,4,\dots \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

Find the value of K .

sol. $\because f(x)$ is p.m.f. then cond. (2) is satisfied.

$$\therefore K \sum_{x=2}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} = 1$$

Note $K \sum_{x=2}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} = K \sum_{x=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x$

$$\therefore 1 = K \sum_{x=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x = K \left[\left(\frac{2}{3}\right)^0 + \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^n + \dots \right]$$

$$1 = K \left[1 + \left(\frac{2}{3}\right) + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^n + \dots \right]$$

Geometric series

$\therefore |r| = \left|\frac{2}{3}\right| < 1 \Leftrightarrow$ the series is convergent

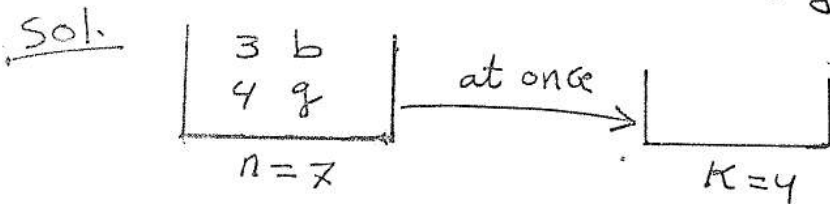
$$1 = K \left[\frac{1}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)} \right] = K \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)} = 3K$$

$$\Rightarrow 3K = 1 \Rightarrow \boxed{K = \frac{1}{3}}$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^x & \text{for } x = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

Q18: Given a set of 3 boys and 4 girls. Choose a sample of four students. If y be a random variable represents the number of boys in a sample:

- 1- Find the pr. distribution of y .
- 2- Find the c.d.f. of y , and sketch its graph.
- 3- Find the pr. of the following by two methods:
 - (i) If a sample has at least (2) girls.
 - (ii) If a sample has at most (1) girl.



$y \equiv$ no. of boys in a sample.

$$y = \{0, 1, 2, 3\} = \text{d.r.v.}$$

$$n(s) = {}^7C_4$$

$$(i) f(y) = \begin{cases} \frac{{}^3C_y {}^4C_{4-y}}{{}^7C_4} & \text{for } y = 0, 1, 2, 3 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

$$= P(Y=y)$$

$$y=0 \rightarrow f(0) = P(y=0) = \frac{{}^3C_0 {}^4C_4}{{}^7C_4} = \frac{1}{35}$$

$$y=1 \rightarrow f(1) = P(y=1) = \frac{{}^3C_1 {}^4C_3}{{}^7C_4} = \frac{12}{35}$$

$$y=2 \rightarrow f(2) = P(y=2) = \frac{{}^3C_2 {}^4C_2}{{}^7C_4} = \frac{18}{35}$$

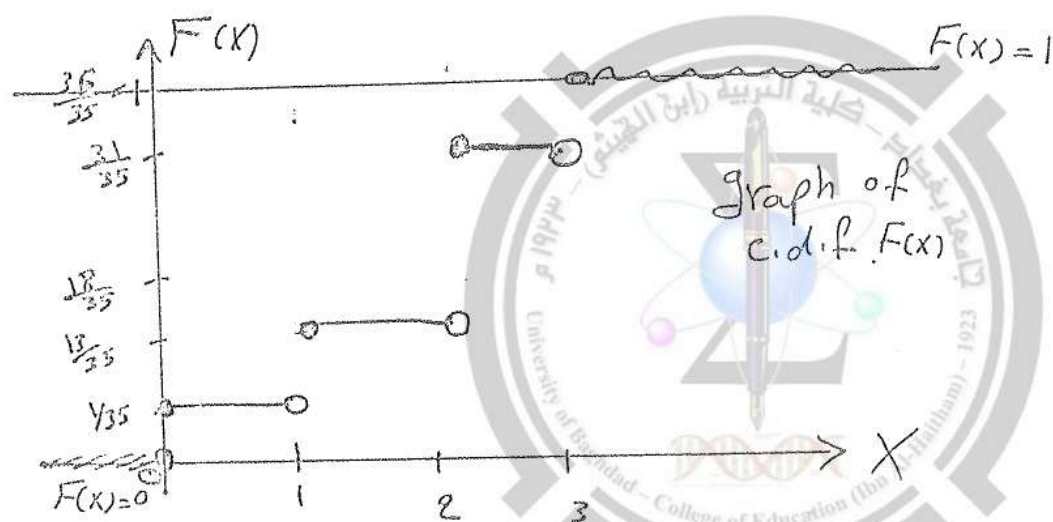
$$y=3 \rightarrow f(3) = P(y=3) = \frac{{}^3C_3 {}^4C_1}{{}^7C_4} = \frac{4}{35}$$

$$\text{pr. dist. of } X = \{ (x_i, f(x_i)) ; \forall x_i \in R_X \}$$

$$\therefore \text{pr. dist. of } X = \left\{ \left(0, \frac{1}{35}\right), \left(1, \frac{12}{35}\right), \left(2, \frac{18}{35}\right), \left(3, \frac{4}{35}\right) \right\}$$

(ii) To find c.d.f. $F(y)$

interval	integer	$f(y)$	$F(y)$
$y < 0$	no integer	0	0
$0 \leq y < 1$	0	$1/35$	$1/35$
$1 \leq y < 2$	1	$12/35$	$13/35$
$2 \leq y < 3$	2	$18/35$	$31/35$
$y \geq 3$	3	$4/35$	1



$$(ii) P(y \leq 2) = \sum_{y=0}^2 f(y) = f(0) + f(1) + f(2) = \frac{1}{35} + \frac{12}{35} + \frac{18}{35} = \frac{31}{35}$$

$$\text{or } P(y \leq 2) = F(2) = \frac{31}{35}$$

$$\begin{array}{c|c} g & b \\ \hline 2 & 2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{c|c} g & b \\ \hline 2 & 2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{array}} \right\} \rightarrow y \leq 2$$

$K=4$

$$P(y=3) = f(3) = \frac{4}{35}$$

$$\text{or } P(y=3) = F(3^+) - F(3^-) = 1 - \frac{31}{35} = \frac{4}{35}$$

$$\begin{array}{c|c} g & b \\ \hline 0 & 4 \\ 1 & 3 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{c|c} g & b \\ \hline 0 & 4 \\ 1 & 3 \end{array}} \right\} \rightarrow y=3$$

$K=4$

Q19: A box has (3) bad and (4) good tubes. Choose (3) tubes at once from this box.

Let X be a r.v. represents the number of bad tubes in a sample.

1- Find the pr. function of X and sketch its graph.

2- Find the c.d.f. of X and sketch its graph.

3- (i) Find $P(X < 1 \mid 1 \leq X \leq 3)$.

(ii) Find the pr. that a sample has at least (1) good tube.

Sol.

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & b \\ \hline 4 & g \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\text{at once}} \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \quad , \quad n(s) = \binom{7}{3}$$

$n=7 \qquad k=3$

$X \equiv$ no. of bad tube in a sample.

$$\therefore R_X = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$X = 0, 1, 2, 3 \text{ = d.r.v.}$$

Event $(X=x)$: a sample has x -bad and $(k-x)$ good tubes.

(1) $f(x) = P(X=x) = \text{p.m.f.}$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} \frac{\binom{3}{x} \binom{4}{3-x}}{\binom{7}{3}} & \text{for } x=0, 1, 2, 3 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

(2) C.d.f. $F(x) = \sum_{x_j \leq x} f(x_j)$

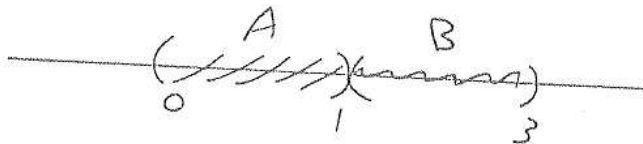
interval	integer	$f(x) = \text{p.m.f.}$	C.d.f. $F(x)$
$X < 0$	no integer	0	0
$0 \leq X < 1$	0	$4/35$	$4/35$
$1 \leq X < 2$	1	$18/35$	$22/35$
$2 \leq X < 3$	2	$12/35$	$34/35$
$X \geq 3$	3	$1/35$	1

* Sketch its graph.

$$(3)(i) \frac{P(X < 1)}{A} / \frac{1 < X < 3}{B} = P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

$$A = \{X : 0 < X < 1\}$$

$$B = \{X : 1 < X < 3\}$$



$$AB = \emptyset$$

$$\therefore P(X < 1 / 1 < X < 3) = \frac{P(\emptyset)}{P(X=2)} = \frac{0}{P(2)} = \frac{0}{18/35} = 0$$

$$(ii) P(X \leq 2) = F(2) \\ = \frac{34}{35}$$

$$\text{or } P(X \leq 2) = f(0) + f(1) + f(2) \\ = \frac{4}{35} + \frac{18}{35} + \frac{12}{35} \\ = \frac{34}{35}$$

g	b
1	2
2	1
3	0

} $X \leq 2$
K=3



- Q₁ Given a p.d.f. of X : الجدول

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{for } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

 Find the c.d.f. of X ($F(x)$).
 Q₂ If a r.v. $X \sim \text{unif}(0,10)$, Calculate the pr. that:
 ① $P(X < 3)$ & ② $P(X > 6)$

- Q₃ Given a c.d.f. of X :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ \frac{x^2}{16} & \text{for } 0 \leq x < 4 \\ 1 & \text{for } x \geq 4 \end{cases}$$

 Find the pr. of: ① $P(X=4)$, ② $P(X > 0)$

- Q₄ Given a c.d.f. of X $F(x)$, if F is continuous at $x=2$, IS
 $P(0 < X < 2) = F(2) - F(0)$? Why?

- Q₁ Show that the following function is pr. function :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{25} & \text{for } x = 1, 2, 3, 4, 5 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

 Q₂ Given a c.d.f. of X :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - (1+x)e^{-x} & \text{for } x > 0 \\ 0 & \text{for } x \leq 0 \end{cases}$$

 Find: ① $P(X \leq 2)$, ② $P(1 < X < 3)$, ③ $P(X > 4)$, ④ $P(X=0)$.
 Q₃ Answer by (true) or (False) and give the reason :
 If a c.d.f. $F(x)$ continuous at $x=2$, then $P(X=2) \neq 0$.
 Q₄ Given a set of integers $\{2, 4, 6, 8, 10\}$. Find the p.m.f. $f(x)$ of X and sketch its graph.

Q₁ A box has (3) yellow and (2) red cards. Choose a sample of (3) cards. Let X be a number of yellow cards in a sample, then find:

- ① the pr. f. of X ($f(x)$).
- ② the c.d.f. of X ($F(x)$).
- ③ the pr. that a sample has (2) yellow cards.

Q₂ Show that there does not exist any number (c) such that the following function $f(x)$ would be a p.f. of X :

$$f(x) = \begin{cases} ce^x & \text{for } x > 0 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

Q₃ Given a p.d.f. of X :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}x & \text{for } 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

Find the value (t) such that $P(X \leq t) = \frac{1}{16}$.

Q₁ Consider the c.d.f. of X :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ x & \text{for } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{for } x \geq 1 \end{cases}$$

- ① Find the p.f. of X ($f(x)$).
- ② IS F continuous at $x=1$? Why?
- ③ Find $P(X=0)$.

Q₂ Show that the following function is pr.f. of X :

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x & \text{for } x = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

Q₃ Toss a coin fourth times (4th times). Find the c.d.f. of ar.v. X ($F(x)$), when X represents the numbers of tail (T) in a sample.

Q₁ Given the d.f. $F(x)$ of X :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < -1 \\ \frac{x+1}{2} & \text{for } -1 \leq x < 1 \\ 1 & \text{for } x \geq 1 \end{cases}$$

Find: ① $P(X=1)$, ② $P(X < -1)$, ③ $P(-\frac{1}{2} < X < \frac{1}{2})$

Q₂ Find the value of (c) from the following pr. function:

$$f(x) = \begin{cases} c \left(\frac{1}{4}\right)^x & \text{for } x=1,2,3,\dots \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

Q₃ IS the following function is pr. function? Why? .

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} & \text{for } x=0,1,2,3,4,5 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

Q₄ Find the c.d.f. $F(x)$ from the following pr.f. of x :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{for } 0 < x < 1 \\ 2-x & \text{for } 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

Q₁ IS the following function is pr. function? Why?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{5} & \text{for } x=1,2,3,4,5 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

Q₂ Given a c.d.f. F of X as follows:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - (1+x)e^{-x} & \text{for } x > 0 \\ 0 & \text{for } x \leq 0 \end{cases}$$

① Find $P(X \leq -2)$, $P(X > 4)$

② IS F Continuous at $x=0$? Why?

Q₃ State Cauchy distribution. (Note: ^{اكتب التوزيع فقط} Only State)

Q₄ Given a c.d.f. of x :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{for } x \geq 0 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

Find the p.f. of X ($f(x)$).

Q1 Given a p.d.f. of X :

$$f(x) = \begin{cases} ce^x & \text{for } x < 0 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

① Find the value of c .

② Find $F(x)$

Q2 Show that the following function is p.f.:

$$f(x) = \begin{cases} (\frac{1}{8})^x & \text{for } x = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

Q3 If $X \sim \text{uniform}(0,1)$, find p.f. $f(x)$ of X .

Q4 Given a c.d.f. of X :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x \leq -1 \\ \frac{1}{2}(x^3+1) & \text{for } -1 < x < 1 \\ 1 & \text{for } x \geq 1 \end{cases}$$

Find the p.f. of X ($f(x)$).

Q1 Find the Pr. distribution of X from the following Pr.f. of X :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{for } x = 1, 2, 3 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

Q2 Show that there does not exist any number (c) such that the following function $f(x)$ would be a p.f.:

$$f(x) = \begin{cases} ce^{-x} & \text{for } x < 0 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

Q3 Given a set of 3-boys and 3-girls. A sample of (2) students are choosing. If Z be a r.v. represents the number of boys in a sample, then find:

① the pr. distribution of Z .

② the c.d.f. of Z ($F(z)$).

③ the pr. that a sample has 3-boys.

Group (1)

Q1: Given a.p.d.f. of X :

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{for } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

Find the c.d.f. of X ($F(x)$).

$$\begin{aligned} \text{sol.} \quad F(x) &= \int_{-\infty}^x f(t) dt \\ &= \int_0^x 2t dt = \frac{2t^2}{2} \Big|_0^x = x^2 \end{aligned}$$

$$\therefore F(x) = \begin{cases} x^2 & \text{for } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

الصفر يدخل
ضمن المساعدة
(أول حد للتكامل)

Q2: If a.r.v. $X \sim \text{unif}(0,10)$, Calculate the pr. that:

- ① $P(X < 3)$ ② $P(X > 6)$

sol. $\therefore X \sim \text{uniform}(0,10)$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} & \text{for } 0 < x < 10 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

$$P(X < 3) = \int_0^3 \frac{1}{10} dx = \frac{x}{10} \Big|_0^3 = \frac{1}{10} (3-0) = \frac{3}{10}$$

$$P(X > 6) = \int_6^{10} \frac{1}{10} dx = \frac{x}{10} \Big|_6^{10} = \frac{1}{10} (10-6) = \frac{4}{10}$$

Q3: Given a c.d.f. of X :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ \frac{x^2}{16} & \text{for } 0 \leq x < 4 \\ 1 & \text{for } x \geq 4 \end{cases}$$

Find the pr. of: ① $P(X=4)$, ② $P(X>0)$

Sol. $P(X=4) = F(4^+) - F(4^-)$
 $= 1 - \frac{4^2}{16} = 1 - \frac{16}{16} = 1 - 1 = \text{Zero}$

$P(X>0) = 1 - P(X \leq 0)$
 $= 1 - F(0)$ by def of $F(x)$
 $= 1 - F(0^+)$ by theorem $F(x) = F(x^+)$
 $= 1 - \frac{0^2}{16} = 1 - 0 = 1$

Q4: Given a c.d.f. of $X(F(x))$, if F is continuous at $x=2$, Is $P(0 < X \leq 2) = F(2) - F(0)$? Why?

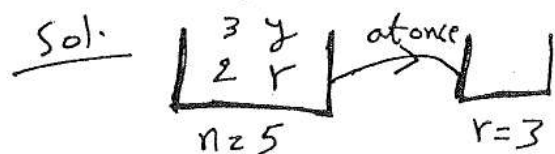
Yes, since X is c.r.v. & $P(X=2)=0$

then $P(0 < X \leq 2) = P(0 < X < 2) = F(2) - F(0)$ by theorem.

Group (2)

Q1: A box has (3) yellow and (2) red cards. Choose a sample of (3) cards. Let X be a number of yellow cards in a sample, then find:

- ① the pr. f. of X ($f(x)$).
- ② the c.d.f. of X ($F(x)$).
- ③ the pr. that a sample has (2) yellow cards.



$X \equiv$ no. of yellow cards in a sample.

$X = 1, 2, 3$ (d.r.v.)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{C_x^3 C_{3-x}^2}{C_5^5} & \text{for } x = 1, 2, 3 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

interval	no. of integer	$f(x)$	$F(x) = \sum_{x_j \leq x} f(x_j)$
$x < 1$	no integer	0	0
$1 \leq x < 2$	1	$f(1) = \frac{{}^3C_2}{{}^5C_3}$	$F(1) = f(1) + 0$
$2 \leq x < 3$	2	$f(2) = \frac{{}^3C_1}{{}^5C_3}$	$F(2) = 0 + f(1) + f(2)$
$x \geq 3$	3	$f(3) = \frac{{}^3C_0}{{}^5C_3}$	$F(3) = 0 + f(1) + f(2) + f(3) = 1$

$$\therefore F(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 1 \\ F(1) & \text{for } 1 \leq x < 2 \\ F(2) & \text{for } 2 \leq x < 3 \\ F(3) = 1 & \text{for } x \geq 3 \end{cases}$$

$$\textcircled{3} P(X=2) = P(\text{2-yellow cards in a sample}) = f(2) = \frac{{}^3C_2 {}^2C_1}{{}^5C_3}$$

Q₂ Show that there does not exist any number (c) such that the following function $f(x)$ would be a p.f. of X :

$$f(x) = \begin{cases} ce^x & \text{for } x > 0 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

Sol. by Condition (2): (If $f(x)$ p.f. then it satisfies this condition).

$$c \int_0^{\infty} e^x dx = 1 \Rightarrow c \int_0^{\infty} e^x dx = c e^x \Big|_0^{\infty} = c [e^{\infty} - e^0] = c [\infty - 1] = c(\infty) \neq 1$$

$\therefore$ there does not exist any number (c) such that the following function $f(x)$ would be a p.f. of X .

Q₃ Given a p.d.f. of X :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}x & \text{for } 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

Find the value (t) such that $P(X \leq t) = \frac{1}{16}$.

Sol.

$$P(X \leq t) = \frac{1}{8} \int_0^t x dx = \frac{1}{8} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^t = \frac{1}{16} (t^2 - 0^2) = \frac{t^2}{16} = \frac{1}{16}$$
$$\Rightarrow t^2 = 1 \Rightarrow t = \pm 1 \Rightarrow t = 1 \text{ only since } t \in [0, 4]$$

Group (3)

P_1 : Given the d.f. $F(x)$ of X :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < -1 \\ \frac{x+1}{2} & \text{for } -1 \leq x < 1 \\ 1 & \text{for } x \geq 1 \end{cases}$$

Find: ① $P(X=1)$, ② $P(X < -1)$, ③ $P(-\frac{1}{2} < X < \frac{1}{2})$

Sol.

$$\begin{aligned} ① P(X=1) &= F(1^+) - F(1^-) \quad (\text{by theorem}) \\ &= 1 - \left(\frac{1+1}{2}\right) \\ &= 1 - \frac{2}{2} = 1 - 1 = \text{Zero} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ② P(X < -1) &= F(-1^-) \quad (\text{by theorem}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ③ P(-\frac{1}{2} < X < \frac{1}{2}) &= P(-\frac{1}{2} < X \leq \frac{1}{2}) \\ &= F(\frac{1}{2}) - F(-\frac{1}{2}) \\ &= \frac{(\frac{1}{2}+1)}{2} - \frac{(-\frac{1}{2}+1)}{2} \\ &= \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Since F is Contr. at $x = \frac{1}{2}$ by theorem

P_2 : Find the value of (c) from the following Pr. function:

$$f(x) = \begin{cases} c \left(\frac{1}{4}\right)^x & \text{for } x = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

Sol. by Cond. (e), we get: $\sum_{x=1}^{\infty} f(x) = 1$

$$\therefore \sum_{x=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^x = 1$$

$$C \left[\left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots \right] = \frac{1}{4} C \left[1 + \left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \dots \right]$$

Geometric series

where $r = \frac{1}{4} < 1 \Rightarrow$ this series is convergent (by theorem)

$$\therefore \sum_{x=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^x = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3/4} = \frac{4}{3} \quad (\text{by theorem})$$

$$\Rightarrow C \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{4}{3}\right) = 1 \Rightarrow \frac{C}{3} = 1 \Rightarrow C = 3$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} 3 \left(\frac{1}{4}\right)^x & \text{for } x = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

Q₃: IS the following function is pr. function? why?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} & \text{for } x = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

Sol. Cond. ② $\sum_{x=1}^5 \frac{1}{5} = \frac{6}{5} > 1$

$\therefore$ Cond. ② doesn't satisfy.

$\therefore f(x)$ is not pr. function.

Q₄: Find the c.d.f. $F(x)$ from the following pr.f. of X :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{for } 0 < x < 1 \\ 2-x & \text{for } 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

Sol. $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_0^x t dt + \int_1^x (2-t) dt$

$$= \left. \frac{t^2}{2} \right|_0^x + \left. \left(2t - \frac{t^2}{2} \right) \right|_1^x$$

$$= \frac{1}{2} x^2 + \left(2x - \frac{1}{2} x^2 \right) - \left(2 - \frac{1}{2} \right)$$

$$= \left(2x - \frac{3}{2} - \frac{1}{2} x^2 \right) + \left(\frac{1}{2} x^2 \right)$$

$x \in [1, 2] \qquad \qquad \qquad x \in [0, 1]$

$\therefore F(x) = ?$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ \frac{1}{2} x^2 & \text{for } 0 \leq x < 1 \\ 2x - \frac{1}{2} x^2 - \frac{3}{2} & \text{for } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{for } x \geq 2 \end{cases}$$

Group(4)

Q₁: Find the pr. distribution of X from the following p.f. of X

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{for } x = 1, 2, 3 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

Sol.

$$\begin{aligned} \text{Pr. dist. of } X &= \{ (x_i, f(x_i)) ; i = 1, 2, 3 \} \\ &= \left\{ \left(1, \frac{1}{3}\right), \left(2, \frac{1}{3}\right), \left(3, \frac{1}{3}\right) \right\} \end{aligned}$$

Q₂: Show that there does not exist any number (c) such that the following function f(x) would be a p.f.:

$$f(x) = \begin{cases} ce^{-x} & \text{for } x \leq 0 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

Sol.

If f(x) is p.f. then Cond. (2) is satisfied :

$$\begin{aligned} c \int_{-\infty}^0 e^{-x} dx &= -ce^{-x} \Big|_{-\infty}^0 = -c [e^0 - e^{\infty}] = -c [1 - \infty] = 1 \\ &= -c + \infty = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \therefore c \neq 1$$

∴ There does not exist any number (c) such that the following function f(x) would be a p.f.

Q₃: Given a set of 3-boys and 3-girls. A sample of (8) students are choosing. If Z be a r.v. represents the number of boys in a sample, then find:

- ① the pr. distribution of Z .
- ② the c.d.f. of Z .
- ③ the pr. that a sample has 3-boys.

Sol. $\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & b \\ \hline 3 & g \\ \hline \end{array}$ at once $\begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array}$
 $n=6$ $r=2$

$Z \equiv$ no. of boys in a sample.

$Z = 0, 1, 2$

$$\textcircled{1} f(z) = \begin{cases} \frac{\binom{3}{z} \binom{3}{2-z}}{\binom{6}{2}} & \text{for } z = 0, 1, 2 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

pr. distribution of $Z = \{(Z_i, f(Z_i)); i = 0, 1, 2\}$

$$= \{(0, f(0)), (1, f(1)), (2, f(2))\}$$

$$= \left\{ \left(0, \frac{\binom{3}{0} \binom{3}{2}}{\binom{6}{2}} \right), \left(1, \frac{\binom{3}{1} \binom{3}{1}}{\binom{6}{2}} \right), \left(2, \frac{\binom{3}{2} \binom{3}{0}}{\binom{6}{2}} \right) \right\}$$

$$= \left\{ \left(0, \frac{3(1)}{3} \right), \left(1, \frac{3(3)}{3} \right), \left(2, \frac{3(1)}{3} \right) \right\}$$

$$= \{(0, 1), (1, 3), (2, 1)\}$$

$$\textcircled{2} F(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ f(0) + 0 = F(0) & \text{for } 0 \leq x < 1 \\ f(1) + f(0) + 0 = F(1) & \text{for } 1 \leq x < 2 \\ f(2) + f(1) + f(0) + 0 = F(2) = 1 & \text{for } x \geq 2 \end{cases}$$

$$\textcircled{3} P(\text{A sample has 3-boys}) = P(Z=3) = f(3) = 0$$

Group (5)

Q₁: Given a p.d.f. of X:

$$f(x) = \begin{cases} ce^x & \text{for } x < 0 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

① Find the value of c.

② Find F(x)

Sol. ① by cond. (2), we get: $c \int_{-\infty}^0 e^x dx = 1$

$$\Rightarrow ce^x \Big|_{-\infty}^0 = 1 \Rightarrow c[e^0 - e^{-\infty}] = 1 \Rightarrow c[1 - 0] = 1$$

$$\therefore c = 1$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} e^x & \text{for } x < 0 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases} \quad (\Rightarrow x < 0)$$

$$\begin{aligned} \text{② } F(x) &= \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x e^t dt = e^t \Big|_{-\infty}^x = e^x - e^{-\infty} \\ &= e^x \end{aligned}$$

$$\therefore F(x) = \begin{cases} e^x & \text{for } x < 0 \\ 1 & \text{for } x \geq 0 \end{cases}$$

Q₂: Show that the following function is P.f.:

$$f(x) = \begin{cases} 7\left(\frac{1}{8}\right)^x & \text{for } x = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

Sol. Cond. ①: $7\left(\frac{1}{8}\right)^1 = f(1) \geq 0$
 $7\left(\frac{1}{8}\right)^2 = f(2) \geq 0$

$\therefore f(x) \geq 0$ & Cond. (1) is satisfied.

$$\begin{aligned} \text{Cond. ② } 7 \sum_{x=1}^{\infty} \left(\frac{1}{8}\right)^x &= 7 \left[\left(\frac{1}{8}\right)^1 + \left(\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{1}{8}\right)^3 + \dots \right] \\ &= \left(\frac{7}{8}\right) \left[1 + \left(\frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{8}\right)^2 + \dots \right] \end{aligned}$$

Geometric Series

by theorem & $r = |\frac{1}{8}| < 1 \Rightarrow$ this series is convergent
 by theorem, we get: $\sum_{x=0}^{\infty} (\frac{1}{8})^x = \frac{1}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{1}{\frac{7}{8}} = \frac{8}{7}$

$$\therefore 7 \sum_{x=1}^{\infty} (\frac{1}{8})^x = (\cancel{\frac{7}{8}}) \cdot (\cancel{\frac{8}{7}}) = 1$$

$\therefore$ Cond. (2) is satisfied.

Q₃: If $X \sim \text{uniform}(0,1)$, find p.f. $f(x)$ of X .

Sol.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

Q₄: Given a c.d.f. of X

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x \leq -1 \\ \frac{1}{2}(x^3 + 1) & \text{for } -1 < x < 1 \\ 1 & \text{for } x \geq 1 \end{cases}$$

Find the p.f. of X ($f(x)$).

Sol.

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x \leq -1 \\ \frac{3}{2}x^2 & \text{for } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{for } x \geq 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2 & \text{for } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

← since F is continuous at $x = -1$

Q₁: Is the following Group (6) function is pr. function? why?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{5} & \text{for } x = 1, 2, 3, 4, 5 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

Sol.

Cond. ①: $f(1) = \frac{-1}{5} < 0$, $f(2) = 0$, $f(x) \geq 0$
 $x = 3, 4, 5$

$\therefore f$ is not pr. function.

Q2: Given a c.d.f. F of X as follows:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - (1+x)e^{-x} & \text{for } x=1, 2, 3, 4, 5 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

① Find $P(X \leq -2)$, $P(X > 4)$

② Is F continuous at $x=0$? Why?

Sol.

① $P(X \leq -2) = F(-2)$ by def. of F
 $= 0$

$$\begin{aligned} P(X > 4) &= 1 - P(X \leq 4) \\ &= 1 - F(4) \\ &= 1 - [(1+4)e^{-4}] \end{aligned}$$

② Yes, since $F(0^+) = F(0^-) = \text{Zero}$.

Q3: State Cauchy distribution.

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \quad \text{for } -\infty < x < \infty$$

Q4: Given a c.d.f. of X :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{for } x \geq 0 \\ 0 & \text{for } x < 0 \end{cases}$$

Find the p.r.f. of X ($f(x)$).

Sol.

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{for } x \geq 0 \\ 0 & \text{for } x < 0 \end{cases} \rightarrow \text{since } F(0^-) = F(0^+) \text{ \& } F \text{ is contr. at } x=0$$

Group (7)

Consider the c.d.f. of X :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ x & \text{for } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{for } x \geq 1 \end{cases}$$

- ① Find the p.f. of X ($f(x)$).
- ② Is F conts. at $x=1$? Why?
- ③ Find $P(X=0)$.

Sol.

$$① f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ 1 & \text{for } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{for } x \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{for } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{for o.w.} \end{cases}$$

② Yes, since $F(1^+) = F(1^-) = 1$.

③ $P(X=0) = F(0^+) - F(0^-)$
 $= 0 - 0 = \text{Zero}$

Q2: Show that the following function is Pr. f. of X :

$$f(x) = \begin{cases} (\frac{1}{2})^x & \text{for } x = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

Sol.

Cond. ① $(\frac{1}{2})^1 > 0, (\frac{1}{2})^2 > 0, \dots$
 $\therefore f(x) \geq 0 \quad \forall x = 1, 2, 3, \dots$

Cond. ②

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^x &= [(\frac{1}{2})^1 + (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^3 + \dots] \\ &= (\frac{1}{2}) [1 + (\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2})^2 + \dots] \quad ; r = |\frac{1}{2}| < 1 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \end{aligned}$$

Geometric series

Q3: Toss a coin fourth times (4^{th} times). Find the C.d.f. of a r.v. X , when X represents the numbers of tail (T) in a sample.

Sol.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{C_x}{16} & \text{for } x = 0, 1, 2, 3, 4 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases} \quad | \quad n(s) = 2^4 = 16$$

$$F(x) = \sum_{x_j \leq x} f(x_j)$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ F(0) = 0 + f(0) & 0 \leq x < 1 \\ F(1) = 0 + f(0) + f(1) & 1 \leq x < 2 \\ F(2) = 0 + f(0) + f(1) + f(2) & 2 \leq x < 3 \\ F(3) = 0 + f(0) + f(1) + f(2) + f(3) & 3 \leq x < 4 \\ F(4) = 1 = 0 + f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4) & x \geq 4 \end{cases}$$

Group (8)

Q₁: Show that the following function is pr. function:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{25} & \text{for } x = 1, 2, 3, 4, 5 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Sol. Cond. ①: $\frac{1}{25} \sum_{x=1}^5 (x+2) = \frac{1}{25} [3+4+5+6+7] = \frac{25}{25} = 1$

Cond. ② $f(1) = \frac{3}{25} > 0, f(2) = \frac{4}{25} > 0, \dots, f(5) = \frac{7}{25} > 0$

$\therefore f(x) \geq 0 \quad \forall x = 1, 2, 3, 4, 5$

$\therefore f(x)$ is pr. f.

Q₂: Given a c.d.f. of X :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - (1+x)e^{-x} & \text{for } x > 0 \\ 0 & \text{for } x \leq 0 \end{cases}$$

Find: ① $P(X \leq 2) = F(2)$ by def. of F
 $= 1 - (1+2)e^{-2}$

② $P(1 < X < 3) = P(1 \leq X \leq 3)$ since F is cont. at $x=3$
 $= F(3) - F(1)$
 $= (1 - (1+3)e^{-3}) - (1 - (1+1)e^{-1})$

③ $P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - F(4) = 1 - (1 - (1+4)e^{-4})$

④ $P(X=0) = F(0^+) - F(0^-) = 1 - (1+0)e^0 - 0$
 $= 0$

by theorem & $r = |\frac{1}{8}| < 1 \Rightarrow$ this series is convergent

by theorem, we get: $\sum_{x=0}^{\infty} (\frac{1}{8})^x = \frac{1}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{1}{\frac{7}{8}} = \frac{8}{7}$

$$\therefore \sum_{x=1}^{\infty} (\frac{1}{8})^x = \frac{8}{7} - (\frac{1}{8})^0 = \frac{8}{7} - 1 = \frac{1}{7}$$

$\therefore$ Cond. (2) is satisfied.

Q₃: If $X \sim \text{uniform}(0,1)$, find p.f. $f(x)$ of X .

Sol.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

Q₄: Given a c.d.f. of X

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x \leq -1 \\ \frac{1}{2}(x^3 + 1) & \text{for } -1 < x < 1 \\ 1 & \text{for } x \geq 1 \end{cases}$$

Find the p.f. of X ($f(x)$).

Sol.

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x \leq -1 \\ \frac{3}{2}x^2 & \text{for } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{for } x \geq 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2 & \text{for } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

← since F is continuous at $x = -1$

Q₁: Is the following Group (6) function is pr. function? why?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{5} & \text{for } x = 1, 2, 3, 4, 5 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

Sol. Cond. ①: $f(1) = \frac{-1}{5} < 0$, $f(2) = 0$, $f(x) \geq 0$ $x = 3, 4, 5$

$\therefore f$ is not pr. function.

Q2: Given a c.d.f. F of X as follows:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - (1+x)e^{-x} & \text{for } x=1,2,3,4,5 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

① Find $P(X \leq -2)$, $P(X > 4)$

② Is F continuous at $x=0$? Why?

Sol.

① $P(X \leq -2) = F(-2)$ by def. of F
 $= 0$

$$\begin{aligned} P(X > 4) &= 1 - P(X \leq 4) \\ &= 1 - F(4) \\ &= 1 - [(1+4)e^{-4}] \end{aligned}$$

② Yes, since $F(0^+) = F(0^-) = \text{Zero}$

Q3: State Cauchy distribution.

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \quad \text{for } -\infty < x < \infty$$

Q4: Given a c.d.f. of X :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{for } x \geq 0 \\ 0 & \text{for } x < 0 \end{cases}$$

Find the pr. f. of X ($f(x)$).

Sol.

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{for } x \geq 0 \\ 0 & \text{for } x < 0 \end{cases}$$

→ since $F(0^-) = F(0^+) = 0$
& F is contr.
at $x=0$

Group (7)

Consider the c.d.f. of X :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ x & \text{for } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{for } x \geq 1 \end{cases}$$

- ① Find the p.f. of X ($f(x)$).
- ② Is F conts. at $x=1$? Why?
- ③ Find $P(X=0)$.

Sol.

$$① f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ 1 & \text{for } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{for } x \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{for } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{for o.w.} \end{cases}$$

② Yes, since $F(1^+) = F(1^-) = 1$.

③ $P(X=0) = F(0^+) - F(0^-)$
 $= 0 - 0 = \text{Zero}$

Q2: Show that the following function is Pr. f. of X :

$$f(x) = \begin{cases} (\frac{1}{2})^x & \text{for } x=1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

Sol.

Cond. ① $(\frac{1}{2})^1 > 0, (\frac{1}{2})^2 > 0, \dots$
 $\therefore f(x) \geq 0 \quad \forall x=1, 2, 3, \dots$

Cond. ② $\sum_{x=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^x = [(\frac{1}{2})^1 + (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^3 + \dots]$
 $= (\frac{1}{2}) [1 + (\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2})^2 + \dots]$
 $= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$
Geometric series, $r = \frac{1}{2} < 1$

Q3: Toss a coin fourth times (4^{th} times). Find the c.d.f. of a r.v. X , when X represents the numbers of tail (T) in a sample.

Sol.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{C_x}{16} & \text{for } x=0, 1, 2, 3, 4 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases} \quad \left| \quad n(s) = 2^4 = 16 \right.$$

$$F(x) = \sum_{x_j \leq x} f(x_j)$$

- ① Find the p.f. of X ($f(x)$).
- ② Is F conts. at $x=1$? Why?
- ③ Find $P(X=0)$.

Sol.

$$① f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ 1 & \text{for } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{for } x \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{for } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{for o.w.} \end{cases}$$

② Yes, since $F(1^+) = F(1^-) = 1$.

③ $P(X=0) = F(0^+) - F(0^-)$
 $= 0 - 0 = \text{Zero}$

Q2: Show that the following function is Pr. f. of X :

$$f(x) = \begin{cases} (\frac{1}{2})^x & \text{for } x=1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

Sol.

Cond. ① $(\frac{1}{2})^1 > 0, (\frac{1}{2})^2 > 0, \dots$
 $\therefore f(x) \geq 0 \quad \forall x=1, 2, 3, \dots$

Cond. ② $\sum_{x=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^x = [(\frac{1}{2})^1 + (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^3 + \dots]$
 $= (\frac{1}{2}) [1 + (\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2})^2 + \dots]$
 $= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$
Geometric series, $r = \frac{1}{2} < 1$

Q3: Toss a coin fourth times (4^{th} times). Find the c.d.f. of a r.v. X , when X represents the numbers of tail (T) in a sample.

Sol.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{C_x}{16} & \text{for } x=0, 1, 2, 3, 4 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases} \quad \left| \quad n(s) = 2^4 = 16 \right.$$

$$F(x) = \sum_{x_j \leq x} f(x_j)$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ F(0) = 0 + f(0) & 0 \leq x < 1 \\ F(1) = 0 + f(0) + f(1) & 1 \leq x < 2 \\ F(2) = 0 + f(0) + f(1) + f(2) & 2 \leq x < 3 \\ F(3) = 0 + f(0) + f(1) + f(2) + f(3) & 3 \leq x < 4 \\ F(4) = 1 = 0 + f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4) & x \geq 4 \end{cases}$$

Group (8)

Q₁: Show that the following function is pr. function:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{25} & \text{for } x = 1, 2, 3, 4, 5 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Sol. Cond. ②: $\frac{1}{25} \sum_{x=1}^5 (x+2) = \frac{1}{25} [3+4+5+6+7] = \frac{25}{25} = 1$

Cond. ① $f(1) = \frac{3}{25} > 0, f(2) = \frac{4}{25} > 0, \dots, f(5) = \frac{7}{25} > 0$

$\therefore f(x) \geq 0 \quad \forall x = 1, 2, 3, 4, 5$

$\therefore f(x)$ is pr. f.

Q₂: Given a c.d.f. of X :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - (1+x)e^{-x} & \text{for } x > 0 \\ 0 & \text{for } x \leq 0 \end{cases}$$

Find: ① $P(X \leq 2) = F(2)$ by def. of F
 $= 1 - (1+2)e^{-2}$

② $P(1 < X < 3) = P(1 \leq X \leq 3)$ since F is cont. at $x=3$
 $= F(3) - F(1)$
 $= (1 - (1+3)e^{-3}) - (1 - (1+1)e^{-1})$

③ $P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - F(4) = 1 - (1 - (1+4)e^{-4})$

④ $P(X=0) = F(0^+) - F(0^-) = 1 - (1+0)e^0 - 0 = 0$

Q₃: Answer by (true) or (False) and given the reason:
If a c.d.f. $F(x)$ continuous at $x=2$, then $P(X=2) \neq 0$.

Sol. No, since if F conts. at $x=2$, then $F(2^+) = F(2^-)$
and $P(X=2) = F(2^+) - F(2^-)$
 $= \text{Zero}$

Q₄: Given a set of integers $\{2, 4, 6, 8, 10\}$. Find the p.m.f. $f(x)$ of X and sketch its graph.

Sol.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} & \text{for } x = 2, 4, 6, 8, 10 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

$X \sim \text{unif.}(5)$

