قسم الرياضيات/المرحلة الثالثة

محاضرات التحليل العددي

حل نظام المعادلات الخطية

م.م عهود فاضل علوان

ohood fadil

~~موجود~~ الملاحظة: ... وسطي (مستطيل) $x_n \neq b_m$

محاضرة عدي نظري يوم الأربعاء 2017/11/15

- أخطاء ناتجة من الانسان والماكنة

Machin + Human Errors

(موجود بالكتاب)

الفصل الثاني

الحلول العددية لأنظمة المعادلات الخطية:

Numerical Solution of Linear Equations Systems:

يكتب النظام الخطي بصيغتين:

① صيغة المعادلات:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \ddots \quad\quad \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

22 النوع مستطيل ثوابت

② صيغة المصفوفات:

$$Ax = b$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

حيث / $A = [a_{ij}]$ تسمى مصفوفة المعاملات.

b يسمى متجه الحدود المطلقة (الثوابت)

X يسمى متجه المجاهيل (المجاهيل)

Positive Definte Matrix ⟵ المصفوفة المحددة الموجبة

يقال للمصفوفة A بأنها محددة موجبة اذا كانت متناظرة وتحقق الشرط ($\underline{X}^T \cdot A \cdot \underline{X} > 0$ لكل $\underline{X} \neq 0$)

مثال ⟵

بين فيما اذا كانت المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ محددة موجبة أم لا ؟

الحل ⟵

① A Sym. ✓

② $\underline{X}^T \cdot A \cdot \underline{X} > 0$?

لنفرض $\underline{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\underbrace{\underbrace{\underset{1\times3}{(1\ 0\ 1)} \cdot \underset{(3\times3)}{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}}}_{1\times3} \cdot \underset{(3\times1)}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}}_{1\times1 = 1\ \text{عنصر}} = ? \qquad 3 > 0$$

$$(2\ {-2}\ 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{= 3}$$

تعريف ⟵

Positive Semi Definte Matrix ⟵ المصفوفة شبه المحددة الموجبة

A بأنها شبه محددة موجبة اذا كانت متناظرة وتحقق الشرط ($X^T \cdot A \cdot X \geq 0$ لكل $\underline{X} \neq 0$)

مبرهنة

المصفوفة المتناظرة A تكون محددة موجبة اذا وفقط اذا كان اي مصفوفة جزئية من المصفوفة A تكون محدداتها موجبة ($|A_r| > 0$) حيث A_r المصفوفة الجزئية من المصفوفة A

مثال

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

باستخدام المبرهنة . بين فيما اذا كانت A محددة موجبة ام لا ؟!

الحل

المصفوفات الجزئية :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 1$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = |-2| = 2$$

$$A_6 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 3$$

$$A_8 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 2$$

$$A_9 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

$$A_{10} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\forall\ |A_r| > 0$$

$\therefore$ A مصفوفة محددة موجبة

Adjoint Matrix ← المصفوفة المتباورة

$C_{ik} = A_{ki}$ نرمز لها بالرمز C , حيث

حيث $A_{ik} = (-1)^{i+k} |M_{ik}|$

وأن M_{ik} هي المصفوفة الناتجة بعد حذف الصف i , والعمود K من المصفوفة A

مثال ←

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$ جد المصفوفة المتباورة للمصفوفة

الحل ←

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$

26

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-2) = +2$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-2) = -2$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1) = +1$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (-2) = -2$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1) = 1$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (3) = 3$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = (6) = -6$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = (5) = 5$$

4 + 1

$m<n$ عدد المعادلات أقل

عددي نظري يوم الأربعاء 22/11/2017م

ملاحظة

إيجاد حل نظام المعادلات الخطية يعتمد على عدد المجاهيل (n) وعدد المعادلات (m) أو بمعنى آخر يعتمد على عدد الأعمدة وعدد الصفوف وبالتالي:

الحالة الأولى

إذا كان $(m<n)$ فإن النظام الخطي له حل ولكن ليس وحيد

Example

$$x_1 + 3x_2 = 4 \Rightarrow x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = ?$$

$m=1$
$n=2$
$m<n$

$$\Rightarrow x_1 = 4 - 3x_2 \Rightarrow$$

let :-

$$\left.\begin{array}{l} x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 4 \\ x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \Rightarrow x_1 = 7 \end{array}\right] \begin{array}{l} \Rightarrow \underline{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \underline{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$\vdots \qquad \vdots$

OR $\quad x_2 = (4 - x_1)/3 =) \ldots$

x_1 ، x_2 أحدهما يعتمد على الآخر.

∴ هناك حلول ليس وحيد.

36

مربوحين على التوالي

الحالة الثانية

اذا كانت $(m > n)$

فأن النظام الخطي قد لا يمتلك حلاً نهائياً

Example

$$2x_1 - 3x_2 = 1 \quad \dots \quad ①$$
$$x_1 + x_2 = 0 \quad \dots \quad ②$$
$$5x_1 - x_2 = 3 \quad \dots \quad ③$$

بالجمع

$$eq.② + eq.③ \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{-1}{2}$$

$$\therefore \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$\therefore$ $\underline{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ لا يحقق المعادلة الأخرى (المعادلة رقم (1))

37

$\therefore$ النظام لا يمتلك حلاً نهائياً

وهذا النوع من المعادلات يسمى بالمعادلات ليست متسقة ولا يست مترابطة inconsistent eq.

Example 2

$$2x_1 - 2x_2 = 1 \quad ①$$
$$x_1 + x_2 = 0 \quad ②$$
$$3x_1 - 2x_2 = 1 \quad ③$$

بالجمع

$$eq.① + eq.② \Rightarrow x_1 = \frac{1}{5}, \quad x_2 = \frac{-1}{5} \Rightarrow \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$\therefore$ $\underline{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$ يحقق جميع المعادلات

$\therefore$ $\underline{x}$ هو حل وحيد للنظام الخطي أعلاه

11.11 ميتل الدالة $R^n \to R$

عدد المصفوفات القطرية في العليا والسفلى = عدد العناصر القطرية.

ب- لا تفيد جميع المعادلات

∴ أحدهما تكون زائدة، وهذا النوع من المعادلات يسمى بالمعادلات المتسقة (المترابطة) Consistent eq

الحالة الثالثة:

اذا كان $(m=n)$ أي أن مصفوفة النظام مربعة $(n \times n)$ فإن النظام الخطي يمتلك حلاً وحيداً بشرط $(|A| \neq 0)$

هنالك نوعان من الطرائق العددية لحل أنظمة المعادلات الخطية هما:

① الطرائق المباشرة Direct Method

② الطرائق التكرارية (الغير مباشرة) Iterative Method

38

أولاً: الطرائق المباشرة:

① طريقة كرامر Crammer Method

② " التعويض التراجعي (الخلفي) Back-ward Substitution M.

③ " " الأمامي التقدمي For ward Substitution M.

④ طريقة معكوس المصفوفة Invers Matrix

⑤ طريقة كاوس للحذف Gauss - Elimination M

* عناصر الارتكاز هي العناصر القطرية

أ- طريقة كاوس للحذف مع التبديل الجزئي
G.E with Partial Pivoting

ب- طريقة كاوس للحذف مع التبديل الكلي (التام)

② طريقة كاوس جوردن للحذف Gauss-Jordan Elimination M.

أ- " " " " مع التبديل الجزئي
ب- " " " " مع التبديل الكلي (التام)

③ طرائق تجزئة المصفوفة Decomposition Matrix M.

أ- طريقة دوليتل : Doolittle's M.
ب- طريقة كروت : Crout's M.
ج- طريقة جوليسكي : Cholesky's M.

39

مثال :

جد حل النظام الخطي الآتي مستخدماً طريقة كاوس للحذف

$2X_1 + 3X_2 - X_3 = 5$ —— ①
$4X_1 + 4X_2 - 3X_3 = 3$ —— ②
$-2X_1 + 3X_2 - X_3 = 1$ —— ③

الحل :

1- نكتب النظام الخطي بصيغة المصفوفة الممتدة.

$C = [A : b]$

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \rightarrow R_1 \\ \rightarrow R_2 \\ \rightarrow R_3 \end{array}$$

Scanned by CamScanner

H.w الفرقة 6 ,أ.محمد

$R_2 - \frac{4}{2} * R_1 =$

$R_3 - \frac{-2}{2} * R_1 =$ $\Rightarrow$

$4 - \frac{4}{2} * 2 = 0$

$4 - \frac{4}{2} * 3 = -2$

$-3 - \frac{4}{2} * (-1) = -1$

$3 - \frac{4}{2} * (5) = -7$

$R_3 - \frac{-2}{2} (R_1)$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & : & 5 \\ 0 & -2 & -1 & : & -7 \end{pmatrix}$$

H.w

40

اذا المحدد صفر لا يوجد معكوس : لا يوجد حل

عددي تقريبي

* طرائق معكوس المصفوفة ← Invers Matrix

① طريقة المصفوفة المجاورة ←

لتكن A مصفوفة مربعة غير معتلة ($|A| \neq 0$) فانه

$$A^{-1} = \frac{[Adj(A)]^T}{|A|}$$

$$x = A^{-1} \cdot b$$

حيث

$$Adj(A) = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$$

وانه M_{ij} هي المصفوفة الجزئية بعد حذف الصف i والعمود j 43

مثال ←

جد حل النظام الآتي بطريقة المعكوس (المصفوفة المجاورة)

$$x_1 + x_3 = -1$$
$$-x_1 + x_2 = 4$$
$$x_3 = -1$$

معطية $x_1 = 0$, $x_2 = 4$, $x_3 = -1$

④ اذا المصفوفة مربعة ٤×٤ حتى احل المحدد انقل ٣ اعمدة واذا ٥×٥ انقل ٤ اعمدة

* طريقة ثانية

$+ \; - \; + \; -$

$$Adj(A) = C^T \; *$$

$$|A| = \left| \begin{array}{ccc:cc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right|$$

$$|A| = 1 - 0 = 1 \quad \neq 0$$

$$Adj(A) = (-1)^{i+j} \ |M_{ij}| = C$$

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

44 $$C_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1} = -1$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = (1)^{3+1} = -1$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = (1)^{3+3} = 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 3} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}_{3\times 1}$$

$$x = A^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} -1+0+1 \\ -1+4+1 \\ 0+0-1 \end{pmatrix}_{3\times 1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

② طريقة حذف جاوس لإيجاد المعكوس

مصفوفة المعاملات ، المصفوفة الواحدية

$$[A : I] \sim [I : A^{-1}]$$

بإجراء العمليات الصفية الأولية (الحذف) على المصفوفة الممتدة $[A:I]$ باستخدام جاوس - جوردن

مثال

حل النظام الخطي الآتي باستخدام طريقة حذف جاوس:

$$2x_1 + 4x_2 - x_3 = 3$$
$$x_1 + x_2 - x_3 = -3$$
$$x_1 + 4x_2 = 2$$

45

$[A:I]$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 2 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 - (-\frac{1}{2}) R_1} \quad R_2 - (\tfrac{1}{2}) * R_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 2 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$R_3 - (\tfrac{2}{3}) * R_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 2 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{9}{6} & -\frac{2}{3} & 1 \end{array}\right)$$

١-١١ هي عناصر الارتكاز المصفوفة بالنسبة للحذف

مصدر خارجي Numerical Analysis Burden

٦/١٢/٢٠١٧ الأربعاء

عددي نظري

س: هل بالإمكان إستخدام طريقة كاوس للحذف لحل النظام الخطي الآتي:

$$x_2 - 2x_3 = 0$$
$$2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 3$$
$$5x_1 - 2x_2 + x_3 = 2$$

ج/ بما أن عنصر الارتكاز ($a_{11} = 0$) فالطريقة تفشل (لأننا نقسم على الصفر للحصول على المضروبات)

~~ملاحظة~~

المعالجة /

إستخدام أسلوب الارتكاز الجزئي والكلي إي ابدال الصفوف؟

كيف ؟!

ملاحظة

① اذا كان احد عناصر القطر الرئيسي مساوية للصفر أو قريبة جداً للصفر فعلينا الاستعانة بأساليب ابدال الصفوف، اي أساليب التبديل الكلي والتبديل الجزئي ثم أجراء العمليات السطرية الأولية

تعريف معادلة الارتكاز أو المحور: Pivotal Equation

هي المعادلة التي يستعمل لحذف أحد المجاهيل من المعادلات الباقية

عنصر الارتكاز:

هو ذلك العنصر القطري الذي يمثل معامل المجهول في معادلة الارتكاز

ملاحظة:

اذا كان لدينا نظام خطي يتكون من n من المعادلات (أو مربع) فإن:

1) عدد معادلات الارتكاز فيه = $n-1$
2) كذلك عدد عناصر الارتكاز فيه = $n-1$

الارتكاز الجزئي Partial Pivoting:

غالباً ما تؤدي عملية الحذف بطريقة كاوس الى توليد بعض عناصر الارتكاز مساوية او قريبة جداً الى الصفر، وعليه لا يمكن من خلالها الاستمرار في عملية الحذف (تفشل الطريقة).

لذلك في حالة حصول عنصر ارتكاز مساوي للصفر أو قريب منه فعلينا ترتيب المعادلات بحيث يصبح عنصر الارتكاز مخالفاً للصفر

س:

كيف تتم عملية التبديل في الصفوف (المعادلات)

ج:

ليس الغاية الاساسية من تبديل الصفوف او المعادلات هو الحصول على عنصر ارتكاز لا يساوي صفراً فقط بل البحث عن اكبر مطلق لمعامل المجهول المراد حذفه من العمود الواقع تحت القطر الرئيسي، فقط تكون قيم المضروبات أصغر من 1 لكي نضمن ان تكون عناصر المصفوفة قليلة التأثر بعملية التدوير

اي الحصول على نتائج محسوبة قليلة التدوير بأخطاء التدوير

مثال :-

حل النظام الخطي الاتي باستخدام طريقة كاوس للحذف مع التبديل الجزئي

$$x_2 - 2x_3 = 0$$
$$2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 3$$
$$5x_1 - 2x_2 + x_3 = 2$$

الحل :-

بما ان عنصر الارتكاز $(a_{11} = 0)$ فإن طريقة كاوس للحذف تفشل لذلك نلجأ الى طريقة التبديل الجزئي نبحث عن اكبر عنصر مطلقه في العمود الاول وهو $(a_{31} = 5)$

وبإبدال الصف الثالث بالصف الاول نجد

$$5x_1 - 2x_2 + x_3 = 2$$
$$2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 3$$
$$x_2 - 2x_3 = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 - \frac{0}{5} R_1 = R_3]{R_2 - \frac{2}{5} R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{19}{5} & -\frac{27}{5} & \frac{11}{5} \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{بدون ابدال لأن } a_{22} > a_{32}]{R_3 - \frac{5}{19} R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{19}{5} & -\frac{27}{5} & \frac{11}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{11}{19} & \frac{11}{19} \end{array}\right)$$

$x_3 = -1$ $x_2 = ?$ $x_1 = ?$

50

total
Complete
Full

الارتكاز الكلي : Pivoting
التام :

هو تطوير لنهج الارتكاز الجزئي، حيث نبحث
عن اكبر قيمة مطلقة ونقوم بتبديل صفوف المصفوفة
والصفوف التي يسبق لها وانه ابحث صفوف وتكرار
والذي بدوره يصبح عنصر ارتكاز . ومن ثم اجراء
العمليات السطرية الاولية (الحذف)، حيث
نحصل على مصفوفة معتبرة والتي يمكن ترتيبها لتصبح مصفوفة
مثلثية عليا او سفلى في حالة كاوس الحذف او مصفوفة
قطرية في حالة كاوس جوردن الحذف .

مثال ٣
س/ حل النظام الخطي في المثال السابق باستخدام
كاوس الحذف مع التبديل الكلي (الارتكاز الكلي)

مثال ٤ 51

س/ حل النظام الخطي في المثال السابق باستخدام طريقة
كاوس جوردن مع التبديل الجزئي والتبديل الكلي

* اذا كانت اهم عناصر الارتكاز = صفر نستخدم التبديل الكلي
او الجزئي
وللحصول على قيم مضروبة اصغر

نستفاد من كاوس وكاوس جوردن لايجاد المحددات بطريقة أسهل

محاضرة العددي النظامي في السفلى وتعويض أمامي

طرائق التحليل المثلثي

Decomposition Matrix

أو تجزئة المصفوفة

$$A X = b$$

$$A = L \cdot U$$

$$L \cdot U \cdot X = b$$

Let $U \cdot X = Y \Rightarrow L \cdot Y = b$

1) Doolittle $L_{ii} = 1$ ② crout $= U_{ii} = 1$

52

ليكن لدينا النظام الخطي ① $AX = b \; ...$
وباستخدام طرائق التحليل المثلثي نضع A بالشكل
$$A = L \cdot U$$
اي أن ① تصبح بالصورة
$$L \cdot U \cdot X = b \; ... ②$$
حيث L مصفوفة مثلثية سفلى و U مصفوفة مثلثية عليا

نفرض أن $U \cdot X = Y \; ... ③$

وبتعويض ③ في ② نحصل على

$$L \cdot Y = b \; .... ④$$

بأستخدام طريقة التعويض الامامي (التقدمي نجد عناصر المتجه Y من النظام في ④ ثم نعوض في النظام ③

لايجاد الحل المطلوب (X) وذلك بأستخدام طريقة التعويض التراجعي الخلفي

ما الهدف عن طريق التجزئة المصفوفة وايجاد الحل للنظام الخطي في (1) منها

(1) طريقة دولتيل ← Doolittle's M

تتلخص الطريقة بتجزئة (تحليل) مصفوفة النظام الخطي في (1) الى حاصل ضرب مصفوفتين احدهما عليا (U) والاخرى سفلى (L) أي

$$A = L \cdot U$$

حيث

$$l_{ii} = 1 \ , \ i = 1, 2, \dots, n$$

مثال ← 53

جد حل النظام الخطي الاتي بطريقة دولتيل

$$x_2 - 2x_3 = 0$$

$$2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 3$$

$$5x_1 - 2x_2 + x_3 = 2$$

الحل ←

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -5 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix} \ , \ \underline{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A = L \cdot U$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -5 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -5 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ L_{21} U_{11} & L_{21} \cdot U_{12} + U_{22} & L_{21} \cdot U_{13} + U_{23} \\ L_{31} \cdot U_{11} & L_{31} \cdot U_{12} + L_{32} U_{22} & L_{31} U_{13} + L_{32} \cdot U_{23} + U_{33} \end{pmatrix}$$

l_{11} $\quad + l_{32}\cdot u_{22}$ $\quad l_{31}$ $\quad u_{13}$ $\quad + u_{32}\cdot u_{23} + u_{33}$

$-7\cdot 1\cdot 5\cdot -2 \qquad -7\cdot -1$

$U\cdot L$

$u_{11}=0, \quad u_{12}=1, \quad u_{13}=2$

$l_{21}\cdot u_{11}=2 \Rightarrow l_{21}\cdot 0=2 \Rightarrow 0=2$

وهذا غير ممكن

* طلع هيج لأن عندي احد عناصر الارتكاز 0 لذلك يجب استخدام التبديل الجزئي أو الكلي وذلك للتخلص من كون احد العناصر القطرية مساوي للصفر $(a_{ii}=0)$

للنظام اعلاه حل بعد أجراء عملية التبديل (H.W)

مثال ع

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 2 & 3 & -5\\ 5 & -2 & 1\end{pmatrix}, \quad x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

$$b=\begin{pmatrix}1\\ 3\\ 2\end{pmatrix}$$

نفس المثال السابق فقط غيرنا 0 بـ 1

$u_{11}=1, \quad u_{12}=1, \quad u_{13}=-2$

$l_{21}\, u_{11}=2 \Rightarrow l_{21}\cdot 1=2 \qquad l_{21}=2$

$l_{21}\cdot u_{12}+u_{22}=3 \Rightarrow 2\cdot 1+u_{22}=3 \Rightarrow u_{22}=1$

$l_{21}\cdot u_{13}+u_{23}=-5 \Rightarrow 2\cdot -2+u_{23}=5 \Rightarrow u_{23}=-1$

$l_{31}\cdot u_{11}=5 \Rightarrow l_{31}=5$

$l_{31}\, u_{12}+l_{32}\cdot u_{22}=-2 \Rightarrow 5\cdot 1+l_{32}\cdot 1=-2 \Rightarrow l_{32}=-7$

$l_{31}u_{13}+l_{32}\,u_{23}+u_{33}=1 \Rightarrow -10+7+u_{33}=1 \Rightarrow u_{33}=4$

نعلم ان $L\cdot y = b'$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & -7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$5y_1 - 7y_2 + 1y_3 = 2$$

بأستخدام التعويض الامامي نحصل على

$$y_1 = 1 , \quad y_2 = 1 , \quad y_3 = 4$$

من الفرضية (3)

$$U \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

بأستخدام التعويض التراجعي (الخلفي)

$$x_3 = 1 , \quad x_2 = 2 , \quad x_1 = 1$$

تحليل عددي نظري

٢- طريقة كروت : crouts Method

تتلخص الطريقة بتحليل مصفوفة النظام الخطي

$$A \cdot X = b \quad — ①$$

الى حاصل ضرب مصفوفتين احدهما مثلثية عليا (U)، والأخرى مثلثية سفلى (L) فيصبح النظام في (١) بالشكل

$L \cdot U \cdot \underline{X} = \underline{b}$، حيث أن عناصر المصفوفة المثلثية العليا $u_{ii}=1$ ($i=1,2,\ldots,n$)

ثم نفرض

$$U \cdot \underline{X} = \underline{y} \quad — ②$$

$$\Rightarrow L \cdot \underline{y} = \underline{b} \quad — ③$$

من ③ نجد $\underline{y}$ باستخدام طريقة التعويض الأمامي ، ثم نجد الحل المطلوب $\underline{X}$ من المعادلة ② باستخدام طريقة التعويض التراجعي

٣- طريقة جولسكي : cholesky's Methods

تستخدم لحل النظام الخطي

$$A\underline{X} = \underline{b}$$

بشرط A مصفوفة محددة موجبة متناظرة وتحقق الشرط ($X^T \cdot A \cdot X > 0$)

وذلك بتحليل مصفوفة النظام في ① الى حاصل ضرب مصفوفتين مثلثيتين وبالاتي

$$A = L \cdot U \xrightarrow[U = L^T]{A \text{ متناظرة}} A = L \cdot L^T$$

$$x^T \cdot A \cdot x = \underbrace{\underbrace{1\times3 \cdot 3\times3}_{1\times3} \cdot 3\times1}_{1\times1 \text{ يعني عنصر}}$$

or $\xrightarrow[L = U^T]{A \text{ متناظرة}}$ $A = U^T \cdot U$

ثم $L \cdot L^T \cdot \underline{X} = \underline{b}$

يفرض ② — $L^T \cdot \underline{X} = \underline{y}$ نحصل على

③ — $L \cdot \underline{y} = \underline{b}$

من ③ نجد $\underline{y}$ بطريقة التعويض الامامي ثم نعوض $\underline{y}$ في ② نجد الحل المطلوب $\underline{X}$ باستخدام طريقة التعويض التراجعي

مثال

باستخدام طريقة جولسكي , جد حل النظام الخطي

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$$ 59

الحل

① A متناظرة ؟ ✓

② $x^T \cdot A \cdot x > 0$ لـ $\underline{X} \in R^3$

لنفرض $\underline{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftarrow X^T = (x_1, x_2, x_3)$

$$\therefore X^T \cdot A \cdot X = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= (x_1 - x_2 + x_3 ,\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 ,\ x_1 - 3x_3 + 9x_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$x_1^2 - x_1x_2 + x_1x_3 - x_1x_2 + 2x_2^2 - 3x_2x_3 + x_1x_3$$

$$-3x_2x_3 + 9x_3^2$$

$$= (x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) + (x_2^2 - 6x_2x_3 + 9x_3^2) + 2x_1x_3$$

$$= (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - 3x_3)^2 + 2x_1x_3 > 0$$

بطريقة جولسكي لما بيجة القطر الرئيسي ا يكون أعداد اعتيادية

: A مصفوفة محددة موجبة

$$A = L \cdot L^T$$

L [illegible]

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{11} & L_{21} & L_{31} \\ 0 & L_{22} & L_{32} \\ 0 & 0 & L_{33} \end{pmatrix}$$

60

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (L_{11})^2 & L_{11}L_{21} & L_{11}L_{31} \\ L_{21}L_{11} & L_{21}^2 + L_{22}^2 & L_{21}L_{31} + L_{22}L_{32} \\ L_{31}L_{11} & L_{32}L_{21} + L_{32}L_{22} & L_{31}^2 + L_{32}^2 + L_{33}^2 \end{pmatrix}$$

$$L_{11}^2 = 1 \qquad \boxed{L_{11} = 1}$$

$$L_{11}L_{21} = -1 \Rightarrow 1 \cdot L_{21} = -1 \qquad \boxed{\Rightarrow L_{21} = -1}$$

$$L_{11}L_{31} = 1 \Rightarrow \boxed{L_{31} = 1}$$

$$L_{21}L_{11} = -1 \Rightarrow \boxed{L_{21} = -1} \qquad L_{21}^2 + L_{22}^2 = 2 \Rightarrow 1 + L_{22}^2 = 2$$

$$\boxed{L_{22} = 1}$$

$$L_{21}L_{31} + L_{22}L_{32} = -3$$

$$-1 + 1 \cdot L_{32} = -3$$

$$L_{32} = -2$$

$L_{31} \cdot 1 = 1 \Rightarrow L_{31} = 1$

$L_{31} L_{21} + L_{32} L_{22} = -3$

$-1 + L_{32} = -3 \Rightarrow \boxed{L_{32} = -2}$

$L_{31}^2 + L_{32}^2 + L_{33}^2 = 9$

$1 + 4 + L_{33}^2 = 9$

$\Rightarrow L_{33}^2 = 4 \quad \boxed{L_{33} = 2}$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$L \cdot \underline{y} = \underline{b} \Rightarrow \underline{y}$

$L^T \cdot X = \underline{y}$

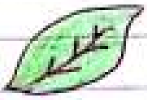
$\Rightarrow \underline{X} = ?$

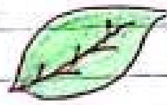
6

اذا يحتوي المثال على أو المصفوفة ذات حجم كبير استخدم التكرارية
يوجد أصفار اركان ومنه ارتكاز لا يوجد عمود ارتكاز   او مصفوفة قطرية

محاضرة التحليل العددي

9/1/2018 م
الأربعاء





* $(x, y) \in R^2$ زوج مرتب يمثل متجه

* أيجاد حل ابتدائي $\underline{x} = \binom{0}{0}$ يسمى متجه صفري

* لقبول الحل نقول $\| \underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)} \| < \epsilon$ اذا تحققت أجزئة

$\epsilon > 0$

* $\lim_{k \to \infty} \{ \underline{x}^{(k)} \} \to \underline{x}$

ماهي K هي التي تحقق العلاقة $\| \underline{x}^{(k)} - \underline{x}^{(k-1)} \|_{p} < \epsilon$

$p = 1, 2, \infty$

* المعيار هو دالة $\| x \|_p : R^n \to R$

* المعيار الأحادي $\| x \|_1 = |$ مجموع قيم المتجه $|$

$\| x \|_2 = \sqrt{\text{مجموع مربع قيم المتجه}}$

$\| x \|_\infty =$ الأكبر مطلق في المتجه

اذا كانت $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 4 & 9 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

$\| A \|_1 = 15$ للأعمدة

مجموع
$\| A \|_\infty = 14$ الأكبر مطلق في الصفوف

$\| A \|_2 = \sqrt{\max \{ \lambda_i \text{ of } \underset{B}{\underline{A \cdot A^T}}}$

جد الحل λ

$$|A \cdot A^T - \lambda I| = 0$$ معدد

نحصل على معادلة تكون درجتها حسب درجة المصفوفة $(n \times n)$

② الطرائق التكرارية Iterative Methods

تستخدم لحل أنظمة المعادلات الخطية ذات الشكل

$$A \cdot \underline{X} = \underline{b} \quad \ldots \quad (1)$$

وهنا نحل الحل التقريبي للحل المضبوط عن طريق حساب متتابعة من التقريبات المتعاقبة

$$\left\{ \underline{X}^{(K)} \right\}_{K=1}^{\infty} = \left\{ \underline{X}^{(1)}, \underline{X}^{(2)}, \underline{X}^{(3)}, \ldots \underline{X}^{(K)} \right\}$$

66

اي نبدأ بحل تقريبي (ابتدائي) (initial solution, approximation)

لنظام المعادلات وليكن $\underline{X}^{(0)}$ ثم نجري سلسلة من العمليات الحسابية التي تؤدي في الحصول على حل تقريبي أفضل (اي اكثر دقة)

وهنا يستخدم مرة أخرى في نفس السلسلة من العمليات لينتج حل عددي ثانياً " أكثر دقة من السابقة.

وهكذا نستمر في الحصول على متتابعة حلول تقريبية حتى تحقق الشرط

$$\| \underline{X}^{(K)} - \underline{X}^{(K-1)} \|_p < \epsilon$$

ϵ مستوى الدقة المطلوبة في الحل

$$0 < \epsilon < 1$$

$$(\epsilon = 10^{-n})$$

متجه $\underline{A}$

مصفوفة A

علماً أن $\|\cdot\|_p$ يسمى بالمعيار (المقياس) Norm

ملاحظات

① في الطرائق التكرارية تكثر أخطاء القطع أو التدوير التي تؤدي الى سوء النتائج أو أحياناً تساعد الطريقة في الحصول على الحل المطلوب.

② الاختيار المناسب للحل الابتدائي $\underline{X}^{(0)}$ كلما يكون قريب جداً من الحل المطلوب يعطي نتائج جيدة.

③ تعتبر الطريقة التكرارية متقاربة (convergent) اذا كانت متتابعة الحلول $\{\underline{X}^{(k)}\}$ متزايدة بدقتها وتقترب من الحد الثابت (ϵ) وعكسه تعتبر الطريقة التكرارية متباعدة

المعيار Norm

67

$\|\cdot\|_p$ هو دالة معرفة

المتجه $\underline{X}$

$$\|\underline{X}\|_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad ; \forall \ \underline{X} \in \mathbb{R}^n$$

المصفوفة A

$$\|A\|_p : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R} \quad ; \forall \ A \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

① اذا كان لدينا متجه وليكن $\underline{X} \in \mathbb{R}^n$ فإن

① المعيار الأحادي $\|\underline{X}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |X_i|$ absolute norm

② المعيار الثنائي $\|\underline{X}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |X_i|^2}$

euclidean norm

(3) معيار الحد الأعلى $\|\underline{X}\|_{\infty} = \max\{ |x_i|$

maximum norm

(٢) اذا كان لدينا المصفوفة المربعة A من الدرجة $n \times n$ فإن

للأعمدة

(1) $\|A\|_1 = \max_j \left\{ \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right\}$ $\quad j = 1, 2, \ldots, n$

(2) $\|A\|_2 = \sqrt{\max_i \{ \lambda_i \text{ of } A \cdot A^T}$

للصفوف

(3) $\|A\|_{\infty} = \max_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right\}$

$i = 1, 2, \ldots, n$

68

مثال

جد $\|\underline{X}\|_1$, $\|\underline{X}\|_2$, $\|\underline{X}\|_{\infty}$

حيث $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

الحل

$$\|X\|_1 = \sum_{i=1}^{3} |x_i|$$

$$= |x_1| + |x_2| + |x_3|$$

$$= 2 + 3 + 4 = 9$$

$$\|\underline{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} |x_i|^2}$$

$$= \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2}$$

$$= \sqrt{4+9+16} = \sqrt{29}$$

$$\|\underline{x}\|_\infty = \max_{1\le i\le 3} \{ |x_i| \}$$

$$= \max_i \{ |x_1|, |x_2|, |x_3| \}$$

$$= \max \{ 2, 3, 4 \}$$

$$= 4$$

69

مثال

جد $\|A\|_1$, $\|A\|_2$, $\|A\|_\infty$

حيث

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

الحل

① $\|A\|_1 = \max_j \left(\sum_{i=1}^{3} |a_{ij}| \right)$ $j = 1, 2, 3$

عمود

$$= \max_j \{ 4, 2, 3 \} = 4$$

$\|A\|_2$

② $\|A\|_\infty = \max_i \left\{ \sum_{j=1}^{3} |a_{ij}| \right\}$ $i = 1, 2, 3$

$= \max \{ 3, 4, 2 \} = 4$

③ $\|A_2\| = \sqrt{\max_i (\lambda_i \text{ of } A \cdot A^T)}$

حيث λ تمثل القيم الذاتية للمصفوفة A مضروبة
بمدورها يمكن ايجادها من متعددة الحدود (المعادلة المميزة)
وذلك

$$|A \cdot A^T - \lambda I| = 0$$

$$\left| \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & 6-\lambda & 1 \\ 2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

تطلع عندك

70

عددي نظري 2018/1/8

يفضل استخدام الطرائق التكرارية على الطرائق المباشرة من ناحية الناحية الاقتصادية في حالة

١) المصفوفة المتناثرة Sparice matrix

هي المصفوفة التي يكون اغلب عناصرها اصفار

٢) المصفوفة المهيمنة قطرياً "تماماً" Strictly Diagonal Dominant matriex

هي المصفوفة التي يكون فيها مطلق العنصر القطري في كل صف اكبر من مجموع القيمة المطلقة لعناصر الصف الواحد أي

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad , \quad i=1,2,\dots n \qquad (1)$$

or

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1 \quad ; \quad i=1,2,\dots n \qquad (2)$$

حيث (1) أو (2) تمثل الشرط الكافي (sufficient condition)

لتقارب الطريقة (التكرارية) (الخوارزمية)
اي تقارب متتابعة الحلول التقريبية للحل المضبوط ضمن دقة معينة $(\epsilon = 10^{-n})^{n\geq 2}$ ؛ ١ ٢ ٢ ϵ ٢ ٥

٤) اذا كانت رتبة او حجم المصفوفة عالي جداً.

Scanned by CamScanner

ملاحظات

① تبدأ الطرائق التكرارية بحل ابتدائي ولنكن $\underline{X}^{(0)}$

② تتوقف الطريقة التكرارية ونقبل الحل $\underline{X}^{(k)}$ اذا تحقق الشرط

$$\| \underline{X}^{(k)} - \underline{X}^{(k-1)} \| \le \epsilon \quad ; \quad 0 < \epsilon < 1$$

* المعيار المطلق دائماً موجب
ويسمى ايضاً " شرط التقارب للطريقة التكرارية " حسب نوع المعيار

** له تسميتين (شرط قبول الحل) أو (شرط التقارب)

خواص المعيار

① $\|X\| \ge 0$; $\|A\| \ge 0$ اذا كانت مصفوفة صفرية

② $\|\alpha \underline{X}\| = \alpha \cdot \|\underline{X}\|$; $\|\alpha A\| = \alpha \|A\|$ 72

③ $\|\underline{X} + \underline{Y}\| \le \|\underline{X}\| + \|\underline{Y}\|$; $\|A + B\| \le \|A\| + \|B\|$

④ $\|X \cdot Y\| \le \|X\| \cdot \|Y\|$; $\|A \cdot B\| \le \|A\| \cdot \|B\|$

ملاحظة

③ قبل البدء باستخدام الطرائق التكرارية لحل نظام المعادلات الخطية علينا تحقق الشرط الكافي للتقارب (اي المصفوفة يجب ان تكون بصيغة المهيمنة قطرياً وذلك بأبدال الصفوف ان امكن)

حدي نظري

* هنالك عدة انواع من الطرائق التكرارية لايجاد حل النظام الخطي من المعادلات ، منها

① طريقة الجاكوبي

② طريقة كاوس سايدل

③ طريقة الاسترخاء (النجاح) المتتالي ، وكل منها تعتمد اسلوب تحليل مصفوفة النظام وبالشكل الآتي .

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

$$(L + D + U)\underline{x} = \underline{b}$$

Jacobi : $(L + U)\underline{x} + D\underline{x} = \underline{b}$

Gauss Seideel: $L\underline{x} + U\underline{x} + D\underline{x} = \underline{b}$

Seesesive Relaxation :

$$w(L+U)\underline{x} + D\underline{x} = \underline{b}$$

w ← عامل الترجيح

$$1 < w < 0$$

74

① الطريقة الاولية

طريقة جاكوبي Jacobi's Method

تستخدم لحل نظام المعادلات الخطية المعرف بالشكل :

$$A\underline{x} = \underline{b} \quad \text{——} \; ①$$

$$\Rightarrow \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} a_{ij} \, x_j + a_{ii} \, x_i = b_i \quad \text{——} \; ②$$

75

$$\Rightarrow a_{ii} \, x_i = \Big(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, x_j\Big) \quad \text{——} \; ③$$

$i = 1, 2, \dots, n$

$$\Rightarrow x_i = \Big(b_i - \sum a_{ij} \, x_j\Big) / a_{ii} \quad \text{——} \; ④$$

$i = 1, 2, \dots, n$

والصيغة التكرارية للطريقة تكون بالشكل

$$x_i^{(k)} = \Big(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} \, x_j^{(k-1)}\Big) / a_{ii} \quad \text{——} \; ⑤$$

حيث k تمثل الخطوة التكرارية

$k = 1, 2, 3, \dots$

لكل $i = j$ هو D

مثال

حل نظام المعادلات الخطية الآتية بطريقة جاكوبي

$$10x_1 + 1x_2 + x_3 = 12$$
$$x_1 + 10x_2 + x_3 = 12$$
$$x_1 + x_2 + 10x_3 = 12$$

حيث $x^{(0)} = 0$

76

الحل

$K = 1$, $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

باستخدام الصيغة التكرارية للطريقة نجد

$$x_1^{(1)} = \Big(b_1 - \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{3} a_{ij} x_j^{(0)}\Big) / a_{11}$$

$$= \left[b_1 - (a_{12} x_2^{(0)} + a_{13} x_3^{(0)})\right] / a_{11}$$

$$= \left[12 - (1)(0) - (1)(0)\right] / 10$$

$$= 1.2$$

$$x_2^{(1)} = \Big[b_2 - \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{3} a_{2j} x_j^{(0)}\Big] / a_{22}$$

$$= \left[b_2 - (a_{21} x_1^{(0)} + a_{23} x_3^{(0)})\right] / a_{22}$$

$$= [12 - (1)(0) + (1)(0)] / 10$$

$$= 1.2$$

$$X_3^{(1)} = \left[b_3 - \sum_{i=1}^{3} a_{3j} x_j^{(0)} \right] / a_{33}$$

$$= \left[b_3 - a_{31} X_1^{(0)} + a_{32} X_2^{(0)} \right] / a_{33}$$

$$= 12 - (1)(0) + (1)(0) / 10$$

$$= 1.2$$

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} X_1^{(1)} \\ X_2^{(1)} \\ X_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.2 \\ 1.2 \\ 1.2 \end{pmatrix}$$

$$\| \underline{X}^{(1)} - \underline{X}^{(0)} \|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} 1.2 \\ 1.2 \\ 1.2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_\infty$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 1.2 \\ 1.2 \\ 1.2 \end{pmatrix} \right\|_\infty = 1.2 < \epsilon$$

10^{-5}

لو الدقة مضبوط 5- / أو 3، أو 7 أو 10

$K = 2$ $\qquad X^{(1)} = \begin{pmatrix} 1.2 \\ 1.2 \\ 1.2 \end{pmatrix}$

$$x_1^{(2)} = \left(b_1 - \sum_{1}^{3} a_{1j} \, x_j^{(1)}\right) / a_{11}$$

$$= \left[b_1 - \left(a_{12} \, x_2^{(1)} + a_{13} \, x_3^{(1)}\right)\right] / a_{11}$$

$$= \left[12 - (1)(1.2) - (1)(1.2)\right] / 10$$

$$= (12 - 2.4)/10 = 9.6/10 = 0.96$$

$$x_2^{(1)} = \left[b_2 - \sum_{j=1}^{3} a_{2j} \, x_j^{(1)}\right] / a_{22}$$

$$= \left[b_2 - \left(a_{21} \, x_{(1)}^{(1)} + a_{23} \, x_{(3)}^{(1)}\right)\right] / a_{22}$$

$$= \left[12 - (1)(1.2) - (1)(1.2)\right] / 10$$

$$= 0.96$$

$$x_3^{(2)} = \left[b_3 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{3} a_{3j} \, x_j^{(1)}\right] / a_{33}$$

$$= \left(12 - (1)(1.2) + (1)(1.2)\right) / 10 = 0.96$$

$$X^{(2)} = \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.96 \\ 0.96 \\ 0.96 \end{pmatrix}$$

$$\left\| \underline{X}^{(2)} - \underline{X}^{(1)} \right\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} 0.96 \\ 0.96 \\ 0.96 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1.2 \\ 1.2 \\ 1.2 \end{pmatrix} \right\|_\infty$$

$$\Rightarrow \left\| \begin{pmatrix} 0.24 \\ 0.24 \\ 0.24 \end{pmatrix} \right\|_\infty = 0.24 > \epsilon$$

0.00001

واجب/ جد حل النظام الخطي باستخدام الجاكوبي

(١)

$$3x_1 + x_2 - x_3 = 1$$

$$4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5$$

$$5x_1 - x_2 - 2x_3 = 4$$

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1.2 \\ 0.3 \\ 0.9 \end{pmatrix}$$

$\epsilon = 10^{-3}$ نقبل الحل عندما تحقق الشرط وبدقة

اذا متناظر افضل جولسكيا اما اذا غير متناظرة استخدم دولتل وكروت

(نظري عددي)

نظام صحيح ومستطيل

٢) طريقة كاوس سايدل Gauss-Seidles Method

وهي من الطرق التكرارية التي تستخدم لحل الانظمة الخطية عندما تكون ذات حجم كبير ودرجة المصفوفة عالية

وذلك لتخلص من اخطاء القطع والتدوير التي تحدث في العمليات الطويلة نفضل التكرارية.

تأمل النظام الخطي بالشكل

تأمل المصفوفة العليا والسفلى والقطرية U و L و D

$$A\underline{X} = \underline{b} \quad \cdots ①$$

$$(L + U + D)\,\underline{x} = \underline{b}$$

$$\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j + a_{ii} x_i = \underline{b}$$

$$x_i = \left[b_i - \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j \right) \right] / a_{ii}$$

والصيغة التكرارية للطريقة هي :

$$x_i^{(k)} = \left[b_i - \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} \right) \right] / a_{ii}$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

1.2
1.2

i ما مشتركة

مثال

جد حل النظام الآتي بأستخدام طريقة كاوس سايدل

ة ما تطبيقية ع هما نحتاج خطوات أكثر

إذا استعملنا نفس التكرار للحل إذا كانت $K = 2, 1$ وهكذا

$$10x_1 + x_2 + x_3 = 12$$

$$x_1 + 10x_2 + x_3 = 12$$

$$x_1 + x_2 + 10x_3$$

الحل

~~Kosat~~

$$x_i^{(K)} = \left[b_i - \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(K)} + \sum_{j=i+1} a_{ij} x_j^{(K-1)} \right) \right] / a_{ii}$$

$K = 1$

$$x_1 = \left[b_1 - \left(\sum_{j=1}^{0} a_{1j} x_j^{(1)} + \sum_{j=2}^{3} a_{1j} x_j^{(0)} \right) \right] / a_{11}$$

$$x_1 = \left[b_1 - (0 + a_{12} x_2^{(0)} + a_{13} x_3^{(0)}) \right] / a_{11}$$

$$x_1 = [12 - (0 + (1)(0) + (1)(0)] / 10$$

$$= 1.2$$

$$x_2 = \left[b_2 - \left(\sum_{j=1}^{1} a_{2j} x_j^{(1)} + \sum_{j=3}^{3} a_{23} x_3^{(0)} \right) \right] / a_{22}$$

$$= \left[b_2 - (a_{21} x_1^{(1)} + a_{23} x_3^{(0)}) \right] / a_{22}$$

$$= \frac{12 - 1.2}{10} = \frac{10.8}{10} = 1.08$$

x_3

80

$$X_3^{(1)} = \left[b_3 - \left(\sum_{j=1}^{2} a_{3j} x_j^{(1)} + \sum_{j=4}^{3} a_{3j} x_j^{(0)} \right) \right] / a_{33}$$

$$= \left[b_3 - (a_{31} X_1^{(1)} + a_{32} X_2^{(1)}) + 0 \right] / a_{33}$$

$$= \left[12 - (1)(1.2) + (1) - (1.08) \right] / 10$$

$$= \frac{[12 - 2.23]}{10} = \frac{9.72}{10} = 0.972$$

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.2 \\ 1.08 \\ 0.972 \end{pmatrix}$$

$$\| X^{(1)} - X^{(0)} \| \overset{?}{<} \varepsilon$$ نشك

$$\left\| \begin{pmatrix} 1.2 \\ 1.08 \\ 0.972 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} 1.2 \\ 1.08 \\ 0.972 \end{pmatrix} \right\| = 1.2 > 10^{-3}$$

81

ده نستمر لإيجاد X عندما k=2

$$X_1 = \left[b_1 - \left(\sum_{j=1}^{0} a_{1j} x_j^{(2)} + \sum_{j=2}^{3} a_{1j} x_j^{(1)} \right) \right] / a_{11}$$

$$X_1 = \left[b_1 - (0 + a_{12} X_2^{(1)} + a_{13} X_3^{(1)}) \right] / a_{11}$$

$$= 12 - ((1 \times 1.08) + (1 \times 0.972)) / 10$$

$$= (12 - 2.052) / 10 = 0.9948$$

$$X_2 = \left[b_2 - \left(\sum_{j=1}^{1} a_{2j} x_j^{(2)} + \sum_{j=3}^{3} a_{23} X_3^{(1)} \right) \right] / a_{22}$$

$$= \left[b_2 (a_{21} X_1^{(2)} + a_{23} X_3^{(1)}) \right] / a_{22}$$

9

$$= \frac{12 - ((1)(0.9948) + (1)(0.972))}{10}$$

$$= 1.00332$$

$$x_3 = \left[b_3 - \left(\sum_{j=1}^{2} a_{3j} x_j^{(2)} + \sum_{j=4}^{3} a_{3j} x_j^{(1)} \right) \right] / a_{33}$$

$$= \left[b_3 - \left(a_{31} x_1^{(2)} + a_{32} x_2^{(2)} \right) + 0 \right] / a_{33}$$

$$= \left[12 - \left((1)(0.9948) + (1)(1.00332) \right) \right] / 10$$

$$= 12 - 1.99812 = 1.000188$$

82 $$\underline{X}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.9948 \\ 1.00332 \\ 1.000188 \end{pmatrix}$$

$$\left\| \underline{X}^{(2)} - \underline{X}^{(1)} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 0.9948 \\ 1.00332 \\ 1.000188 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1.2 \\ 1.08 \\ 0.972 \end{pmatrix} \right\|_\infty$$

$$= \left\| \begin{pmatrix} -0.2052 \\ -0.07668 \\ 0.028188 \end{pmatrix} \right\|_\infty = 0.2052 > 10^{-5}$$

نستمر لإيجاد X لغاية $K = 3$

كلشي بي K يمثل حل تقريبي.

2018/2/28 عربي نظري

③ طريقة الارتخاء المتتالي والنجاح
Successive Relaxation Method

تستخدم لحل أنظمة المعادلات الخطية وتكتب بالصيغة

$$x_i^{(K)} = (1-w)\,x_i^{(K-1)} + w\Big[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(K)} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\,x_j^{(K-1)}\Big]\Big/a_{ii}$$

حيث أن w يسمى (عامل التسريع للطريقة) وتسمى الفترة $(0,2)$ أو بعضها أي $0<w<2$ علما أن .

86

* $w=1$ فان الطريقة هي كاوس سايدل Gauss - Seidle's
* $1<w<2$ فوق الارتخاء المتتالي Successive over Relaxation
* $0<w<1$ تحت الارتخاء المتتالي under

لاختيار الطريقة التي شرط لازم يتحقق

الشرط الكافي لتقارب الطرائق التكرارية :-

ليكن ① ... $X = BX + C$ الحل المضبوط (الحقيقي) للنظام الخطي

② ... $X^{(K)} = B\,X^{(K-1)} + C$ الحل التقريبي (العددي) للنظام الخطي.

بطرح ② من ① نجد

$$X - X^{(K)} = B(X - X^{(K-1)})$$

$$= B\cdot B(X - X^{(K-2)}) = B^2(X - X^{(K-2)}) \;??$$

$$x_i^{(K)} = \Big(b_i - \sum \underbrace{a_{ij}}_{B}\,x^{(K-1)}\Big)\,a_{ii}$$

83

* كلما (K) أكبر تقترب من الصفر
* العشرية كلما كبر الرسا صغرت قيمه مثل $(0.1)^2$ و $(0.1)^3$

وبالاستقراء الرياضي نجد

$$\underline{X} - \underline{X}^{(K)} = B^K \cdot (\underline{X} - \underline{X}^{(0)})$$

نسبة الخطأ [illegible]

وبأخذ المعيار للطرفين نجد

$$\|\underline{X} - \underline{X}^{(K)}\| = \|B^K \cdot (\underline{X} - \underline{X}^{(0)})\|$$

$$\leq \|B^K\| \cdot \|X - \underline{X}^{(0)}\|$$ وزعنا المعيار

$$\neq 0$$

$$\lim_{K \to \infty} \|\underline{X} - \underline{X}^{(K)}\| \simeq$$

نقبلها مع تقريبي مضبوط عندما يكون الحل اقل من الواحد
لأن المعيار موجب لا يمكن تحديده بحدود سالبة.

$$\lim_{K \to \infty} \|B^K\| \, \|\underline{X} - \underline{X}^{(0)}\| \to 0 \quad \text{when} \quad \|B\| < 1$$

87 اذا كان معيار مصفوفة الطريقة بعد النظام اقل من واحد
∴ هذا يعني ان الحل موجود ∴ الطريقة متقاربة.

اذن الشرط الكافي لتقارب الطريقة التكرارية هو $\|B\| < 1$

مثال ∴ بين فيما اذا كان الحل التقريبي متقارب للحل المضبوط
ام لا ؟؟ للنظام الخطي.

$$4X_1 - X_2 + X_3 = 7$$
$$4X_1 - 8X_2 + X_3 = 21$$
$$-2X_1 + X_2 + 5X_3 = 15$$

نطلع X القريبات

في حالة استخدام احد الطرائق التكرارية

فمثلاً اذا طلع $B = 2$ الطريقة غير متقاربة

الحل :

نبحث عن العنصر X التكرارية

$$X_1 = \frac{1}{4}X_2 - \frac{1}{4}X_3 + 7/4$$ نقسم على معامل X_1

$$X_2 = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{8}X_3 + 21/8$$ نقسم على معامل X_2

$$X_3 = \frac{2}{5}X_1 - \frac{1}{5}X_2 + 3$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{8} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7/4 \\ 21/8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{X} = B \cdot \underline{X} + C$$

88

$$\|B\|_\infty = \max\left\{\frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{3}{5}\right\}$$ نأخذ مجموع مطلق عناصر كل صف

$$= \max\{0.5, 0.625, 0.6\}$$

$$= 0.625 < 1$$

$\therefore \|B\| < 1 \Rightarrow$ الحل التقريبي ليتقارب الحل المضبوط

∴ نستخدم الطريقة التكرارية .

محاضرة عددي نظري يوم الأربعاء

2018/3/7م

استقرارية stability

- متى يكون النظام مستقر راح نحصل على حل تقريبي للحل المطلوب
وإذا كان غير مستقر راح نحصل على حل بعيد عن الحل المطلوب
Non stability

* مقياس الاستقرارية : $K(A)$ العدد الشرطي

$K(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$

$K(A) \geq 1$ دائماً أكبر من واحد (واجب الإثبات)
يعني قريب للواحد بكثير يعني النظام مستقر يعني قريب من الحل المضبوط
وإذا كان أكبر من الواحد بكثير مثلاً ٧، ١٠، ٢٠ يعني بعيد عن الحل المضبوط

تحليل الأخطاء في حل الأنظمة الخطية.

89

تأمل النظام الخطي

$$A\underline{X} = \underline{b}$$

حيث A مصفوفة مربعة غير منفردة . ($|A| \neq 0$)

نقول أن النظام الخطي مستقر (stable) اذا كانت مصفوفة A مستقرة اي أن العدد الشرطي $K(A)$ أكبر من الواحد الواحد بقليل (أقرب من الواحد بكثير) وخلاف ذلك أي أن النظام الخطي غير مستقر اذا كانت مصفوفته غير مستقرة اي أن العدد الشرطي $K(A)$ أكبر من الواحد بكثير.
وبالتالي قد يعطي حلاً بعيداً عن الحل المضبوط .
لذلك قبل البدء بحل النظام علينا اختبار استقراريته .
(٤٠ — ٥٠) النظري

س / ما هو العدد الشرطي Condition Number

هو مقياس لاستقرارية النظام الخطي $A\underline{X} = \underline{b}$ ويعرف بالشكل .

$$K(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

δA مقدار تغير A / δb مقدار تغير b

اي تغير في A و b راح يأثر على $\underline{x}$

* اذا تغير فقط b او فقط في A او في الاثنين معاً يصير عندي (3) حالات

① $K(\alpha \cdot A) = \alpha\, K(A)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

② $K(A) \geq 1$ H.W

$\|A\| \cdot \|A^{-1}\| \geq \|A \cdot A^{-1}\| = 1$

* سوف ندرس استقرارية الحل $\underline{X}$ بالنسبة للتغيرات الحاصلة في المتجه $\underline{b}$ او المصفوفة A أو كليهما وكالآتي.

① التغير الحاصل في عناصر المتجه $\underline{b}$:

تأمل النظام الخطي

$$A\,\underline{X} = \underline{b} \quad \dots ①$$

ولنفرض أنه $\delta\underline{b}$ هو مقدار التغير في المتجه $\underline{b}$ وأنه $\delta\underline{X}$ هو مقدار التغير في الحل $\underline{X}$

$$\Rightarrow A(\underline{X} + \delta\underline{X}) = \underline{b} + \delta\underline{b} \quad \dots ②$$

$$\Rightarrow \cancel{A\underline{X}} + A \cdot \delta X = \cancel{\underline{b}} + \delta\underline{b} \quad \dots ③$$

من (1) و (3) نجد

$$\Rightarrow A^{-1}\left[A\,\delta\underline{X} = \delta\underline{b}\right] \quad \dots ④$$

$$\Rightarrow \delta\underline{X} = A^{-1} \cdot \delta\underline{b} \quad \dots ⑤$$

$$\Rightarrow \|\delta\underline{X}\| = \|A^{-1} \cdot \delta\underline{b}\|$$

$$\Rightarrow \|\delta\underline{X}\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\delta\underline{b}\| \quad \dots ⑥$$

$$\Rightarrow \frac{\|\delta\underline{X}\|}{\|\underline{X}\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|\delta\underline{b}\|}{\|\underline{X}\|}$$

من ① نحصل على

امتحان عددي تحليلي 12/4/

يوم الخميس ٢٠١٨/٤/١٥

س ١٢:٣٠ — ١:٣٠

$$\Rightarrow \|A \cdot \underline{X}\| = \|\underline{b}\|$$

$$\Rightarrow \|A\| \cdot \|X\| \geq \|\underline{b}\|$$

$$\Rightarrow \|\underline{X}\| \geq \frac{\|\underline{b}\|}{\|A\|}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\|\underline{X}\|} \leq \frac{\|A\|}{\|\underline{b}\|} \quad \dots (8)$$

من (8) في (7) ، نجد

$$\Rightarrow \frac{\|\delta \underline{x}\|}{\|\underline{X}\|} \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\delta b\| \cdot \frac{\|A\|}{\|\underline{b}\|}$$

٩٩

$$\Rightarrow \frac{\|\delta X\|}{\|\underline{X}\|} \leq K(A) \cdot \frac{\|\delta \underline{b}\|}{\|\underline{b}\|} \quad \dots (9)$$

نستنتج من المتباينة (9) أن المقدار $K(A)$

له تأثير كبير على الحل $\underline{X}$ فاذا كانت $K(A)$ "صغيرا"

فأن ذلك يعني أن المقدار $\frac{\|\delta \underline{X}\|}{\|\underline{X}\|}$ يكون صغير

هذا يعني الكونفيرجنسي

اي أن $\delta \underline{X} \cong 0 \Rightarrow \underline{X} + \delta \underline{x} \rightarrow \underline{X}$

اما اذا كانت $K(A)$ "كبير جدا" فأن $\frac{\|\delta \underline{X}\|}{\|\underline{X}\|}$ يكون

"كبيرا" أيضا

بمعنى $\delta \underline{X}$ بعيد عن الصفر $\Rightarrow \underline{X} + \delta X \not\rightarrow$ بعيد عن الحل $\underline{X}$

* لا يوجد في المصفوفات تقسيم فقط اذا كان A او العدد
* في ضرب المصفوفات يجب مراعاة الترتيب
* العدد او التغير عند توزعه يقلب او يبدل المصفوفات $(AB)^{-1}$ B^{-1}

$A\underline{x} = \underline{b}$

$(A + \delta A)\,\underline{x} = \underline{b}$

الثلاثاء 2018/3/13 م تحليل عددي نظري

مبرهنة :-

① اذا كان $\|B\| < 1$ فان

$$\|(I+B)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|B\|}$$

② لتكن δA التغير الحاصل في عناصر المصفوفة A هو التغير الحاصل في المصفوفة A وان $\delta \underline{x}$ هو التغير الحاصل في $\underline{x}$

$A\,\underline{x} = \underline{b} \quad \ldots ①$ 93

$(A + \delta A)(\underline{x} + \delta \underline{x}) = \underline{b} \quad \ldots ②$

$\cancel{A\underline{x}} + A\,\delta\underline{x} + \delta A\cdot\underline{x} + \delta A\cdot\delta\underline{x} = \cancel{\underline{b}} \quad \ldots ③$

من ① و ③ فحصل

$A\,\delta\underline{x} + \delta A\cdot\underline{x} + \delta A\cdot\delta\underline{x} = 0$

نسحب عامل مشترك $\delta \underline{x}$

$(A + \delta A)\,\delta\underline{x} + \delta A\cdot\underline{x} = 0$

نأخذ $(A+\delta A)^{-1}$

$\delta\underline{x} = -(A+\delta A)^{-1} * (\delta A\,\underline{x})$

$\|\delta\underline{x}\| = \|-(A+\delta A)^{-1} * (\delta A\,\underline{x})\|$

$= \|-[A(I + A^{-1}\delta A)]^{-1} * (\delta A\,\underline{x})\|$

← سحبنا A عامل مشترك من خلال التقسيم على A

← مراعاة ترتيب جانب المصفوفات

الفصل في حسن ونجاحكم

$$= \| (I + A^{-1}\delta A)^{-1} \cdot A^{-1} \cdot \delta A \cdot \underline{x} \|$$

$$\leq \| (I + A^{-1}\delta A)^{-1} \| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \|\delta A\| \cdot \|\underline{x}\|$$

حسب النظرية $\leq \dfrac{1}{1 - \|A^{-1}\delta A\|} \|A^{-1}\| \cdot \|\delta A\| \cdot \|\underline{x}\|$

$$\|\delta \underline{x}\| \leq \frac{1}{1 - \|A^{-1}\| \|\delta A\|} \|A^{-1}\| \cdot \|\delta A\| \cdot \|\underline{x}\|$$

بالقسمة على معيار x نجد $\|\underline{x}\|$

$$\frac{\|\delta \underline{x}\|}{\|\underline{x}\|} \leq \frac{1}{1 - \|A^{-1}\| \|\delta A\|} \cdot \|A^{-1}\| \cdot \|\delta A\|$$

99 $$\frac{\|\delta \underline{x}\|}{\|\underline{x}\|} \leq \frac{1}{1 - \|A^{-1}\| \|A\| \dfrac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \cdot \frac{\|A^{-1}\| \|\delta A\| \|A\|}{\|A\|}$$

$$\frac{\|\delta \underline{x}\|}{\|\underline{x}\|} \leq \frac{K(A)}{1 - K(A) \dfrac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \cdot \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \quad \cdots \quad (4)$$

يتضح من المتباينة رقم (4) أن التغير النسبي في عناصر المصفوفة A يؤثر على حل النظام الخطي بمقدار $\delta \underline{x}$ حيث أن $\delta \underline{x}$ يكون $\delta \underline{x} \cong 0$

إذا كانت $K(A)$ العدد الشرطي صغير "، أما في حالة $K(A)$ كبيراً فإنه $\delta(\underline{x})$ يبتعد عن الصفر وبالتالي نحصل على حل بعيد عن الحل المضبوط .

Scanned by CamScanner

تمارين الفصل الثاني

① جد المعيار l_1 , l_2 , l_∞ للمتجهات

ⓐ $\underline{X} = (2, 1, -3, 4)^t$

ⓑ $\underline{X} = \left(\frac{4}{K+1}, \frac{2}{K^2}, K^2, e^{-K}\right)^t$, K عدد صحيح موجب

② جد المعيار l_∞ للمصفوفات

ⓐ $\begin{pmatrix} 10 & 15 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ⓑ $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 7 \\ -1 & 4 & 0 \\ -7 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

③ اذا كانت $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 16 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

برهن أن A ليست متقاربة , لكن B متقاربة

④ اذا علمت أن $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ \beta & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ جد

قيم α و β اذا كانت

ⓐ A is singular منفصلة

ⓑ A is symmetrix

ⓒ A is Positive definite محددة موجبة

92

d) A is strictly diagonally dominant

5) أعطي النظام الخطي

$$2x_1 - \alpha x_2 = 3$$

$$3\alpha x_1 - x_2 = 3/2$$

جد قيمة (قيم) α ، اذا علمت ان النظام أعلاه

أ) لا يمتلك حلاً ، ب) يمتلك عدد لانهائي من الحلول

ج) يمتلك حلاً وحيداً

96

2018/3/14 « عددي نظري »

⑥ إفرض انه A مصفوفة غير معتلة للنظام $A\underline{x}=\underline{b}$
وأن δA هو التغير الحاصل في A
$\underline{\delta b}$ هو التغير الحاصل في عناصر المتجه $\underline{b}$ و $\delta\underline{x}$
التغير الحاصل في الحل $\underline{x}$ إثبت ان

$$\frac{\|\delta \underline{x}\|}{\|\underline{x}\|} \le \frac{K(A)\cdot\|A\|}{\|A\|-K(A)\cdot\|\delta A\|}\cdot\left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}+\frac{\|\delta \underline{b}\|}{\|\underline{b}\|}\right)$$

⑦ تأمل النظام الخطي $A\underline{x}=\underline{b}$ مكتوب بالصيغة

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1.0001 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 3.0001\end{pmatrix}$$

ويمتلك الحل $\underline{x}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

97 ① ناقش تقارب الطريقة التكرارية في حل النظام أعلاه
② ناقش إستقرارية الطريقة التكرارية لإيجاد الحل التقريبي
للنظام أعلاه

③
اذا تغير a_{21} بمقدار 0.0002 ناقش
إستقرارية الحل $\underline{x}$ للنظام الخطي $(A+\delta A)\underline{x}=\underline{b}$

⑧ إثبت انه $\|\underline{x}-\underline{x}^{(k)}\| \le \frac{\|B\|^k}{1-\|B\|^k}\|\underline{x}^{(1)}-\underline{x}^{(0)}\|$

حيث B مصفوفة مربعة من الرتبة $n\times n$ ، $\|B\|<1$
و
$\underline{x}^{(k)}=B\underline{x}^{(k-1)}+\underline{c}\,;\ k=1,2,\cdots$ و $x^{(0)}$ أختيار أبتدائي

$\underline{x}=B\underline{x}+\underline{c}$ و $\underline{c}\in R^n$

9) اذا كان $\hat{X}$ هو الحل التقريبي للنظام الخطي $A\underline{x} = \underline{b}$ حيث A مصفوفة ليست مختلفة وأن $\underline{r} = \underline{b} - A\underline{x}$ هو المتجه المتبقي للحل $\hat{X}$ ، $\underline{X} \neq 0$ و $\underline{b} \neq 0$ إثبت أن

$$\frac{\|\delta \underline{x}\|}{\|\underline{x}\|} \leq k(A) \cdot \frac{\|\delta r\|}{\|\underline{b}\|}$$

$A\underline{x} = b$

$A\hat{\underline{x}} = \underline{b} + \delta\underline{b}$

نسبيا $\underline{\delta b} = \underline{b} - A\hat{\underline{x}}$

$\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.9 \\ 1.9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ 98

$\hat{X}$

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$

$\delta b = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.9 \\ 1.9 \end{pmatrix} = \underline{r}$

10) حل النظام الخطي في حالة المتغيرات

$(1-2i)(x_1+iy_1) + (3+2i)(x_2+iy_2) = 5+2i$

$(2+i)(x_1+iy_1) + (4+3i)(x_2+iy_2) = 4-i$

$x + 2iy = 5 + 3i \quad x = 5, \ y = \frac{3}{2}$

$z = a$

$z, a \in \mathbb{C}$

الحقيقي = الحقيقي
التخيلي = التخيلي