الفصل الاول
الانظمة البدهية
(Axiomatic)

يتكون النظام البدهي من تعاريف، مجموعة بديهيات ومبرهنات. سندرس هذه المفاهيم بشكل عام ثم نأخذ بعض الامثلة عن انظمة بدهية التي تكون بعضا منها منتهية.

١-١ التعاريف

ان اي تعريف جيد لأي كلمة (مصطلح) في الرياضيات يجب ان يعبر عنه ببساطة، ان يكون غير دوري ويصف بطريقة وحيدة الكلمة المراد تعريفها.

فالبساطة تعني ان نعبر عن الكلمة المراد تعريفها بكلمات ابسط منها، اي بكلمات معروفة، فقد عرف اقليدس النقطة بانها ليست لها بعد، والمستقيم له طول فقط وليس له عرض او سمك. ان هذه الكلمات التي هي البعد، الطول، العرض، والسمك اصعب من الكلمات المراد تعريفها، لذلك لايمكن قبول مثل هذه التعاريف.

اما الدورية فيقصد بها عند تعريف كلمة ما، فاننا سنمر بسلسلة من التعاريف التي قد تنتهي بنفس الكلمة، فمثلا، اذا عرفنا المستقيم بانه مجموعة من نقاط ونعرف النقطة بانها تقاطع مستقيمين، فان هذه العملية تكون دورية، لذا نتجنب ان نعرف س بدلالة ص ونعرف ص بدلالة س.

يقصد بالوصف الوحيد ان التعريف الدقيق لكلمة مايجب ان يصف هذه الكلمة بطريقة بحيث لاينطبق هذا الوصف على كلمة اخرى، فمثلا، اذا عرفنا قلم الرصاص "بانه اداة حادة تستعمل للكتابة"، فان هذا التعريف يصف ايضا قلم الحبر وقلم الجاف. لذلك لايمكن قبول مثل هذه التعاريف. ولكي نتجنب هذه المشكلة نختار بعض الكلمات بدون تعريف لتكون كلمات اولية او كلمات غير معرفة(Undefined terms) وبدلالتها تعرف بقية الكلمات او المصطلحات في النظام. تصنف الكلمات الاولية الى نوعين:

(أ) الكلمات التقنية : (technical terms)

تختلف هذه الكلمات من موضوع الى موضوع آخر، ففي الهندسة بصورة خاصة، كمثال: "النقطة"، "المستقيم"، "التطابق"، "بين"، ربما تعتبر هده الكلمات اولية في النظام المعطى . ومن المحتمل في انظمة اخرى في الهندسة تختار كلمات اولية اخرى. تستعمل الكلمات الاولية في نظام ماكاساس تبنى عليه المصطلحات ولغة النظام. وكل مصطلح جديد يجب ان يعرف اما باستعمال الكلمات الاولية او المصطلحات التي عرفت بدلالتها. لذلك يجب ان توضع قائمة لكلمات اولية في بداية كل نظام.

(ب) الكلمات المنطقية:

مثل "كل"، "الأي"، "بعض"، "يوجد"، "في الاقل واحد"، "في الاكثر واحد"، "فقط"، "واحد"، "اثنان"، وهكذا.

حيث يوجد عدد غير محدد من الكلمات المنطقية، لكن الكلمات التي ذكرت تقع على الاكثر في الرياضيات.

٢-١ البديهيات (Axioms)

كما ان الكلمات الاولية اختيرت كأساس، وبدلالتها تعرف الكلمات الاخرى، فاننا نختار كذلك بعض العبارات البسيطة التي تتعلق بالكلمات الاولية كأساس ومنها نستنتج العبارات الاخرى في النظام. هذه العبارات الاساسية التي نتقبلها بدون برهان تدعى بديهيات والتي هي حجر الاساس للبناء.

ان التعريف القديم للبديهية "هي حقيقة واضحة نتقبلها بدون برهان" غير مقبول في الرياضيات الحديثة، ولو ان الجزء الاخير "نتقبلها بدون برهان" صحيح، غيران الجزء الباقي خطأ. اذ ليس من الضروري ان تكون من الواقع الذي نعيش فيه، حيث توجد بديهيات في بعض الانظمة البدهية تناقض بديهيات انظمة اخرى، كما سنبينها لاحقا.

لقد عرف هلبرت البديهيات في نظامه البدهي للهندسة الاقليدية، بما يلي:

"اذا اخذنا بعض الكلمات لتكون اولية، فان البديهيات هي مجرد فرضيات حول تلك الكلمات الاولية".

ان الكلمات الاولية هي مجرد متغيرات، ولهذا فان البديهيات هي جمل مفتوحة، لانها في هذه الحالة، تحوي على متغيرات وعلى هذا الاساس، فانه لايمكن ان يقال بانها اما صائبة او خاطئة، وعليه فان البديهية لاتحتاج الى برهان.

لكي نضع مجموعة من بديهيات لنظام معين، يجب ان ندرس خواص النظام البدهي التي سنتطرق اليها في الفصل القادم.

اما المبرهنة (Theorem) فهي النتيجة التي نحصل عليها من بديهيات النظام او من عبارات في هذا النظام

مبرهنة سابقا تعتبر كفرضيات.

ان علم الهندسة هو عبارة عن نظام بدهي، لاننا نستخدم مجموعة من بديهيات، تعاريف، ومبرهنات. ان افضل واقرب مثال بالنسبة الينا للنظام البدهي هو الهندسة الاقليدية.

في هذا الفصل سنأخذ امثلة عن انظمة بدهية، التي قسما منها تكون منتهية، اي انها تحتوي على عدد منته من عناصر. نأخذ النقطة والمستقيم لتكون كلمات اولية في الانظمة التالية ولاتوجد خواص اخرى عنهما غير التي ستذكر في البديهيات.

٣-١ المستوى الاسقاطي (Projective Plane)

سنكون مستويا اسقاطيا كمثال على نظام بدهي.
يتكون المستوى الاسقاطي من مجموعة π لكلمات اولية تقنية تدعى نقاط ومجموعات جزئية من π تدعى مستقيمات، والتي هي ايضا غير معرفة. سنرمز لنقاط π بالحروف الكبيرة A,B,C ، ومستقيمات π بالحروف الصغيرة $l,m,n...$ ، فان بديهيات π هي كما يلي.

مجموعة البديهيات

١- اي نقطتين مختلفتين في π يحتويهما مستقيم واحد فقط.

اي ان، اذا كان $A,B\in\pi$ بحيث ان $A\neq B$ و $A,B\in l$ و $A,B\in m$ ، فان $l=m$.

٢ـ كل مستقيم يحتوي على ثلاث نقاط في الاقل.

٣ـ توجد في الاقل نقطة واحدة A ويوجد في الاقل خط واحد l بحيث ان $A \notin l$.

٤ـ اي مستقيمين يشتركان في نقطة واحدة في الاقل.

من هذه البديهيات نستطيع ان نكون تعاريف ومبرهنات جديدة.

مبرهنة ١

اي مستقيمين مختلفين في المستوي الاسقاطي يشتركان في نقطة واحدة فقط.

البرهان

$A,B \in l \wedge A,B \in m$

ليكن m و l مستقيمين مختلفين في π.

m و l مختلفين يعني ان $l \neq m$.

من البديهية ٤ ، توجد نقطة A بحيث ان $A \in l$ و $A \in m$.

نفرض انه توجد نقطة اخرى B تختلف عن A بحيث ان $B \in l$ و $B \in m$.

فانه من البديهية ١، $l=m$. وهذا يناقض الفرض بان $l \neq m$. وبهذا، فان l و m يشتركان في نقطة واحدة فقط.

مبرهنة ٢

اي نقطة في المستوي الاسقاطي هي عنصر لثلاثة خطوط في الاقل.

البرهان

لتكن P اية نقطة في π
من ا لبديهية ٣ ، يوجد مستقيمl ، بحيث ان $P \not\in l$.
كذلك، من البديهية ٢ ، توجد ثلاث نقاط في الاقل على المستقيم l، ولتكن A_1, A_2, A_3.
من البديهية١ ، توجد الخطوط PA_1, PA_2, PA_3 التي تمر من P وتكون مختلفة.

لقد استخدمنا "واحد فقط" في البديهية١ و "في الاقل واحد" في البديهية ٤ . ان "واحد فقط" التي استخدمت في المبرهنة١ تكافيء "في الاقل واحد" و " في الاكثر واحد". فقد برهنا اولا ان المستقيمين يتقاطعان في نقطة واحدة في الاقل، وثانيا ان المستقيمين يتقاطعان في نقطة واحدة في الاكثر، وبذلك يتقاطع المستقيمان في نقطة واحدةفقط.
نعتبر هنا النقطة كعنصر في المجموعة الشاملة π ، والمستقيم هو مجموعة من نقاط اي مجموعة جزئية من المجموعة الشاملة.
بما ان النقطة والمستقيم هما كلمتين اوليتين او متغيرين، فاننا يمكن ان نعوض عن النقطة والمستقيم بما يلي:

"عنصر" و "مجموعة"
"خرزة" و "سلك"
"رجل " و "لجنة"، وهكذا

ان هذا يوضح العلاقة بين العناصر الاولية.

لابد ان نوضح هنا ان العبارة ((اي مستقيم هو مجموعة من نقاط)) لاتعتبر تعريف للمستقيم، لان هنالك مجموعات من نقاط لاتكون مستقيمات، فمثلا: الدائرة، المثلث، وهكذا.

عندما نقول: "النقطة P هي عنصر في المستقيم l" فاننا يمكن ان نقول ايضا: L يمر من L,P يحتوي على P,P على l او P تقع على l.

وعندما تكون النقطة عنصرا لاكثر من مستقيم واحد، وليكن المستقيمين l و m، فانه يمكن ان نقول: l يلتقي مع m في P، او l يقطع m في P.

نلاحظ من مبرهنة ١، ان اي مستقيمين في المستوي الاسقاطي يتقاطعان في نقطة واحدة فقط. بتعبير آخر، لايمكن ان نتكلم عن المستقيمات المتوازية او المستقيمات التي لاتتقاطع. لهذا لايمكن ان تكون هذه المستقيمات في المستوى الاقليدي.

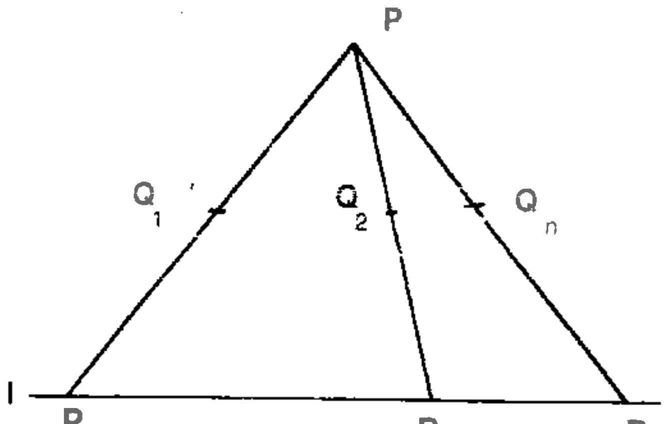
١-٤ مستويات اسقاطية منتهية

مستوى اسقاطي منته هو مجموعة منتهية تحقق البديهيات من ١ الى ٤ . سنناقش الآن بعض النتائج الاساسية لمستويات اسقاطية منتهية.

مبرهنة ٣

اذا وجدت بالضبط n من النقاط على مستقيم لمستوي اسقاطي منته، فان المستوي يحتوي بالضبط على n^2-n+1 من النقاط.

البرهان



شكل (١)

ليكن l مستقيما يحتوي بالضبط على n من النقاط، ولتكن $P_1, P_2, \ldots P_n$.

من البديهية ٣، توجد نقطة P لاتقع على l.

ومن بديهية ١، توجد n من الخطوط المختلفة $PP_1, PP_2, \ldots, PP_n$. ومن بديهية ٢، توجد نقطة ثالثة على كل خط من هذه الخطوط، ولتكن $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$، على التوالي.

نأخذ النقطة Q_1 ونصلها بالنقاط $P_1, P_2, \ldots P_n$.

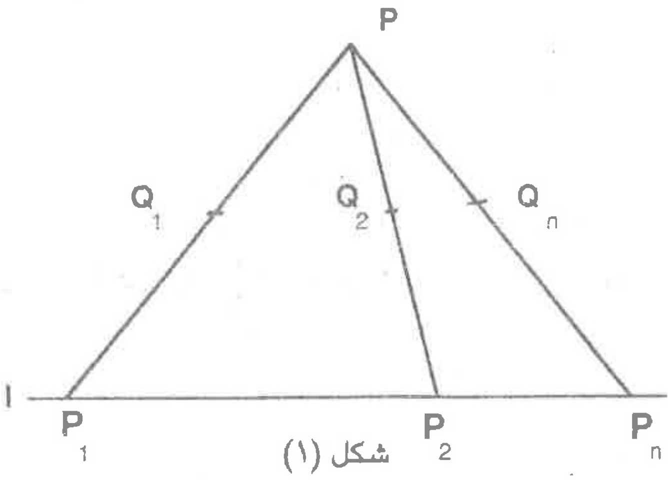
فنحصل على n من الخطوط $Q_1P_1, Q_1P_2, \ldots, Q_1P_n$

هذه الخطوط تقطع PP_2 في n من النقاط المختلفة.

لذلك PP_2 يحتوي على $n-1$ من النقاط عدا P. ان هذا يصح لكل من المستقيمات $PP_1, PP_2, \ldots, PP_n$. وبهذا، n من الخطوط، وكل خط منها يحتوي على $n-1$ من النقاط، ومع النقطة P، يحتوي المستوي على $n(n-1)+1=n^2-n+1$ من النقاط في الاقل.

لكي نبرهن ان المستوي يحتوي على n^2-n+1 من النقاط على الاكثر، نفرض وجود نقطة اخرى Q، لاتقع على اي خط من تلك الخطوط. الخط QP يختلف عن الخطوط

البرهان



شكل (١)

ليكن l مستقيما يحتوي بالضبط على n م
النقاط، ولتكن $P_1, P_2, \dots P_n$.

من البديهية ٣، توجد نقطة P لاتقع على l.

ومن بديهية ١ ، توجد n من الخطوط المختلف
$PP_1, PP_2, \dots, PP_n$. ومن بديهية ٢ ، توجد نقطة ثالثة عـ
كل خط من هذه الخطوط، ولتكن $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ ، عـ
التوالي.

نأخذ النقطة Q_1 ونصلها بالنقاط $P_1, P_2, \dots P_n$.
فنحصل على n من الخطوط $Q_1P_1, Q_1P_2, \dots, Q_1P_n$
هذه الخطوط تقطع PP_2 في n من النقاط المختلفة
لذلك PP_2 يحتوي على n-1 من النقاط عدا P. ان هذ
يصح لكل من المستقيمات $PP_1, PP_2, \dots, PP_n$. وبهذا،
من الخطوط، وكل خط منها يحتوي على n-1 من النقا
ومع النقطة P، يحتوي المستوي على $n(n-1)+1=n^2-n+1$
من النقاط في الاقل.

لكي نبرهن ان المستوي يحتوي على n^2-n+1 مـ
النقاط على الاكثر، نفرض وجود نقطة اخرى Q، لاتقع عـ
اي خط من تلك الخطوط. الخط QP يختلف عن الخطو

المذكورة. من مبرهنة١ ، QP يقطع l في نقطة P_{n+1} التي تختلف عن النقاط $P_1, P_2, \ldots, P_n$. وبهذا يحتوي l على n+1 من النقاط وهذا يخالف الفرض.

بهذا فقد برهنا على ان المستوي يحتوي بالضبط على n^2-n+1 من النقاط.

لقد ذكرنا في هذه المبرهنة على انه اذا كان المستقيم يحتوي على n من النقاط، فان اي مستقيم آخر يحتوي ايضا على n من النقاط، لذلك نستنتج النتيجة التالية.

نتيجة

اذا كان في المستوي الاسقاطي مستقيم يحتوي بالضبط على n من النقاط، فان اي مسقيم آخر يحتوي بالضبط على n من النقاط.

لنا عودة الى المستوي الاسقاطي في الفصل الحادي عشر. سنقدم الان نظاما بدهيا مختلفا يتضمن مفهوم التوازي.

١-٥ المستوى التآلفي *(Affine Plane)*

يتضمن المستوى التآلفي من مجموعة α من كلمات اولية تقنية تدعى نقاط، ومجموعات جزئية من α تدعى مستقيمات، والتي هي ايضا تقنية. سنستعمل نفس الرموز للنقاط والمستقيمات في α كما في المستوي الاسقاطي.

مجموعة البديهيات

١- اي نقطتين مختلفتين A,B في α يحتويهما مستقيم

واحد فقط.

٢ـ كل مستقيم يحتوي على ثلاث نقاط في الاقل.

٣ـ يوجد في الاقل نقطة واحدة A ومستقيم واحد l بحيث $A\notin l$.

٤ـ اذا كان l مستقيما وA نقطة بحيث ان $A\notin l$، فانه يوجد مستقيم واحدفقط m يحتوي A بحيث ان $l\cap m=\phi$.

تعريف ١

يقال لمستقيمين مختلفين انهما متوازيان، اذا كان $l\cap m=\phi$.

من هذا التعريف، يمكن ان نعيد نص بديهية ٤ بالشكل التالي:

((اذا كان l مستقيما وA نقطة بحيث ان $A\notin l$، فانه يوجد مستقيم واحد فقط m يمر من A ويوازيl)).

مبرهنة ٤

اي مستقيمين مختلفين في مستوى تآلفي يشتركان في نقطة واحدة على الاكثر.

البرهان

نفرض ان العبارة خطأ. فيوجد مستقيمان مختلفان l و m يشتركان في نقطتين في الاقل، ولتكن P وQ. ولكن هذا يناقض البديهية١، حيث ان P و Q تقعان على المستقيمين l و m، وان البديهية١ تنص على انه لكل نقطتين معلومتين، يوجد مستقيم واحد فقط يحتويهما. لذلك، فان فرضيتنا تؤدي الى تناقض. وبهذا فان اي

مستقيمين يشتركان في نقطة واحدة على الاكثر. اي ان، اي مستقيمين اما يكونا متوازيين او يتقاطعان في نقطة واحدة فقط.

مبرهنة ٥

اذا قطع مستقيم احد مستقيمين متوازيين، فانه يجب ان يقطع الآخر.

البرهان

ليكن k و l مستقيمين متوازيين، وان m مستقيم آخر يقطع k في نقطة P. يجب ان نبرهن ان m يقطع l في نقطة ما. نفرض ان العبارة خطأ، اي ان m يوازي l، فانه من P سيكون هنالك المستقيمان k و m يوازيان l، وهذا يخالف البديهية ٤ . لذلك، فان الفرض يجب ان يكون خاطئا. وهكذا، اذا قطع خط احد مستقيمين متوازيين، فانه يجب ان يقطع الآخر.

مبرهنة ٦

المستقيمان الموازيان للمستقيم نفسه متوازيان.

البرهان

ليكن k و l مستقيمين متوازيين، و l و m مستقيمين متوازيين. يجب ان نبرهن ان k و m متوازيان. نفرض ان العبارة خطأ. فاذا كان k لايوازي m، فانه يقطع m. ومن المبرهنة٥ ، فان k يجب ان يقطع l، وهذا يناقض الفرض بان k يوازي l. لذلك، فان فرضيتنا

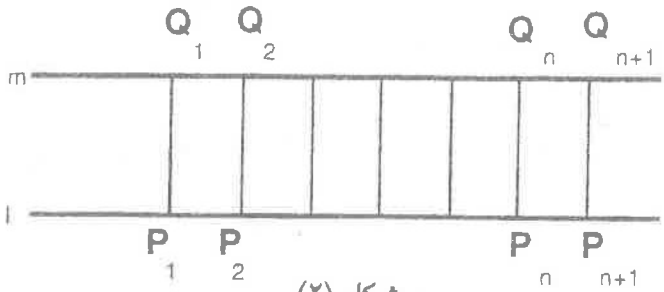
تـؤدي الى تناقض. وعليه، فان المستقيمين الموازيين للمستقيم نفسه متوازيان.

أ-٦ مستويات تآلفية منتهية

مستوي تآلفي منته هو مجموعة منتهية تحقق البديهيات من ١ الى ٤ للمستوى التآلفي.

مبرهنة ٧

اذا وجد مستقيم واحد يحتوي بالضبط على n من النقاط، فان اي مستقيم يوازي l يحتوي بالضبط على n من النقاط.



شكل (٢)

البرهان

نفرض ان l مستقيم يحتوي بالضبط على n من النقاط $P_1, P_2, \dots\dots, P_n$. ليكن m اي مستقيم يوازي l. يجب ان نبرهن ان m يحتوي بالضبط على n من النقاط. من بديهية٢، توجد نقطة Q_1 على m. ومن بديهية١، يوجد المستقيم P_1Q_1. من البديهية٤، توجد بالضبط n-1 من المستقيمات الموازية الى P_1Q_1 من النقاط $P_2, \dots, P_n$ ومن مبرهنة ٦، هذه المستقيمات تكون متوازية ومن المبرهنتين ٤و٥، تقطع هذه المستقيمات المستقيم m في n-1 من النقاط المختلفة، ولتكن $Q_2, \dots, Q_n$ والتي

تختلف عن Q_1 (من تعريف التوازي). من هذا نستنتج على انه توجد على الاقل n من النقاط على m.

لكي نبرهن على وجود على الاكثر n من النقاط على m، نفرض وجود نقطة اخرى، و Q_{n+1} Q_{n+1}، على m. من البديهية ٤، يوجد مستقيم يمر من + Qn ويوازي P_1Q_1.
من المبرهنتين ٤و٥ ، هذا المستقيم يقطع l في نقطة غير النقاط $P_1, , \ldots, P_n$، وهذا يخالف الفرض بان l يحتوي بالضبط على n من النقاط.

لذلك، فانه نتيجة لما تقدم، فان m يحتوي بالضبط على n من النقاط.

مبرهنة ٨

اذا كان اي مستقيم l يحتوي بالضبط على n من النقاط، فانه توجد بالضبط n-1 من المستقيمات الموازية الى l.

البرهان

ليكن l مستقيما يحتوي بالضبط على n من النقاط، ولتكن $P_1, P_2, \ldots, P_n$. ولتكن P نقطة لاتقع على l (بديهية٣).

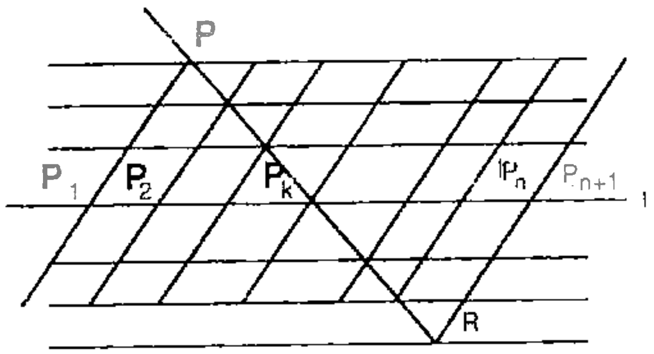
من بديهية ١ ، يوجد المستقيمان PP_1, PP_k (حيث P_k هي اي نقطة من النقاط $P_2, , \ldots, P_n$).

من بديهية٤ ، يوجد بالضبط n-1 من المستقيمات الموازية الى PP_1 والتي تمر من النقاط $P_2, P_3, \ldots, P_n$ (احدهما سيمر بالنقطة P_k). من المبرهنتين ٤و٥ المستقيم PP_k الذي يقطع PP_1 والمستقيم الموازي له من P_k، يجب ان يقطع كل من الخطوط الاخرى الموازية الى PP_1 في نقطة واحدة فقط. لذلك، عدد نقاط التقاطع هذه

عبر PP_k تكون بالضبط n من النقاط.

من البديهية٤ ومبرهنة٤ ، يوجد بالضبط n-1 من المستقيمات الموازية الى l من n من النقاط على الخط PP_k عدا P_k (حيث ان P_k تقع على l).

نفرض على انه يوجد موازي آخر الى l، ومن المبرهنتين ٤و٥ هذا المستقيم سيقطع PP_k في نقطةR التي تختلف عن نقاط تقاطعه مع PP_1 والمستقيمات الموازية له. ومن البديهية٤ ، يوجد موازي من R الى PP1. ومن المبرهنتين ٤و٥ سيقطع هذا الموازي المستقيم l في نقطة P_{n+1} التي تختلف عن النقاط $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ وهذا يناقض الفرض بان l يحتوي بالضبط على n من النقاط.



شكل (٣)

مبرهنة ٩

اذا وجد مستقيم واحد يحتوي بالضبط على n من النقاط، فان اي مستقيم يحتوي بالضبط على n من النقاط.

البرهان

ليكن l مستقيما يحتوي بالضبط على n من النقاط. وليكن m اي مستقيم آخر. يجب ان نبرهن ان m يحتوي بالضبط على n من النقاط. اما m يقطع l، او لايقطعه.

اذا لم يقطع l، فمن المبرهنة ٧،يحتوي m بالضبط على n من النقاط.

نفرض ان m يقطع l في نقطة، ولتكن P.

من المبرهنة ٨ ، يوجد بالضبط $n-1$ من المستقيمات الموازية الى l.

من المبرهنتين ٤و٥ ، m يقطع l والمستقيمات الموازية له في n من النقاط (من ضمنها P).

نفرض وجود نقطة اخرى على m.

من البديهية٤ ، يوجد موازي آخر الى l من هذه النقطة، ولكن هذا يخالف المبرهنة٨ لذلك، فان m يحتوي بالضبط على n من النقاط.

تمارين ١-١

١- في المستوى التآلفي، اذا وجد مستقيم واحد يحتوي بالضبط على n من النقاط، برهن كلا مما يلي:

أ) اي نقطة يمر بها بالضبط $n+1$ من المستقيمات

ب) يوجد بالضبط n^2 من النقاط في النظام.

ج) يوجد بالضبط $n(n+1)$ من المستقيمات في النظام.

٢- في المستوي الاسقاطي، اذا وجد مستقيم واحد يحتوي بالضبط على n من النقاط، برهن كلا مما يلي:

(أ) اي مستقيم في النظام يحتوي بالضبط على n من النقاط.

(ب) اي نقطة في النظام يمر بها بالضبط n من المستقيمات.

(ج) يوجد بالضبط n^2-n+1 من المستقيمات في النظام.

١-٧ نظاما يونك وفانو The Systems of Young and Fano

نظام يونك

اذا اضفنا البديهية التالية الى مجموعة بديهيات المستوى التالفي، سنحصل على نظام يونك.

البديهية:٥ اذا كان l مستقيما، فانه توجد على الاكثر ثلاث نقاط تقع على l.

ان بديهية ٢ مع هذه البديهية تجعل هذا النظام هندسة منتهية، حيث ان الخط فيه يحتوي على ثلاث نقاط فقط وفي هذه الحالة يكون عدد النقاط والمستقيمات في هذا النظام منتهيا، كما سنوضح في المبرهنات التالية التي ستترك براهينها كتمارين (لاحظ تمارين ١-١).

مبرهنة ١٠

يحتوي النظام على تسع نقاط فقط.

مبرهنة ١١

يحتوي النظام على اثني عشر مستقيم فقط.

مبرهنة ١٢

اية نقطة يمر بها اربعة مستقيمات فقط.

نظام فانو

اذا اضفنا البديهية ٥ الى المستوى الاسقاطي، سنحصل على نظام فانو. ان نظام فانو منته ايضا حيث ان المستقيم فيه يحتوي على ثلاث نقاط فقط وعدد النقاط والخطوط فيه منته ايضا، كما في المبرهنات التالية:

مبرهنة ١٣

يحتوي نظام فانو على سبع نقاط فقط.

مبرهنة ١٤

يحتوي نظام فانو على سبعة مستقيمات فقط.

مبرهنة ١٥

اي نقطة يمر بها بالضبط ثلاثة مستقيمات.

الفصل الثاني
خواص النظام البدهي

توجد ثلاثة مفاهيم مهمة ترافق عادة اي نظام بدهي: الاتساق؛ الاستقلالية، والتمامية سنأخذ الانظمة البدهية التي قدمت في الفصل الاول كأمثلة لدراسة هذه المفاهيم.

٢-١ الاتساق Consistency

قبل ان نقدم تعريف الاتساق، نذكر نص قانوني المنطق التاليين ليعتبران كاساس لدراستنا هذه.

قانون التناقض

لاتوجد عبارة يمكن ان تكون صائبة وخاطئة معا.

قانون الوسط الاستثنائي

اية عبارة اما تكون صائبة او خاطئة.

ففي القانون الاول، اذا كانت P عبارة، فان قولنا "P و ~P" لايؤدي فقط الى عبارة خاطئة، ولكن قولنا هذا لامعنى له. لذلك، فاننا لانسمح ابدا لاية عبارتين لنظام بدهي ان تكونا بالشكل "P و ~P"!

تعريف ١

يكون النظام البدهي متسقا اذا وفقط اذا لاتوجد في النظام اي بديهيتين، او اي بديهية ومبرهنة، او اي مبرهنتين بالشكل"P و P ¯".
نستنتج من هذا التعريف ان الاتساق هو صفة اساسية لاي نظام بدهي، اي انه في اي نظام بدهي لايوجد تناقض بين اي بديهيتين، اي بديهية ومبرهنة، او اي مبرهنتين. ذلك من الواضح ان النظام الذي تكون فيه عبارة ما ونفيها صحيحا يكون نظاما لامعنى له.
والان كيف نختبر اتساق نظام ما؟ هل نتأكد من جميع المبرهنات؟ اذ من المحتمل وجود مبرهنات لم نتوصل اليها بعد، على كل حال، توجد طريقة اختبار اتخذت لهذا الغرض.

تعريف ٢

*تفسير نظام بدهي هو اعطاء معاني للكلمات الاولية التقنية بطريقة بحيث تصبح البديهيات اما صائبة او خاطئة.

تعريف ٣

يقال للتفسير الذي يجعل كل بديهية في مجموعة من بديهيات صائبة بانه نموذج(a model).

طريقة اختبار الاتساق

اذا وجد نموذج لمجموعة من بديهيات، فان

المجموعة تكون متسقة.

اذا وجد نموذج لمجموعة من بديهيات، فان جميع البديهيات في النظام تكون عبارات صحيحة. وبما ان المبرهنات تستنتج من البديهيات، فان المبرهنات تصبح عبارات صحيحة. ان فكرة النموذج هي مهمة جدا في المفهوم الذي يعطي معنى فيزياويا للكلمات الاولية وكذلك يبين على انه يوجد شيء ما من الحقيقة. طالما الغرض من النظام المنطقي هو لايجاد الحقيقة.

٢-٢ نماذج عن الاتساق

نقدم فيما يلي نماذج تبين ان المستوي التآلفي هو نظام متسق.

نموذج (١)

نفرض ان كلية التربية قد كرمت الثلاثة الاوائل في كل من المراحل: الثانية، الثالثة، والرابعة، وتقرر ايفادهم الى تسع دول لغرض الاطلاع. وقسمت اللجان الى مجموعات مكونة من ثلاثة اعضاء، بحيث ان طالبا واحدا من كل مرحلة في لجنة. وان كل لجنة من اللجان الثلاثة تقضي اسبوعا واحدا في دولة، ثم يعاد تشكيل اللجان وبطريقة انه لايشترك طالبان في لجنتين معا. ثم تقضي اللجان الجديدة اسبوعا واحدا في ثلاث دول اخرى (اي ان كل لجنة في دولة واحدة). وهكذا من اجل التوضيح، ان توزيع اللجان سيكون كما يلي:

طلبة المرحلة الثانية: A, B, C
طلبة المرحلة الثالثة: D, E, F
طلبة المرحلة الرابعة: G, H, I
مصر: A, D, G
الاردن: B, E, H
اليمن: C, F, I
السودان: A, E, I
الجزائر: B, F, G
تونس: C, D, H
المغرب: A, F, H
ايطاليا: B, D, I
فرنسا: C, E, G

في هذا النموذج، نفسر "النقاط" على انها طلاب "والمستقيمات" باللجان، والعلاقة "ينتمي الى" بعضو في. يبين هذا التفسير انه نموذج لمجموعة بديهيات المستوى التآلفي، لان جميع البديهيات قد تحققت وبنفس الطريقة، تبين النماذج الثلاثة التالية ان المستوى التآلفي هو نظام متسق:

نموذج (٢)

(٩نقاط، ١٢مستقيم)

1	1	1	1	2	2	2	3	3	4	4	6
2	3	5	7	3	5	7	4	5	5	7	8
4	6	8	9	9	6	8	8	7	9	6	9

في هذا النموذج "النقاط" هي اعداد "والمستقيمات" هي

اعمدة من اعداد.

نموذج (٣)

(١٦نقطة، ٢٠مستقيم)

1	5	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	9	10
2	6	5	6	7	8	5	6	7	8	5	6	7	8	5	6	7	8	11	12
3	7	9	10	11	12	10	11	12	9	11	15	9	13	14	9	13	10	14	13
4	8	13	14	15	16	16	13	14	15	12	16	10	14	15	12	16	11	16	15

نموذج (٤)

الهندسة الاقليدية الاعتيادية.

حيث ان الهندسة الاقليدية تعتبرنموذجايتحقق فيه كل بديهيات المستوى التالفي

نأخذ الآن نماذج اخرى تبين اتساق المستوى الاسقاطي.

نموذج (٥)

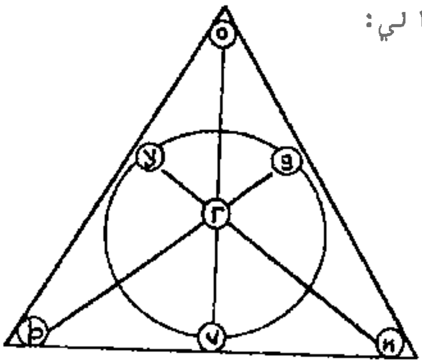
نفرض ان الهيئة التدريسية في قسم الرياضيات في كلية التربية تتكون من سبعة اعضاء. وان القسم قد قرر تأليف لجان لوضع مناهج في مواضيع معينة في الرياضيات. لقد اتفق على ان تتألف كل لجنة من ثلاثة اعضاء، بحيث لايشترك اثنان في لجنتين معا وبالشكل التالي:

اللجان	الاعضاء
الهندسية	A, B, C
التفاضل	B, D, F
التبولوجي	C, D, E
التحليل الرياضي	D, A, G
الجبر الخطي	E, A, F
المعادلات التفاضلية	F, G, C
اسس الرياضيات	G, E, B

في هذا النموذج نفسر "النقاط" بالاعضاء والمستقيمات باللجان المذكورة اعلاه. ان كل بديهية في المستوى الاسقاطي متحققة بهذا النموذج، وبنفس الطريقة بالنسبة للنماذج الثلاثة التالية:

نموذج (٦)

يقوم صاحب محل صياغة بصنع حلية مكونة من سبع خرزات مختلفة الالوان. وقد ربطها بسبعة اسلاك بحيث انه توجد ثلاث خرزات في كل سلك وثلاثة اسلاك في كل خرزة. الالوان: الاصفر، الاحمر، البرتقالي، الابيض، البنفسجي، السماوي، والاخضر. ان الحلية بدت كما في الشكل التالي:



شكل (٤)

في هذا النموذج نفسر "النقطة" على انها خرزة "والمستقيم" بسلك. وقد رتبت الاسلاك والخرزات كما يلي:

$w_1=\{b,y,o\}$, $w_2=\{w,g,o\}$ $w_3=\{w,y,r\}$, $w_4=\{b,g,r\}$,

$w_5=\{w,b,v\}$, $w_6=\{y,g,v\}$, $w_7=\{o,r,v\}$

نموذج (٧)

(٧ نقاط، ٧ مستقيمات)

1	1	1	2	2	3	3
2	4	6	4	5	4	5
3	5	7	7	6	6	7

نفسر"النقطة" بعدد والمستقيم بعمود.

نموذج (٨)

(١٣ نقطة، ١٣ مستقيم)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	1
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	1	2	3
10	11	12	13	1	2	3	4	5	6	7	8	9

نفسر"النقطة" بعدد "والمستقيم" بعمود.

من الواضح ان النموذجين (١)و(٢) يبينان ان نظام يونك متسق، بينما النماذج ٥ ، ٦ و٧ تبين ان

نظـام فـانـو متسـق.

ليس من الضـروري ان نـأخـذ جميع هذه النماذج لبيان ان نظامـا مـا متسـق، كل مـانحتاجه هو نموذج واحد على الاقل. على كل حال، سـنجد اسـتعمالات اخرى لبعض من هذه النمـاذج نـذكرهـا فيمـا بعد.

يجب ان نلاحظ ان نموذجـا عن المسـتوي التآلفي يمكن نحصل عنيه من نموذج لمستوي اسقاطي وذلك بحذف مستقيم واحد . وبالعكس، يمكن ان نحصل على نموذج لمستوى اسـقـاطي من نمـوذج لمسـتوى تآلفـي وذلك باضـافة مستقيم واحد. (تأكد من ذلك).

٣-٢ الاستقلال Independence

بعد اختيـارنـا لمجموعـة من بديهيات واختبارنـا اتسـاقـهـا، يتبـادر الى الاذهان فيمـا اذا كانت احدى البديـهيات مشتقـة من البديـهيات الاخرى في المجموعة، او بتعبير آخر، كيـف نـعـرف ان بديهية ما هي ليست مبرهنة؟ فالاسقلالية تعني انه لاتوجد بديهية في النظام يمكن برهنتها من بقية البديهيات في النظام. امـا اذا امكن استنتاج بديهية ما من بقية البديـهيات، ففي هذه الحالة يمكن اعتبارها كمبرهنـة، لكي نختبر. استقلال بديـهية مـا في مجموعـة من بديـهيـات، نـأخذ التعريف التالي:

تعريف ٤

يقـال عن عبـارة انـهـا مسـتقلة في مجموعـة من عبارات اذا لـم نـتمكن من اشتقاقهـا من بقـية العبارات في المجموعـة. كمـا فـي حـالـة الاتسـاق، توجد طريقـة

لاختبار الاستقلال.

طريقة الاختبار

اذا كانت مجموعة بديهيات متسقة وعندما العبارة المراد اختبارها تبدل بنفيها، فيوجد نموذج للمجموعة الجديدة، فان العبارة المراد اختبارها تكون مستقلة.

ذلك يعني، اذا كان

١) مجموعة البديهيات $A_1,\dots,A_i,\dots,A_n$ مجموعة متسقة.

٢) المجموعة $A_1,\dots,\sim A_i,\dots,A_n$ مجموعة متسقة، فان A_i تكون مستقلة

حيث اذا كانت المجموعة $A_1,\dots,A_i,\dots,A_n$ متسقةو A_i مبرهنة، فانه يمكن استنتاجها من البديهيات الاخرى، وفي هذه الحالة نقيض A_i سوية مع البديهيات الاخرى لايمكن ان تكون المجموعة متسقة، اي انه لايوجد نموذج لمثل هذه المجموعة من العبارات.

والان نبين ان كل بديهية في المستوى التآلفي مستقلة.

استقلال البديهية ١

ليكن $l=\{1,2,3\}$ ، $m=\{4,5,6\}$

ان هذا التفسير يتكون من مجموعتين كمستقيمين وستة عناصر كنقاط. بالتأكيد هذا التفسير يحقق نفي بديهية١ ، لان النقطتين 1 و 4 على سبيل المثال، لايوجد مستقيم يحتويهما. الاختبار الدقيق يبين ان البديهيات الباقية متحققة، وبما ان المستوي التآلفي متسق، اي ان الشرطين (١)و(٢) يتحققان، في هذه

الحالة يتبين ان البديهية ١ مستقلة.

اما النموذج التالي (٦ نقاط، ١٠ مستقيمات) يحقق ايضا نفي بديهية ١ ، حيث يوجد مستقيمان، كمثال {1,2,3} ,{1,3,4} يحتويان 1 و 3

1	2	1	2	2	1	3	1	1	4
3	5	5	3	3	4	5	2	2	5
4	6	6	4	5	6	6	4	3	6

وبنفس الطريقة نبين ان جميع البديهيات الباقية مستقلة

استقلال البديهية ٢

(٤ نقاط، ٦ مستقيمات)

1	3	1	2	1	2
2	4	3	4	4	3

استقلال البديهية ٣

(٤ نقاط، مستقيم واحد)

l={1,2,3,4}

استقلال البديهية ٤

نأخذ اي نموذج لاتساق المستوي الاسقاطي، اي النماذج ٥ ، ٦ ، ٧ او ٨ التي ذكرت في موضوع الاتساق.

ففي تلك النماذج، اي مستقيمين يتقاطعان، لذلك

لاتوجد خطوط متوازية، اما في النموذج التالي، فانه توجد مستقيمات يوازيها اكثر من مستقيم واحد من نقاط خارجة عنها

النموذج

(١٩ نقطة، ٢٩ مستقيم)

1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3
2	5	6	7	8	12	5	6	7	8	11	5	6	7	8
3	9	16	14	10	15	16	10	12	9	13	12	9	11	17
4	13	11	19	18	17	18	14		15	19	14	19	15	13
							17						18	

3	4	4	4	4	4	5	5	6	7	8	9	13	17
10	5	6	7	8	9	6	10	12	9	11	10	14	18
16	11	15	10	12	14	7	15	18	16	14	11	15	19
	17		13	16	18	8	19	18	17		12	16	
				19									

وبالنتيجة، لابد ان نشير هنا الى ان الاستقلالية هي غير اساسية، حيث اذا وجدت احدى البديهيات غير مستقلة، اي انها مبرهنة، فبدلا من ان توضع في مجموعة البديهيات، توضع في مجموعة المبرهنات. اما بالنسبة الى استقلال بديهيات المستوي الاسقاطي فتترك كتمرين.

تمارين ٢-٣

١- مما يلي اختار نماذج مبينا استقلال كل بديهية في المستوى الاسقاطي

التفسيرات:

أ)

7	4	3	3	3	2	2	2	1	1	1	1
8	5	6	5	4	6	5	4	6	5	4	2
9	6	7	9	8	9	8	7	8	7	9	3

ب) $l=\{1,2,3\}, m=\{1,4,5,6\}$

ج)

2	1	1	1
3	3	2	

د)

2	1	1
3	2	2
4	4	3

هـ) $l=\{1,2,3,4\}$

و)

7	6	5	4	3	2	1
1	7	6	5	4	3	2
3	2	1	7	6	5	4

ز) نقطة واحدة، لايوجد مستقيم

ح) $l=\{1,2,3\}, m=\{1,4,5\}$

ط) l={1,2,3}, m={4,5,6}

ي) l={1,2}, m={1,3}, n={2,3}

ك)

1	4	1	2	1	2	1	2
2	5	3	5	3	4	3	5
3	6	4	6	5	6	6	4

ل) l={1,2,3}, m={1,2,4}, k={2,3,4} و n = {1, 3, 4}

٢- لاحظ النظام البدهي التالي:

مجموعة البديهيات

١- اي مستقيمين مختلفين يتقاطعان في نقطة واحدة فقط.

٢- كل نقطة يمر بها مستقيمان فقط.

٣- توجد بالضبط أربعة مستقيمات في هذا النظام.

أ) بين ان النظام متسق.

ب) حاول ايجاد نماذج لاستقلال كل بديهية في هذا النظام.

جـ) برهن على ان كل مستقيم في هذا النظام يحتوي على ثلاث نقاط فقط.

٢-٤ التمام Completeneess

ابة عبارة تتعلق بالكلمات الاولية في نظام معين

وان لم تكن بديهية فاما هي او نفيها تكون مبرهنة في النظام. فلو كان بالامكان اثبات صدقها، فانها مبرهنة، واذا ثبت خطئها، فان نفيها يكون مبرهنة.

اما اذا وجدت عبارة ليس بالامكان اثباتها او دحضها بواسطة البديهيات وذلك لعدم كفاية البديهيات، ففي هذه الحالة يمكن اضافة عدد آخر اليها لتكون كافية لاثبات العبارة او نفيها.

تعريف ٥

يكون النظام البدهي غير تام اذا امكن اضافة بديهية مستقلة. اما اذا لم نتمكن من اضافة مثل هذه البديهية، فان النظام يكون تاما.

تكون البديهيات في النظام التام كافية لاثبات او دحض اية عبارة. ولكن هل من الممكن معرفة متى يكون النظام تاما؟ قبل ان نأخذ طريقة الاختبار، علينا ان نقدم مفاهيم جديدة ومهمة في الرياضيات.

ليكن M_1,M_2 نموذجين لنظام معين يحتويان على عدد متساو من العناصر. ان كل عنصر في M_1 يقابل عنصرا معينا في M_2 وبالعكس، في هذه الحالة، يقال انه يوجد تناظر متباين (تقابل-احادي) بين M_1,M_2.

يقال عن هذا التقابل الاحادي بين عناصر M_1,M_2 انه يحفظ العلاقات (preserve relations) اذا كانت كل عبارة صحيحة حول عناصر M_1 هي ايضا صحيحة حول العناصر المقابلة لها في M_2.

تعريف ٦

يقال عن نموذجين لنظام بدهي انهما متشاكلين تقابليا (isomorphic) بالنسبة الى ذلك النظام اذا

وجد على الاقل تقابل آحادي واحد بين عناصر النظام بحيث يحفظ العلاقات.

تعريف ٧

عندما يكون اي نموذجين في النظام البدهي متشاكلين تقابليا، فان النظام يقال انه فصيلي (Categorical).

طريقة الاختبار

اذا كان النظام فصيليا، فانه يكون تاما. اي انه بتعبير آخر، عندما يكون اي نموذجين في النظام متشاكلين تقابليا، فان النظام يكون تاما.

البرهان

نفرض ان نظاما بدهيا يكون فصيلي، لكنه غير تام. اذا لم يكن تاما، فانه يمكن اضافة بديهية مستقلة ولتكن A_n الى مجموعة من بديهيات النظام $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ بما ان A_n بديهية مستقلة، فان:

١) المجموعة $A_1, A_2, \dots, A_n$ تكون متسقة

٢) المجموعة $A_1, A_2, \dots, \sim A_n$ تكون متسقة لذلك، فانه يوجد نموذجان للمجموعتين ١)و٢).

بما ان النظام فصيلي، فان هذين النموذجين يكونان متشاكلين تقابليا، لذلك، فالعبارات المتناظرة في النموذجين اما كل منهما صائبة او كل منهما خاطئة. وهذا غير ممكن، حيث انه من الفرض "A_n" تكون صائبة في نموذج وتكون "$\sim A_n$" صائبة في النموذج

الاخر. لذلك يؤدي هذا الفرض الى خطأ، وبهذا، اذا كان النظام فصيليا، فانه يكون تاما.

ان النموذجين(٧)و(٨) في المستوى الاسقاطي غير متشاكلين تقابليا لانهما لايحتويان على نفس العدد من العناصر، فيكون المستوى الاسقاطي غير تاما. وكذلك فالمستوى التآلفي يكون غير تاما لان النموذجين (١) و (٣) لايحتويان على نفس العدد من العناصر، اي انهما غير متشاكلين تقابليا. بينما نظام يونك يكون تاماً لانه يتحقق فقط بالنموذج المكون من ٩ نقاط و١٢ خط. كذلك نظام فانو يكون تاما لانه يتحقق فقط بالنموذج المكون من ٧ نقاط و٧ خطوط. حيث ان اي نموذجين في نظام يونك او نظام فانو يحتويان على نفس العناصر، حيث يرمز برموز مختلفة لنفس العناصر.

وبالنتيجة، لابد ان نشير هنا الى ان التمامية هي خاصية ليست اساسية وبصورة عامة غير مفضلة.

في الفصل الحادي العشر، سندرس الهندسة الاسقاطية مع البديهيات الاربعة، وسنضيف بديهيات اكثر لكي تكون مجموعة البديهيات تامة.

امثلة

نأخذ النموذجين (١)و(٢) في المستوي التآلفي

نموذج (١)

$\underline{a}$	$\underline{b}$	$\underline{c}$	$\underline{d}$	$\underline{e}$	$\underline{f}$	$\underline{g}$	$\underline{h}$	$\underline{i}$	$\underline{j}$	$\underline{k}$	$\underline{l}$
A	D	G	A	B	C	A	B	C	A	B	C
B	E	H	D	E	F	E	F	D	F	D	E
C	F	I	G	H	I	I	G	H	H	I	G

نموذج (٢)

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
1	1	1	1	2	2	2	3	3	4	4	6
2	3	5	7	3	5	7	4	5	5	7	8
4	6	8	9	9	6	8	8	7	9	6	9

هناك مئات من الطرق لوضع تقابل احادي بين النموذجين، نأخذ التقابل التالي:

$A \Leftrightarrow 1$
$B \Leftrightarrow 2$
$C \Leftrightarrow 3$
$D \Leftrightarrow 4$
$E \Leftrightarrow 5$
$F \Leftrightarrow 7$
$G \Leftrightarrow 8$
$H \Leftrightarrow 6$
$I \Leftrightarrow 9$

من اجل ايجاد تقابل احادي بين المستقيمات، يجب ان يكون التقابل بطريقة بحيث يحفظ العلاقات، فمثلا، بما ان A, B, C تقع على المستقيم a، يجب ان نتأكد من وجود مستقيم في النموذج (٢) يحتوي على العناصر المقابلة لهذه النقاط، اي انه، يوجد مستقيم يحتوي على النقاط 1, 2, 3, لكنه لايوجد مثل هذا المستقيم في النموذج (٢)، لذلك، لايكون هذا التقابل يحفظ العلاقات.

والان لو اخذنا التقابل التالي:

$A \Leftrightarrow 1$
$B \Leftrightarrow 2$
$C \Leftrightarrow 4$
$D \Leftrightarrow 5$
$E \Leftrightarrow 3$
$F \Leftrightarrow 7$
$G \Leftrightarrow 8$
$H \Leftrightarrow 9$
$I \Leftrightarrow 6$

وكذلك يوجد تقابل بين المستقيمات بحيث يحفظ العلاقات. فمثلا بما ان A, B, C تقع على المستقيم a، فيجب ان يكون هناك مستقيم يناظره a يحتوي على النقاط 1, 2, 4, وهكذا يوجد تناظر بالنسبة لبقية المستقيمات كما نبينها الان:

$a \Leftrightarrow a^*$ $\quad$ $g \Leftrightarrow b^*$

$b \Leftrightarrow i^*$ $\quad$ $h \Leftrightarrow g^*$

$c \Leftrightarrow l^*$ $\quad$ $i \Leftrightarrow j^*$

$d \Leftrightarrow c^*$ $\quad$ $j \Leftrightarrow d^*$

$e \Leftrightarrow e^*$ $\quad$ $k \Leftrightarrow f^*$

$f \Leftrightarrow k^*$ $\quad$ $l \Leftrightarrow h^*$

ان النموذجين يكونان في هذه الحالة متشاكلين.
لذلك لبيان ان نموذجين متشاكلان. فاننا نحتاج الى تقابل واحد بحيث يحفظ العلاقات.

تمارين ٢-٤

١- نفرض ان مايلي هو نموذج للمستوى التآلفي. جد

تقابل احادي يحفظ العلاقات بينه وبين النموذج(٢).

1	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	5
2	4	6	8	4	5	7	4	5	6	7	6
3	5	7	9	6	8	9	9	7	8	8	9

٢- جد تقابل احادي يحفظ العلاقات بين:
أ) النموذج (٥) والنموذج (٦) في المستوي الاسقاطي.
ب) النموذج (١) للمستوي التآلفي مع نفسه.
جـ) النموذج (٧) للمستوي الاسقاطي مع نفسه.

٣- هل تستطيع ايجاد تقابل احادي لايحفظ العلاقات بين:
أ) النموذج(٥) والنموذج(٦) للمستوي الاسقاطي.
ب) النموذج(١) والنموذج(٢) للمستوي التالفي.

الفصل الرابع
اسس الهندسة

قدم عالم الرياضيات الالماني دافيد هلبرت (١٨٦٢ ـ ١٩٤٣) نظاما بدهيا متكاملا الذي منه نستنتج الهندسة الاقليدية. لقد صحح الاخطاء والعيوب التي رافقت اعمال اقليدس. توجد طرق بديهية اخرى تؤدي الى هذه الهندسة،' لكننا سنأخذ نظام هلبرت لاسلوبه البسيط والواضح.

نبتدأ نظامنا هذا بكلمات اولية تقنية تدعى نقاط التي يرمز لها بالرموز .... ,A, B, C ومستقيمات يرمز لها بالرموز ... l, m, n,

٤-١ بديهيات الوقوع والوجود

بديهية ١

لكل نقطتين مختلفتين معلومتين، يوجد مستقيم واحد فقط يحتويهما.

بديهية ٢

كل مستقيم يحتوي على نقطتين في الاقل.

بديهية ٣

لكل مستقيم معلوم، توجد في الاقل نقطة واحدة

لاتنتمي اليه.

بديهية ٤

يوجد في الاقل مستقيم واحد.

يتبين لنا من البديهيات اعلاه ان المستقيم هو مجموعة من نقاط. غير ان هذا لايعتبر تعريف للمستقيم لأن اي شكل في الهندسة هو مجموعة من نقاط، لكن هذا يوضح العلاقة بين النقطة والمستقيم ويساعدنا بتوضيح ماذا نعني بالمستقيمات المتساوية او المختلفة، حيث تساعد دراستنا للمجموعات بتوضيح هذه المفاهيم. للنقاط، الكلمة مختلفة تؤخذ ككلمة اولية منطقية كبقية الكلمات المنطقية.

تعريف ١

تكون المجموعتان متساويتين اذا وفقط اذا احتوتا بالضبط على نفس العناصر.

مبرهنة ١

توجد في الاقل ثلاث نقاط في النظام.

البرهان

يستنتج مباشرة من البديهيات ٤، ٣، ٢.

مبرهنة ٢

اي مستقيمين مختلفين يشتركان في نقطة واحدة على الاكثر.

البرهان

يترك كتمرين

يمكن ان يعبر عن البديهية ١ بقولنا ان الخط يتعين بنقطتين. والخط الذي يتعين بالنقطتين A و B، يرمز له بالرمز AB او BA.

وفي بعض الاحيان يرمز للخطوط بالحروف الصغيرة $k, l, m, \ldots$

٤-١ تمارين

١- برهن على ان لكل نقطة يوجد في الاقل مستقيمان يمران بها.

٢- برهن على انه يوجد في الاقل مستقيم واحد لايمر من نقطة معلومة.

٣- اذا كانت C نقطة على AB، وتختلف عن A و B، فان $CA = BC = AB$

٤- اذا كان $AB = AC$ و $B \neq C$ فان $AB = BC$.

٤-٢ بديهيات الترتيب *axioms of order*

ان بديهيات الوقوع والوجود ليست كافية لاشتقاق بعض المبرهنات المعروفة في الهندسة الاقليدية وليست كافية لوجود اكثر من نقطتين على خط ولاوجود

عدد غير منته من النقاط على الخط، ولاتضمن وجود عدد غير منته من النقاط بين اي نقطتين، ولايمكن ان نتكلم عن نقطة بين نقطتين، ولايمكن ان نتكلم عن قطعة مستقيم او المقارنة بين القطع فايهما الاكبر او الاصغر. كل هذا يأتي من العلاقة "بين". فقد اهمل اقليدس هذه العلاقة في بديهياته، لكنه استنتجها من الرسم. لكن هذا لايعني اننا لانستخدم الرسم، غير انه لايكون جزءا من البرهان.

قاعدة لغوية

"بين" هي كلمة اولية تقنية. ويرمز للعبارة: "B تقع بين A و C" بالرمز : A-B-C

مجموعة البديهيات

بديهية ٥

A-B-C اذا وفقط اذا C-B-A

بديهية ٦

اذا كان A-B-C، فان النقاط A,B,C مختلفة وتقع على مستقيم واحد.

بديهية ٧

اذا كانت A, B, C اي ثلاث نقاط مختلفة وتقع على مستقيم واحد، فان واحدة فقط مما يلي تتحقق:

A-B-C ،B-C-A ،C-A-B

رمز

الرمز A-B-C-D هو مختصر الى: A-B-C، و A-B-D، و A-C-D، و B-C-D

وبنفس الطريقة بالنسبة لاكثر من اربع نقاط.

بديهية ٨

اذا كانت A, B, C, D اربع نقاط مختلفة وعلى مستقيم واحد وان A-B-C فان واحدة فقط مما يلي تتحقق:

A-B-C-D ،A-B-D-C ،A-D-B-C ،D-A-B-C

بديهية ٩

اذا كانت A و B اي نقطتين، فان:

(أ) توجد نقطة C بحيث ان A-B-C

(ب) توجد نقطة D بحيث ان A-D-B

(جـ) توجد نقطة E بحيث ان E-A-B

مبرهنة ٢

(أ) اذا كان A-B-C و A-C-D، فان النقاط A, B, C, D مختلفة وعلى مستقيم واحد.

(ب) اذا كان A-B-D وB-C-D، فان النقاط A,B,C,D مختلفة وعلى مستقيم واحد.

(جـ) اذا كان A-B-C وB-C-D، فان النقاط A, B, C, D مختلفة وعلى مستقيم واحد.

البرهان

سنبرهن فرع (أ) ونترك الباقي كتمرين.

فرع (أ)

من بديهية ٦، بما ان A-B-C، فان النقاط A, B, C مختلفة وعلى مستقيم واحد. وكذلك بما ان A-C-D، فان النقاط A, C, D مختلفة وعلى مستقيم واحد.
اذا كان B = D، فانه بتعويض ذلك في A-C-D، يؤدي الى ان A-C-B، ولكن من الفرض A-B-C، وهذا يناقض بديهية ٧. لذلك، فان النقاط A, B, C, D تكون مختلفة. من البديهية ١، يوجد مستقيم واحد فقط يتعين من A و C. بما ان B و D تقعان على المستقيم AC، فان A, B, C, D تقع على مستقيم واحد.

نلاحظ ان A-B-C-D يؤدي الى A-B-C و A-C-D. هل ان العكس صحيح؟ اي هل ان B بين A و D او C بين B و D؟ بالطبع هذا مانريده وسنبرهنه في المبرهنة التالية:

مبرهنة ٤

(أ) اذا كان A-B-C و A-C-D، فان A-B-C-D.
(ب) اذا كان A-B-D و B-C-D، فان A-B-C-D.
(ج) اذا كان A-B-C و B-C-D، فان A-B-C-D.

البرهان

سنبرهن فرع (أ) ونترك الباقي كتمرين.

فرع (أ)

من مبرهنة ٣، A-B-C و A-C-D ⟵ A, B, C, D مختلفة وعلى استقامة واحدة. وبما ان A-B-C، فانه من بديهية ٨، تتحقق واحدة فقط مما يلي:

D-A-B-C، A-D-B-C، A-B-D-C، A-B-C-D.

بما ان A-C-D، فانه من بديهية ٧، لاتتحقق كل من A-D-C وكذلك D-A-C. ومن هذا نستنتج انه لاتتحقق كل من A-B-D-C، A-D-B-C، D-A-B-C.

لذلك، فانه تتحقق فقط A-B-C-D.

مبرهنة ٥

(أ) اذا كان A-B-D و A-C-D، و B ≠ C ، فان A-B-C او A-C-B

(ب) اذا كان A-B-C وA-B-D، و C ≠ D ، فان B-C-D او B-D-C

(جـ) اذا كان A-B-C وA-B-D ، و C ≠ D ، فان A-C-D او A-D-C

البرهان

يترك كتمرين.

تعريف ٢ تعريف التجزئة (تجزئة المجموعة)

اذا كانت المجموعة S هي اتحاد مجموعتين (او اكثر) جزئيتين غير خاليتين A_1, A_2 بحيث ان كل عنصر في S هو عنصر في واحدة وواحدة فقط من المجموعات الجزئية، فانه يقال ان A_1, A_2 تكونان تجزئة للمجموعة S. كمثال المجموعتان {1,2} {3,4,5}، تكونان تجزئة للمجموعة {1,2,3,4,5}.

تعريف ٣ تعريف جهتي النقطة O او نصفي المستقيم

لتكن O اية نقطة على مستقيم m، و A نقطة اخرى على m. لتكن S_1 مجموعة كل النقاط على m من ضمنها A وكل النقاط X بحيث ان O-X-A او O-A-X.

لتكن S_2 مجموعة كل النقاط X بحيث ان A-O-X. فان S_1, S_2 تدعيان جهتي O على m. وتدعيان ايضا نصفي المستقيم m بالنسبة الى O. اي ان

$$S_1 = \{X \in m: O\text{-}X\text{-}A \vee O\text{-}A\text{-}X \vee X = A\}$$

$$S_2 = \{X \in m : X\text{-}O\text{-}A\}$$

مبرهنة ٦

جهتا النقطة O على المستقيم m لاتحتويان على O

البرهان

نفرض ان $O \in S_1$، وبما ان $A \neq O$ فان A-O-O او O-A-O وهذا يخالف بديهية ٦، وكذلك، اذا كان $O \in S_2$، فان A-O-O. لذا فان O لاتنتمي الى جهتي O.

تعريف ٤ تعريف الفصل

لتكن S_1, S_2 مجموعتين مختلفتين غير خاليتين ومنفصلتين وكلا منهما منفصلة عن مجموعة S. ويتحقق الشرطان التاليان:

(أ) لاي عنصر A في S_1 و B في S_2، توجد نقطة في S بين A و B،

(ب) لاي عنصرين A و B من نفس المجموعة، لاتوجد نقطة في S بينهما،

فانه يقال بان S تفصل (Separates) S_1 و S_2.

مبرهنة ٧ مهم

اية نقطة O على مستقيم m تفصل m الى جهتين بالنسبة الى O وتكونان مع O تجزئة للمستقيم m.

البرهان

(١) التجزئة

لتكن S_1 و S_2 جهتي O على m المتعينيتين من النقطتين O و A. يجب ان نبرهن ان S_1 و S_2 مع {O} تكون تجزئة للمستقيم m.

بما ان $A \in S_1$، فان $S_1 \neq \phi$

بما ان $O \neq A$ فانه من بديهية ٩، توجد نقطة C بحيث C-O-A ، ومن تعريف ٣، $C \in S_2$ ، لذلك $S_2 \neq \phi$

. يجب ان نبرهن لكل $X \in m$ ، فانه تتحقق واحدة فقط ممايلي: $X \in S_1$ ، $X \in S_2$ ، $X \in \{O\}$

$X \in m \longrightarrow$ اما $X = O$ او $X \neq O$

١- نفرض ان $X = O$ ، فان $X \in \{O\}$

من مبرهنة ٦، $O \notin S_1$ و $O \notin S_2$ ، اي ان $X \notin S_1$ و $X \notin S_2$.

٢- نفرض ان $X \neq O$ ، اي ان $X \notin \{O\}$ ، وبما ان

$A \in m \longrightarrow$ اما $X = A$ او $X \neq A$

(أ) نفرض ان $X = A$ ، ومن تعريف ٣ وبديهية ٦، $X \in S_1$ و $X \notin S_2$

(ب) نفرض ان $X \neq A$ وبما ان $O \neq A$ و $X \neq O$ ، فان النقاط O, X, A مختلفة وعلى مستقيم واحد.

ومن بديهية ٧، تتحقق واحدة فقط مما يلي:

O-A-X ، O-X-A ، X-O-A

وهذا يؤدي الى ان $X \in S_1$ او $X \in S_2$

ومن تعريف التجزئة، تكون المجموعات S_1 ، S_2 ، و $\{O\}$ تجزئة للمستقيم m.

(٢) الفصل

يجب ان نبرهن ان $\{O\}$ تفصل S_1 و S_2

(أ) يجب ان نبرهن لكل $X_1 \in S_1$ و $X_2 \in S_2$ ، فان X_1-O-X_2

$X_1 \in S_1 \longrightarrow$ O-X_1-A او O-A-X_1 او $X_1 = A$

$X_2 \in S_2 \longrightarrow$ X_2-O-A

توجد ثلاثة احتمالات

(١) اذا كان $O-A-X_1$ و X_2-O-A ،
فانه نستنتج من بديهية ٥، X_1-A-O و $A-O-X_2$
ومن مبرهنة ٤ (جـ): يكون $X_1-A-O-X_2$
ومنه نستنتج ان X_1-O-X_2

(٢) اذا كان $O-X_1-A$ و X_2-O-A
فانه من بديهية ٥ $\longrightarrow$ $A-X_1-O$ و $A-O-X_2$
ومن مبرهنة ٤ $\longrightarrow$ $A-X_1-O-X_2$
$\longrightarrow$ X_1-O-X_2

(٣) اذا كان $X_1 = A$
وبما ان X_2-O-A
فان X_2-O-X_1

(ب) اولا: لتكن X_1 ، Y_1 اي نقطتين مختلفتين في S_1 ،
فانه كما في تعريف ٤ (ب)، يجب ان نبين على انه من الخطأ يكون X_1-O-Y_1. توجد عدة حالات تؤخذ بنظر الاعتبار، حيث ان:
$X_1 \in S_1$ ——— $O-X_1-A$ ، $O-A-X_1$ ، او $X_1 = A$
$Y_1 \in S1$ ——— $O-Y_1-A$ ، $O-A-Y_1$ ، او $Y_1 = A$
(١) اذا كان $O-X_1-A$ و $O-Y_1-A$
وبما ان $X_1 \neq Y_1$
فان من مبرهنة ٥ يكون $O-X_1-Y_1$ او $O-Y_1-X_1$
ومن بديهية ٧، لايتحقق X_1-O-Y_1

(٢) اذا كان $O-A-X_1$ و $O-A-Y_1$
وبما ان $X_1 \neq Y_1$
فان من مبرهنة ٥،يكون $O-Y_1-X_1$ او $O-X_1-Y_1$

ومن بديهية ٧، لايتحقق X_1-O-Y_1.

(٣) اذا كان $O-X_1-A$ و $O-A-Y_1$،
فان من مبرهنة ٤
يكون $O-X_1-A-Y_1 \longrightarrow O-X_1-Y_1$
ومن بديهية ٧، لاتتحقق X_1-O-Y_1.

(٤) اذا كان $X_1 = A$
بما ان $O-Y_1-A$ او $O-A-Y_1$
فانه $O-Y_1-X_1$ او $O-X_1-Y_1$
ومن بديهية ٧، لايتحقق X_1-O-Y_1.
وبنفس الطريقة:
اذا كان $Y_1 = A$ و $O-X_1-A$ او $O-A-X_1$

(٥) اذا كان $O-A-X_1$ و $O-Y_1-A$
تبرهن بنفس طريقة الحالة (٣).

ثانيا: يجب ان نبرهن اذاكانت X_2 , Y_2 نقطتين مختلفتين
في S_2 فانه من الخطأ ان يكون X_2-O-Y_2.
$X_2 \in S_2 \longrightarrow X_2-O-A$،
ومن بديهية ٥ $\longrightarrow A-O-X_2$
$Y_2 \in S_2 \longrightarrow Y_2-O-A$
ومن بديهية ٥ $\longrightarrow A-O-Y_2$
وبما ان $X_2 \neq Y_2$
فان من مبرهنة ٥
يكون $O-X_2-Y_2$ او $O-Y_2-X_2$
ومن بديهية ٧، لايتحقق X_2-O-Y_2

قاعدة لغوية

يقال عن المجموعتين S_1, S_2 في تعريف ٣ انهما تتعينان من O و A.
تبين المبرهنة التالية وحدانية جهتي النقطة O على المستقيم m (عدم اعتمادها على A).

مبرهنة ٨ Hilbert

لتكن O, A, A' ثلاث نقاط مختلفة على مستقيم m. جهتا النقطة O على المستقيم m المتعينتين من O و A هما نفس الجهتين المتعينتين من O و 'A.

البرهان

لتكن S_1 و S_2 جهتي النقطة O على المستقيم m المتعينتين من O و A

$$S_1 = \{ X \in m : O\text{-}X\text{-}A \vee O\text{-}A\text{-}X \vee X = A\}$$
$$S_2 = \{ X \in m : X\text{-}O\text{-}A\}$$

لتكن S'_1 و S'_2 جهتي النقطة O على m المتعينتين من O و 'A

$$S'_1 = \{ X \in m : O\text{-}X\text{-}A' \vee O\text{-}A'\text{-}X \vee X = A' \}$$
$$S'_2 = \{ X \in m : X\text{-}O\text{-}A'\}$$

النقاط O, A, A' مختلفة وتقع على المستقيم m فانه من بديهية ٧، تتحقق واحدة فقط مما يلي:
$A'\text{-}O\text{-}A$ ، $O\text{-}A'\text{-}A$ ، $O\text{-}A\text{-}A'$

الحالة (١)

نفرض ان $O-A-A'$. يجب ان نبرهن ان $S_1 = S'_1$ و $S_2 = S'_2$

(أ) لكي نبرهن ان $S_1 = S'_1$ يجب ان نبين ان $S_1 \leq S'_1$ و $S'_1 \leq S_1$

(١) لاجل ان نبرهن $S_1 \leq S'_1$

يجب ان نبين اذا كان $X \in S_1$، فان $X \in S'_1$

$X \in S_1 \longrightarrow O-X-A,\ O-A-X$، او $X=A$

نفرض $O-X-A$

وبما ان $O-A-A'$

فانه من مبرهنة٤، يكون

$O-X-A-A' \longrightarrow O-X-A' \longrightarrow X \in S'_1$

نفرض $O-A-X$

وبما ان $O-A-A'$ واذا كان $X \neq A'$

فان من مبرهنة ٥ $\longrightarrow O-X-A'$ او $O-A'-X$

$\longrightarrow X \in S'_1$

اما اذا كان $X = A'$

فان $X \in S'_1$

عندما $X = A$

وبما ان $O-A-A' \longrightarrow O-X-A' \longrightarrow X \in S'_1$

يتبين مما تقدم ان $S_1 \leq S'_1$

(٢) برهان $S'_1 \leq S_1$ نتبع نفس طريقة (١) من فرع (أ)

(ب) لكي نبرهن ان $S_2 = S'_2$ يجب ان نبين ان $S_2 \leq S'_2$ و $S'_2 \leq S_2$

(١) يجب ان نبرهن $S_2 \leq S'_2$

اي ان، لكل $X \in S_2$

فان $X \in S'_2$

$X\text{-}O\text{-}A \longleftarrow X \in S_2$

وبما ان $O\text{-}A\text{-}A'$

ومن مبرهنة٤ $\longrightarrow X\text{-}O\text{-}A\text{-}A'$

$X \in S'_2 \longleftarrow X\text{-}O\text{-}A' \longleftarrow$

(٢) بنفس طريقة (١) من فرع (ب)
نبرهن ان $S_2 \subseteq S'_2$
يتبين مما تقدم ان $S_1 = S'_1$ و $S_2 = S'_2$
وبنفس طريقة الحالة (١) نبرهن
$S_1 = S'_1$ و $S_2 = S'_2$
اذا كان $O\text{-}A'\text{-}A$ و $S_1 = S'_2$ و $S_2 = S'_1$ اذا كان
$A'\text{-}O\text{-}A$.

مبرهنة ٩ Hilbert

لتكن O, O' نقطتين مختلفتين على مستقيم m. جهتا النقطة O على المستقيم m تختلفان عن جهتي النقطة O' على m.

البرهان

لتكن S_1, S_2 جهتي النقطة O على m المتعينتين من النقطتين O و A.

$$S_1 = \{ X \in m : O\text{-}A\text{-}X \vee O\text{-}X\text{-}A \vee X = A \}$$
$$S_2 = \{ X \in m : X\text{-}O\text{-}A \}$$

لتكن S'_1, S'_2 جهتي O' على المستقيم m المتعينتين من O' و A

$$S'_1 = \{ X \in m : O'\text{-}A\text{-}X \vee O'\text{-}X\text{-}A \vee X = A \}$$
$$S'_2 = \{ X \in m : X\text{-}O'\text{-}A \}$$

يجب ان نبرهن ان $S_1 \neq S_1'$ ، $S_1 \neq S_2'$ ،
$S_2 \neq S_1'$ و $S_2 \neq S_2'$
من بديهية ٧، تتحقق واحدة فقط مما يلي:
$O-O'-A$ ، $O-A-O'$ ، $A-O-O'$

الحالة (١)

عندما $O-O'-A$ $\longleftarrow$ $O' \in S_1$ و $O \in S_2'$
نفرض ان $S_1 = S_1'$
وبما ان $O' \in S_1$ $\longleftarrow$ $O' \in S_1'$ وهذا يناقض مبرهنة ٦.
لذا فان $S_1 \neq S_1'$.
نفرض ان $S_1 = S_2'$ وبما ان $O \in S_2'$ $\longleftarrow$ $O \in S_1$
وهذا يناقض مبرهنة ٦.
لذا فان $S_1 \neq S_2'$.
نفرض ان $S_2 = S_1'$
وبما ان $A \in S_1'$ $\longleftarrow$ $A \in S_2$ $\longleftarrow$ $A-O'-A$ ، وهذا يناقض بديهية ٦.
لذا فان $S_2 \neq S_1'$.
نفرض ان $S_2 = S_2'$ ، وبما ان $O \in S_2'$ $\longleftarrow$ $O \in S_2$
وهذا يناقض مبرهنة ٦.
لذلك $S_2 \neq S_2'$.

الحالة (٢)

عندما $O-A-O'$ $\longleftarrow$ $O \in S_1'$ و $O' \in S_1$
نفرض $S_1 = S_1'$
وبما ان $O \in S_1'$ $\longleftarrow$ $O \in S_1$
وهذا يناقض مبرهنة ٦.
لذلك، فان $S_1 \neq S_1'$

نفرض $S_1 = S_2$

وبما ان $O' \in S_1 \longrightarrow O' \in S_2'$

وهذا يخالف مبرهنة ٦.

لذلك $S_1 \neq S_2'$

نفرض ان $S_2 = S_1'$

وبما ان $O \in S_1' \longrightarrow O \in S_2$

وهذا يخالف مبرهنة ٦.

لذلك $S_2 \neq S_1'$

نفرض ان $S_2 = S_2'$

$S_2 \neq \phi \longrightarrow$ توجد نقطة P بحيث ان $P \in S_2$

$\longrightarrow P \in S_2'$

$P \in S_2' \longrightarrow P-O'-A$ و $P \in S_2 \longrightarrow P-O-A$

$P-O-A$ وبما ان $O-A-O'$

فانه من مبرهنة ٤

يكون $P-O-A-O' \longrightarrow P-A-O'$

وهذا يناقض بديهية ٧ لان $P-O'-A$ متحققه.

لذلك، فان $S_2 \neq S_2'$

الحالة (٣)

عندما $A-O-O'$ ، البرهان مشابه للحالة (١).

تمارين ٤-٢

١- برهن على انه اذا كان $A-B-C$ و $A-B-D$ ، فان $A-C-D$

و B-C-D.

٢ ـ برهن على انه اذا كان A-B-D و B-C-D ، فان A-B-C-D.

٣ ـ برهن على انه اذا كان A-B-C و B-C-D ، فان A-B-C-D. ?

٤ ـ برهن على انه اذا كان A-B-C-D ، فان A,B,C,D مختلفة وتقع على مستقيم واحد.

٥ ـ برهن على انه اذا كان A-B-C-D-E ، فان A, B, C, D, E مختلفة وعلى مستقيم واحد.

٦ ـ برهن على انه توجد في الاقل خمس نقاط مختلفة على مستقيم معلوم.

٧ ـ برهن على انه توجد في الاقل خمس نقاط مختلفة لاتقع على مستقيم معلوم.

٨ ـ برهن على انه توجدفي الاقل ثلاث نقاط مختلفة بين اي نقطتين على مستقيم معلوم.

٩ ـ اذا كان A-B-C و A-B-D ، فان C = D ، B-C-D ، او B-D-C. ?

٤-٣ القطع *(Segments)*

تعريف ٥

لتكن A و B نقطتين مختلفتين، مجموعة كل النقاط X بحيث ان A-X-B تدعى قطعة.

ويرمز لها بالرمز : A-B

مبرهنة ١.

النقطتان A, B لاتنتميان الى A-B

البرهان

اذا كان $A, B \in A-B$

فان $A-A-B$ و $A-B-B$

وهذا يناقض بديهية ٦.

مبرهنة ١١

$A-B$ هي مجموعة غير خالية.

البرهان

من بديهية ٩، توجد نقطة C بحيث ان $A-C-B$

اي ان $C \in A-B$.

وبهذا فان $A-B$ هي مجموعة غير خالية.

مبرهنة ١٢

$$A-B = B-A$$

البرهان

يجب ان نبرهن ان $A-B$ هي مجموعة جزئية من $B-A$

وان $B-A$ هي مجموعة جزئية من $A-B$.

لكي نبين ان $A-B$ هي مجموعة جزئية من $B-A$

يجب ان نبرهن اذا كان $X \in A-B$ ، فان $X \in B-A$.

بما ان $X \in A-B$ ، فان $A-X-B$.

ومن بديهية ٥، يكون $B-X-A$

ومن التعريف ٥ ، $X \in B-A$

وبنفس الطريقة، نبرهن الاتجاه الاخر.

مبرهنة ١٣

$A-B$ هي مجموعة جزئية من المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$.

البرهان

لكي نبين ان $A-B$ هي مجموعة جزئية من المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ يجب ان نبرهن ذلك اذا كان $X \in A-B$ ، فان X تقع على المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$.

$$X \in A-B \longrightarrow A-X-B$$

ومن بديهية ٦، A, X, B مختلفة وعلى مستقيم واحد.
لذا فان X تقع على المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$.

مبرهنة ١٤

لتكن A و B نقطتين مختلفتين، فان $A-B = C-D$ اذا وفقط اذا $\{A, B\} = \{C, D\}$

البرهان

نفرض ان $\{A, B\} = \{C, D\}$
فان اما $A = C$ و $B = D$ او $A = D$ و $B = C$.
في اي حالة، يكون عندنا من تعريف القطعة $A-B = C-D$.
نفرض الان ان $A-B = C-D$ وان $\{A, B\} \neq \{C, D\}$
فانه يوجد عنصر في احدى المجموعتين لاينتمي الى الاخرى، وليكن C.
اي ان $C \neq A$ و $C \neq B$
وبما ان $A \neq B$ ، فان النقاط A, B, C مختلفة.
من مبرهنة ١٣، $A-B$ مجموعة جزئية من الخط $\overleftrightarrow{AB}$
و $C-D$ مجموعة جزئية من الخط $\overleftrightarrow{CD}$

وبما ان A-B = C-D ، فانه من بديهية ١ ، تكون النقاط A, B, C على مستقيم واحد.
ومن بديهية ٧، تتحقق واحدة فقط مايلي:
C-A-B ، A-C-B ، A-B-C

الحالة (١)

نفرض ان C-A-B
$A-B = \phi$ ⟵ توجد نقطة H بحيث ان A-H-B
بما ان C-A-B و A-H-B
فانه من مبرهنة ٤ يكون C-A-H-B ⟵ C-A-H
وبما ان A-B = C-D ⟵ $H \in C-D$ ⟵ C-H-D
من مبرهنة٤، C-A-H و C-H-D ⟵ C-A-H-D
⟵ C-A-D ⟵ $A \in C-D$
وبما ان A-B = C-D ⟵ $A \in A-B$
وهذا يناقض مبرهنة ١٠.
وبنفس الطريقة، نتوصل الى تناقض اذا اخذنا الحالتيين الباقيتين عندما A-C-B او A-B-C.
يتضح مما تقدم ان القطعة A-B تتعين من النقطتين A و B.

تعريف ٦

تدعى كل من A و B نقطة نهاية القطعة A-B.

مبرهنة ١٥

لتكن A-B قطعة و A-R-B، فان A-R و R-B مجموعتان جزئيتان من A-B.

البرهان

لكي نبرهن ان A-R هي مجموعة جزئية من A-B ، يجب ان نبين اذا كان $X \in A-R$ ، فان $X \in A-B$

$X \in A-R \longleftarrow$ A-X-R ، ومن الفرض A-R-B

فانه من مبرهنة٤ ، يكون A-X-R-B

$\longleftarrow$ A-X-B

$\longleftarrow X \in A-B$

وبنفس الطريقة، نستطيع ان نبرهن ان R-B هي مجموعة جزئية من A-B.

مبرهنة ١٦ XIII

اي نقطة R في القطعة A-B تفصل A-B الى **مجموعتين** جزئيتين غير خاليتين A-R, R-B اللتين مع **(R) تكون** تجزئة للقطعة A-B.

البرهان

من مبرهنة ١١، A-R, R-B مجموعتين غير خاليتين.

ومن مبرهنة ١٥، A-R, R-B مجموعتين جزئيتين من A-B.

(١) لكي نبرهن ان A-R, {R}, R-B تكون تجزئة الى A-B، يجب ان نبين اذا كانت X اية نقطة في A-B ، فان X تنتمي الى واحدة وفقط واحدة من المجموعات الجزئية:

$A-R, \{R\}, R-B$

هناك احتمالان، اما $X \neq R$ او $X = R$

نفرض ان $X \neq R$. وبما ان $A-X-B$ و $A-R-B$ فانه من مبرهنة ١٣ وبديهية ٦، تكون النقاط X,A,R,B مختلفة وعلى خط واحد.

وبما ان $A-R-B$، فانه من بديهية ٨، تتحقق واحدة فقط مما يلي:

$X-A-R-B$ و $A-X-R-B$ و $A-R-X-B$ و $A-R-B-X$

لكن بما ان $A-X-B$ ومن بديهية ٧،

فانه لاتتحقق كل من $A-R-B-X$ و $X-A-R-B$.

اي انه اما $A-X-R-B$ او $A-R-X-B$ ⟵ اما $A-X-R$ او $R-X-B$. لذا فانه اما $X \in A-R$ او $X \in R-B$.

وبما ان $X \notin \{R\}$ ، فان اي نقطة $X \neq R$ في $A-B$ تكون عنصـــرا في واحــدة وفقــط واحــدة من المجموعات $A-R$ ،$\{R\}$ ،$R-B$

اما اذا كان $X = R$ ، فان $X \in \{R\}$

ومن مبرهنة ١٠، $R \notin R-B$ و $R \notin A-R$

لذا فان اية نقطة X في $A-B$ تكون عنصرا في واحدة وفقط واحدة من المجموعات $A-R, \{R\}, R-B$.

(٢) يجب ان نبرهن ان $\{R\}$ تفصل $A-B$ الى $A-R$ و $R-B$.

(أ) لتكن Y_1 و X_1 نقطتين مختلفتين في $A-R$. فان $A-X_1-R$ و $A-Y_1-R$.

من بديهية ٥، يكون $R-X_1-A$ و $R-Y_1-A$

من مبرهنة ٥ (أ) ، اما $R-X_1-Y_1$ او $R-Y_1-X_1$

ومن بديهية ٧، لايمكن ان يتحقق X_1-R-Y_1

بهذا فقط برهنا اذا كان $X_1, Y_1 \in A-R$ و $X_1 \neq Y_1$ ، فان R لاتقع بين X_1 و Y_1.

وبنفس الطريقة اذا أخذنـــا $X_2, Y_2 \in R-B$ و

$X_2 \neq Y_2$، فان R لاتقع بين X_2 و Y_2.

(ب) نفرض ان $X_1 \in A-R$ و $X_2 \in R-B$. يجب ان نبرهن ان $X_1 - R - X_2$.

من الجزء (١)، $X_1 \neq X_2$.

بما ان $A-X_1-R$ و $A-R-B$

فانه من مبرهنة ٤، يكون $A-X_1-R-B \longrightarrow X_1-R-B$

وكذلك، X_1-R-B و $R-X_2-B \longrightarrow X_1-R-X_2-B$

$\longrightarrow X_1-R-X_2$

٤-٣ تمارين

١- برهن على ان القطعة تحتوي على عدد غير منته من النقاط.

٢- برهن على ان الخط يحتوي على عدد غير منته من النقاط.

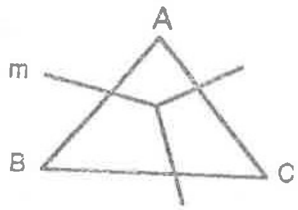
٣- برهن على ان نصف الخط يحتوي على عدد غير منته من النقاط.

٤-٤ بديهية باخ (The Axiom of Pasch)

في كثير من البراهين الاقليدية، مثل، "المستقيم الذي يمر براس مثلث" و "منصف زاوية في مثلث" قد افترضت بان هذه المستقيمات تقطع الضلع المقابل في المثلث. لكن على اي اساس اعتمدت هذه الفرضية؟. لقد صاغ العالم باخ بديهيته ليس فقط على انها عبارة اعتمد عليها في البراهين، ولكن لانه ليس بالامكان برهنتها من بديهيات اقليدس المعروفة.

تعريف ٧

لتكن A, B, C ثلاث نقاط مختلفة ولاتقع على مستقيم واحد، ان اتحاد {A, B, C} مع القطع A-B, A-C, B-C يدعى مثلثا، تدعى A, B, C الرؤوس. تدعى A-B, A-C, B-C الاضلاع.
الخطوط التي تحتوي الاضلاع تدعى خطوط الاضلاع.



شكل (١٧)

من الواضح ان المثلث يتعين من رؤوسه.
المثلث الذي يتعين من A,B,C يرمز له بالرمز ΔABC.
لقد قدم باخ البديهية التالية التي توضح بالشكل ١٧.

بديهية ١٠ (باخ)

اذا كانت A, B, C رؤوس مثلث و m هو مستقيم لايمر باي راس من هذه الرؤوس ويحتوي m على نقطة من الضلع A-B ، فان m يحتوي كذلك على نقطة من الضلع A-C او B-C.

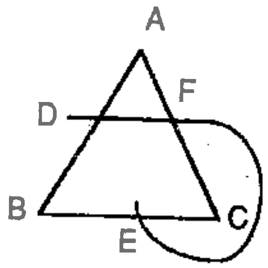
السؤال الذي يتبادر الى الاذهان هو هل ان المستقيم m يقطع كل من A-C وB-C؟. بالطبع كلا وهذا ما سنبرهنه في المبرهنة التالية:

مبرهنة ١٧

اذا كانت A, B, C رؤوس مثلث، اي مستقيم m يحتوي على نقطة من الضلع A-B ونقطة من الضلع A-C ، فانه لايمكن ان يحتوي على نقطة من الضلع B-C.

البرهان

نفرض وجود مستقيم m يحتوي على مثل هذه النقاط D, E, F بحيث ان D ∈ A-B ، E ∈ B-C ، و F ∈ A-C.
من الفرض ومبرهنة ٢، تكون النقاط مختلفة.
من بديهية ٧، تتحقق واحدة فقط مما يلي:
D-F-E ، D-E-F ، F-D-E
نفرض ان D-F-E. بما ان E ∈ B-C ، فانه تقع E على المستقيم BC (مبرهنة ١٣) وكذلك D تقع على الخط AB، ومن مبرهنة٢، النقاط D, E, B لاتقع على مستقيم واحد. لذلك من بديهية باخ، المستقيم AC الذي يقطع D-E في F يجب ان يقطع B-E او B-D. لكن هذا لايمكن من مبرهنة ٢ وبديهية ٧، لذا فان الفرض يكون خاطئا.
وبنفس الطريقة، نتوصل الى تناقض اذا كان D-E-F أو F-D-E.
وبهذا، فان المستقيم الذي يقطع ضلعين في مثلث، فانه لايقطع الضلع الثالث.



شكل (١٨)

والان نعيد نص بديهية باخ بشكل ابسط ((اذا كان مستقيم لايمر باي راس من رؤوس مثلث ويقطع ضلعا واحدا في المثلث، فانه يقطع في الاقل واحدا من الضلعين الاخرين.))

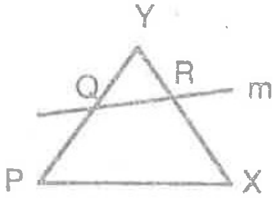
وكذلك نعيد نص مبرهنة ١٧ في الشكل التالي:
((اذا كان مستقيم يقطع ضلعا واحدا من مثلث، فانه يقطع في الاكثر واحدا من الضلعين الاخرين)).
وبالنتيجة نتوصل الى مايلي:
((المستقيم الذي يقطع ضلعا واحدا من مثلث والذي لايمر باي راس منه، فانه يقطع ضلعا واحدا فقط من الضلعين الاخرين)).

تعريف ٨ تعريف جهتي المستقيم او نصفي المستوي

ليكن m اي مستقيم و P نقطة لاتقع على m. لتكن S_1 مجموعة تحتوي على P وكل النقاط X لاتقع على m، بحيث ان P-X لاتحتوي على نقطة من m. لتكن S_2 مجموعة كل النقاط Y بحيث ان P-Y تحتوي على نقطة m. فان S_1 و S_2 تدعيان جهتي المستقيم m.
وتدعيان ايضا نصفي المستوي بالنسبة للمستقيم m.

مبرهنة ١٨

جهتا المستقيم m غير خاليتين.



شكل (١٩)

البرهان

ليكن m مستقيما ، توجد نقطة Q على m ونقطة P لاتقع على m. من بديهية ٩، توجد نقطة Y بحيث ان P-Q-Y ولذلك P-Y تحتوي على نقطة Q من m، اي ان $Y \in S_2$ وعليه فان جهة m المجموعة S_2 هي مجموعة غير خالية.

توجد نقطة اخرى R على m.

ومن بديهية ٩، توجد نقطة X بحيث ان Y-R-X. في ΔPXY بما ان m يقطع الضلع P-Y في Q ويقطع الضلع Y-X في R فانه من مبرهنة ١٧، لايمكن ان يقطع الضلع P-X.

ومن بديهية ٦، ومبرهنة ٢، لاتقع X على m، فان $X \in S_1$ اي ان جهة المستقيم m المجموعة S_1 هي مجموعة غير خالية.

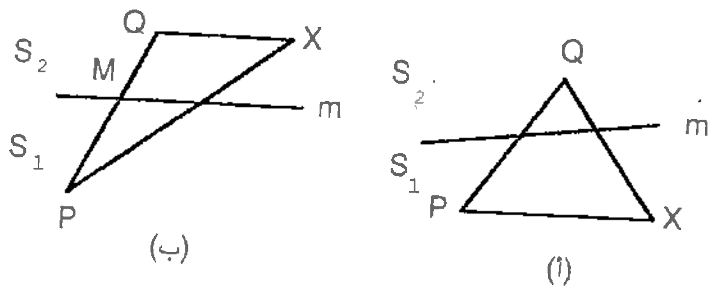
يمكن ان نعبر عن جهتي المستقيم m نسبة الى نقطة P التي لاتقع على m بالصورة التالي :

$$S_1 = \{X \notin m : P\text{-}X \cap m = \phi \lor X = P\}$$

$$S_2 = \{Y : P\text{-}Y \cap m \neq \phi\}$$

مبرهنة ١٩ للاطلاع

توجد جهتان فقط للمستقيم m (نسبة الى نقطة P) وتكونان مع m تجزئة لمجموعة كل النقاط.



شكل (٢٠)

البرهان

كل نقطة اما تقع على m او لاتقع، حيث لاتوجد نقطة تقع على m ولاتقع على m. من برهان مبرهنة ١٨، اذا كانت M نقطة على m، فانه توجد نقطتين P, Q لاتقعان على m، بحيث ان P-M-Q. لتكن X اية نقطة لاتقع على m. اذا كانت X تقع على المستقيم PQ، فانه تتحقق واحدة فقط من الحالات الاربعة التالية:

X-P-Q ، P-X-Q ، P-Q-X ، X = P ، او X = Q

فانه واحدة فقط من القطع P-X, Q-X تقطع m.

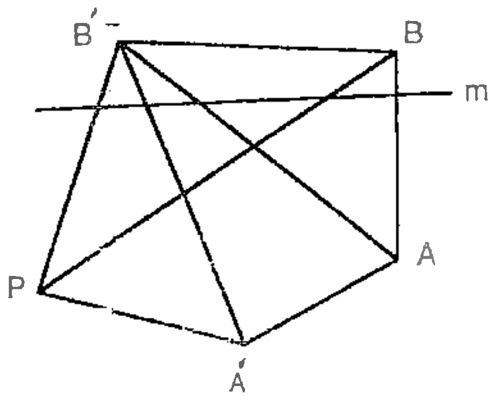
اذا كانت X لاتقع على المستقيم PQ، فانه ايضا واحدة فقط من القطع P-X, Q-X تقطع m.

حيث اذا كان اي قطعة من هذه القطع لاتقطع m، وبما ان P-M-Q، اي ان m يقطع P-Q في M، فبان هذا يناقض بديهية ١٠. اما اذا كان كل من P-X و Q-X تقطع m، فان هذا يناقض مبرهنة ١٧. هكذا، اذا كانت P-X لاتقطع m، فان X في S_1 كما في تعريف ٨. بما انه توجد هذه الاحتمالات فقط وان كل نقطة في واحدة فقط من المجموعات S_1, S_2 ، وبهذا نكمل البرهان.

تبين المبرهنات ١٨ و ١٩ ان جهتي المستقيم m، مع m تحقق خواص S_1, S_2 و S في التعريف. يجب ان نبين الان تحقق الحالة (أ) والحالة (ب) في تعريف ٤ .

مبرهنة ٢٠. Xell

اي مستقيم m يفصل مجموعة كل النقاط الى جهتين.



شكل (٢١)

البرهان

من المبرهنتين ١٨ و ١٩، نعرف ان جهتي المستقيم m غير خاليتين ومنفصلتين عن بعضهما وعن m. لتكن P نقطة في احدى الجهتين. ولتكن A, A' اي نقطتين لاتقعان على m بحيث ان A-P, A'-P لاتحتويان على نقطة من m. لتكن B, B' اي نقطتين في الجهة الاخرى من m، اي انه، لاتقعان على m لكن P-B، P-B' تحتويان على نقطة من m.

الحالة (أ)

اذا كان اي ثلاث، او اربع، او خمس من النقاط A, A', B,B′,p تقع على مستقيم واحد، فان m يقطع A-B, A-B', A'-B, A'-B' (لماذا؟.) اذا كان اي ثلاث من هذه النقاط لاتقع على مستقيم واحد، فانه نستنتج مباشرة من بديهية باخ ان m يقطع A-B,A'-B, A'-B' و A-B′.

الحالة (ب)

اذا كانت A, A' تنتميان الى نفس المجموعة، فانه يجب ان نبرهن ان $A-A'$ لاتقطع m. اذا كانت A, P, A' تقع على مستقيم واحد، او B, P, B' على مستقيم واحد، فانه يستنتج ان ايا من القطعتين $A-A'$ او $B-B'$ لاتقطع m (لماذا؟). اذا كانت A, P, A' لاتقع على خط واحد، وبما ان من الفرض ليست $P-A$ ولا $P-A'$ تقطع m، فان هذا يناقض بديهية باخ اذا قطع m القطعة $A-A'$.

اما اذا كانت B, P, B' لاتقع على خط واحد، وبما انه من الفرض كل من $P-B$ و $P-B'$ تقطع m، فان من مبرهنة ١٧، m لايقطع $B-B'$.

قاعدة لغوية

المجموعتان S_1, S_2 في تعريف ٨ يقال عنهما تتعينان من m و P.

تبين المبرهنة التالية وحدانية جهتي المستقيم m المتعينتين من المستقيم m واية نقطة لاتقع على m.

مبرهنة ٢١ ~~الطلاع~~

ليكن m مستقيما، P، P' نقطتين لاتقعان على m. جهتا المستقيم m المتعينتين من P و m هما نفس الجهتين المتعينتين من P' و m.

البرهان

يترك كتمرين.

مبرهنة ٢٢

ليكن m, m' مستقيمين مختلفين، جهتا المستقيم m تختلفان عن جهتي المستقيم m'.

البرهان

يترك كتمرين.

تمارين ٤-٤

١- برهن اذا كان $A-F-B$ و $B-C-D$، فانه توجد نقطة E في $F-D$ بحيث ان $A-E-C$. (A, B, C لاتقع على مستقيم واحد).

٢- برهن اذا كان A, B, C ثلاث نقاط مختلفة ولاتقع على مستقيم واحد و D, E نقطتين بحيث ان $B-C-D$ و $C-E-A$، فانه توجد نقطة F على الخط DE بحيث ان $A-F-B$.

٣- في تمرين ٢، بين ان $D-E-F$.

٤- اذا كان في ΔABC، $A-D-B$, $A-E-C$ و $B-F-C$، فان $A-F$ تقطع $D-E$.

٥- برهن في ΔABC، اذا كان $A-D-B$، $B-E-C$، فان $A-E$ تقطع $C-D$.

٤-٥ المجموعات المحدبة (Convex Sets)

تعريف ٩

تدعى المجموعة S مجموعة محدبة اذا وفقط اذا كان اي نقطتين تنتميان الى S، فان $P-Q$ تكون مجموعة جزئية

$P, Q \in S$
$P-Q$

من S.

مبرهنة ٢٣

(أ) اي مستقيم يكون مجموعة محدبة.

(ب) كل من جهتي نقطة O هي مجموعة محدبة.

البرهان

(أ) ليكن m خطا، لتكن A و B اي نقطتين على m. من تعريف القطعة، A و B تعينان القطعة A-B.
من مبرهنة ١٣، A-B مجموعة جزئية من m.
لذلك، من تعريف ٩، يكون m مجموعة محدبة.

(ب) لتكن S_2 و S_1 جهتي نقطة O على المستقيم m المتعينتين من النقطتين O و A.

اولا، يجب ان نبرهن ان S_1 هي مجموعة محدبة
لتكن X_1 و Y_1 اي نقطتين في S_1. يجب ان نبرهن ان X_1-Y_1 هي مجموعة جزئية من S1

ليكن $X \in X_1 - Y_1 \longleftarrow X_1 - X - Y_1$

$X_1 \in S_1 \longleftarrow O - X_1 - A$, $O-A-X_1$، او
$X_1 = A$

$Y_1 \in S_1 \longleftarrow O - Y_1 - A$, $O-A-Y_1$، او
$Y_1 = A$

(١) اذا كان $O-X_1-A$ و $O-Y_1-A$
من مبرهنة ٥، يكون $O-X_1-Y_1$ او $O-Y_1-X_1$.
عندما $O - X_1 - Y_1$ بما ان $X_1-X - Y_1$ فانه من مبرهنة ٤، يكون $O-X_1-X-Y_1 \longrightarrow O - X - Y_1$
وبما ان $O - Y_1 - A$ فانه من مبرهنة ٤، يكون

$$X \in S_1 \Longleftarrow O-X-A \Longleftarrow O-X-Y_1-A$$

عندما $O-Y_1-X_1$ ، وبما ان X_1-X-Y_1 ، فان من
بديهية ٥ ومبرهنة ٤ يكون $O-Y_1-X-X_1$ $\longleftarrow$
$O-X-X_1$ وبما ان $O-X_1-A$ $\longleftarrow$ $O-X-X_1-A$
$\longleftarrow$ $O-X-A$ $\longleftarrow$ $X \in S_1$.

(٢) اذا كان $O-A-X_1$ و $O-A-Y_1$ ، فانه من مبرهنة ٥،
يكون $O-X_1-Y_1$ او $O-Y_1-X_1$
عندما $O-X_1-Y_1$ وبما ان X_1-X-Y_1 ، فانه من مبرهنة
٤، يكون $O-X_1-X-Y_1$ $\longleftarrow$ $O-X_1-X$ وبما ان $O-A-X_1$
، فانه من مبرهنة ٤، يكون $O-A-X_1-X$ $\longleftarrow$
$O-A-X$ $\longleftarrow$ $X \in S_1$
عندما $O-Y_1-X_1$ وبما ان X_1-X-Y_1 ، فانه من مبرهنة
٤، يكون $O-Y_1-X-X_1$ $\longleftarrow$ $O-Y_1-X$ وبما ان
$O-A-Y_1$ ، فانه من مبرهنة ٤، يكون $O-A-Y_1-X$
$\longleftarrow$ $O-A-X$
$\longleftarrow$ $X \in S_1$

(٣) اذا كان $O-X_1-A$ و $O-A-Y_1$ ، فانه من مبرهنة ٤،
يكون $O-X_1-A-Y_1$ $\longleftarrow$ $O-X_1-Y_1$ وبما ان X_1-X-Y_1
فانه من مبرهنة ٤، $O-X_1-X-Y_1$
$\longleftarrow$ $O-X_1-X$ وبما ان $O-X_1-A$
من مبرهنة ٥ $\longleftarrow$ $O-X-A$ او $O-A-X$ او $X = A$
$\longleftarrow$ $X \in S_1$

(٤) اذا كان $X_1 = A$ و $O-Y_1-A$ او $O-A-Y_1$
$\longleftarrow$ $O-Y_1-X_1$ او $O-X_1-Y_1$
وبما ان X_1-X-Y_1
فانه من مبرهنة ٤ $\longleftarrow$ $O-Y_1-X-X_1$ او $O-X_1-X-Y_1$
$\longleftarrow$ $O-X-X_1$ او $O-X_1-X$ وبما ان $X_1 = A$
$\longleftarrow$ $O-X-A$ او $O-A-X$

$\longleftarrow X \in S_1$.

(٥) اذا كان $O\text{-}A\text{-}X_1$ و $O\text{-}Y_1\text{-}A$ ، البرهان يكون مشابها للحالة (٣).

(٦) اذا كان $Y_1 = A$ و $O\text{-}X_1\text{-}A$ او $O\text{-}A\text{-}X_1$ ، يكون البرهان مشابها للحالة (٤).

ثانيا ، يجب ان نبرهن ان S_2 هي مجموعة محدبة
لتكن X_2, Y_2 نقطتين مختلفتين في S_2 ، يجب ان نبرهن ان $X_2\text{-}Y_2$ مجموعة جزئية من S_2

ليكن $X \in X_2\text{-}Y_2 \longrightarrow X_2\text{-}X\text{-}Y_2$

$X_2 \in S_2 \longrightarrow X_2\text{-}O\text{-}A$

$Y_2 \in S_2 \longrightarrow Y_2\text{-}O\text{-}A$

من بديهية ٥، $X_2\text{-}O\text{-}A$ و $Y_2\text{-}O\text{-}A \longrightarrow A\text{-}O\text{-}X_2$ و $A\text{-}O\text{-}Y_2$

ومن مبرهنة ٥ $\longrightarrow O\text{-}X_2\text{-}Y_2$ او $O\text{-}Y_2\text{-}X_2$

عندما $O\text{-}X_2\text{-}Y_2$ وبما ان $X_2\text{-}X\text{-}Y_2$ ، فانه من مبرهنة ٤) يكون $O\text{-}X_2\text{-}X\text{-}Y_2 \longrightarrow O\text{-}X_2\text{-}X$

ومن بديهية ٥ $\longrightarrow X\text{-}X_2\text{-}O$ وبما ان $X_2\text{-}O\text{-}A$

من مبرهنة ٤ $\longrightarrow X\text{-}X_2\text{-}O\text{-}A$

$\longrightarrow X\text{-}O\text{-}A$

$\longrightarrow X \in S_2$

عندما $O\text{-}Y_2\text{-}X_2$

بما ان $X_2\text{-}X\text{-}Y_2$ ، فانه من بديهية ٥، يكون $Y_2\text{-}X\text{-}X_2$

وبما ان $O\text{-}Y_2\text{-}X_2$ ، فان من مبرهنة ٤، يكون $O\text{-}Y_2\text{-}X\text{-}X_2 \longrightarrow O\text{-}Y_2\text{-}X$

بما ان $Y_2\text{-}O\text{-}A$ ، فانه من بديهية ٥، يكون $A\text{-}O\text{-}Y_2$

من مبرهنة ٤، $O\text{-}Y_2\text{-}X$ و $A\text{-}O\text{-}Y_2 \longrightarrow A\text{-}O\text{-}Y_2\text{-}X$

A-O-X ⟵

من بديهية ٥ ⟵ X-O-A

$X \in S_2$ ⟵

لذلك، فان كل من S_1, S_2 تكون مجموعة محدبة.

مبرهنة ٢٤

كل قطعة هي مجموعة محدبة.

البرهان

لتكن A-B قطعة. يجب ان نبرهن ان A-B هي مجموعة محدبة. لتكن X و Y اي نقطتين مختلفتين في A-B. يجب ان نبرهن ان X-Y هي مجموعة جزئية من A-B.

ليكن $Z \in X\text{-}Y$ ⟵ X-Z-Y

$X \in A\text{-}B$ ⟵ A-X-B

$Y \in A\text{-}B$ ⟵ A-Y-B

من مبرهنة ٥، A-X-B و A-Y-B ⟵ A-Y-X او A-X-Y

عندما A-X-Y وبما ان X-Z-Y ، فان من مبرهنة ٤،

⟵ A-X-Z-Y

⟵ A-Z-Y وبما ان A-Y-B

من مبرهنة ٤ ⟵ A-Z-Y-B

⟵ A-Z-B

⟵ $Z \in A\text{-}B$

عندما A-Y-X ، من بديهية ٥، يكون X-Y-A وبما ان X-Z-Y

من مبرهنة ٤ ⟵ X-Z-Y-A

⟵ X-Z-A

من بديهية ٥ ⟵ A-Z-X وبما ان A-X-B

من مبرهنة ٤ ⟵ A-Z-X-B

$A-Z-B \longleftarrow$

$Z \in A-B \longleftarrow$

وبهذا، فان A-B هي مجموعة محدبة.

مبرهنة ٢٥ المطالع

كل من جهتي المستقيم m هي مجموعة محدبة.

البرهان

لتكن S_1, S_2 جهتي المستقيم m المتعينتين من m ونقطة P.

$S_1 = \{ X \notin m : P-X \cap m = \phi \} \cup \{P\}$

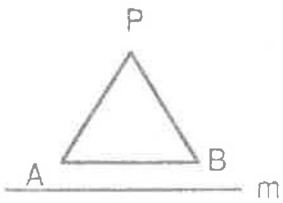
$S_2 = \{ Y : P-Y \cap m \neq \phi \}$

(أ) يجب ان نبرهن ان S_1 هي مجموعة محدبة.
لتكن A و B نقطتين مختلفتين في S_1، يجب ان نبرهن ان A-B هي مجموعة جزئية من S_1.
ليكن $X \in A-B \longrightarrow A-X-B$

$A \in S_1 \longrightarrow A \notin m$ وان $P-A$ لاتقطع m او $A = P$

$B \in S_1 \longrightarrow B \notin m$ وان $P-B$ لاتقطع m او $B = P$

يجب ان نبرهن ان $X \in S_1$



شكل (٢٢)

اذا كان $X = P$ ⟵ $X \in S_1$
نفرض ان $X \neq P$
اما ان تكون النقاط A, B, P على استقامة واحدة
او ليست على استقامة واحدة.

الحالة (١)

اذا كانت A, B, P لاتقع على مستقيم واحد.
في ΔABP، اذا قطع المستقيم m الضلع A-B
وبما ان لايمر باي راس منه، فانه من بديهية باخ، m يقطع P-A او P-B وهذا خلاف الفرض، لذلك فان m لايقطع A-B.
وبما ان $X \notin A-B$ ، فان $X \notin m$
في ΔPAX، نفرض ان m يقطع P-X
وبما ان m لايقطع P-A ، فانه من بديهية باخ، m يقطع الضلع A-X
من مبرهنة ١٥، A-X هي مجموعة جزئية من A-B،
فان m يقطع A-B وهذا تناقض.
لذا فان m لايقطع P-X وبما ان $X \notin m$ ، فانه من تعريف S_1، $X \in S_1$

الحالة (٢)

نفرض ان A, B, P تقع على استقامة واحدة.
من بديهية ٦، بما ان A-X-B ⟵ A, X, B مختلفة وعلى استقامة واحدة. اي ان X على الخط AB ⟵
النقاط A, B, P, X تقع على مستقيم واحد.
وبما ان $P \neq X$ ، $A \neq B$ ، $A \neq X$ ، $B \neq X$.
نفرض ان $A \neq P$ و $B \neq P$ ⟵ النقاط A, B, P, X مختلفة.

النقاط A, B, P, X مختلفة وعلى استقامة واحدة،
وبما ان $A-X-B$
فانه من بديهية ٨ $\longleftarrow$ تتحقق واحدة فقط مما يلي:
$A-X-B-P$ ، $A-X-P-B$ ، $A-P-X-B$ ، $P-A-X-B$
اذا كان $A-X-B-P$ $\longleftarrow$ $A-X-P$
ومن مبرهنة ١٥ $\longleftarrow$ $P-X$ هي مجموعة جزئية من
$P-A$
وبما ان $P-A$ لاتقطع m ، فان $P-X$ لاتقطع m.
اذا كان $A-X-P-B$ $\longleftarrow$ $A-X-P$.
وكما في الحالة السابقة، $P-X$ لاتقطع m
اذا كان $A-P-X-B$ $\longleftarrow$ $P-X-B$
ومن مبرهنة ١٥ $\longleftarrow$ $P-X$ هي مجموعة جزئية من
$P-B$
وبما ان $P-B$ لاتقطع m، فان $P-X$ لاتقطع m
اذا كان $P-A-X-B$ $\longleftarrow$ $P-X-B$
من مبرهنة ١٥ $\longleftarrow$ $P-X$ هي مجموعة جزئية من
$P-B$.
كما في الحالة السابقة $\longleftarrow$ $P-X$ لاتقطع m.
بما ان $A-X-B$ $A \in S_1$ و $B \in S_1$، ومن تعريف الفصل
ومبرهنة ٢٠ فان، X لاتقع على m
وبهذا فقد برهنا ان $P-X$ لاتقطع m و X لاتقع على
m اي ان $X \in S_1$
نفرض $A = P$ ، وبما ان $A-X-B$ ، فان $P-X-B$
ومن مبرهنة ١٥، $P-X$ هي مجموعة جزئية من $P-B$
وبما ان $P-B$ لاتقطع m، فان $P-X$ لاتقطع m
$\longleftarrow$ $X \in S_1$
وبنفس الطريقة اذا كان $B = P$.
وبذلك تكون S_1 مجموعة محدبة.

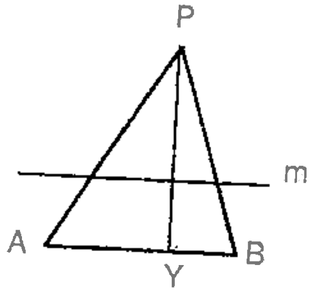
(ب) يجب ان نبرهن ان S_2 هي مجموعة محدبة.
لتكن A و B نقطتين مختلفتين في S_2. يجب ان نبرهن ان A-B هي مجموعة جزئية من S_2.
لتكن $Y \in A-B$. يجب ان نبرهن ان $Y \in S_2$

$Y \in A-B \longrightarrow A-Y-B$

$A \in S_2 \longrightarrow$ P-A تقطع m، ومن مبرهنة ٢، A لاتقع على m

$B \in S_2 \longrightarrow$ P-B تقطع m، ومن مبرهنة ٢، B لاتقع على m

اما النقاط P, A, B على استقامة واحدة او ليست على استقامة واحدة.
نفرض ان النقاط P, A, B لاتقع على مستقيم واحد.
في ΔPAB الخط m يقطع P-A و P-B ولايمر باي راس من ΔPAB.
من مبرهنة ١٧ $\longrightarrow$ m لايقطع A-B
وبما ان A-Y-B ، فانه من مبرهنة ٢٥ تكون B-Y مجموعة جزئية من A-B $\longrightarrow$ m لايقطع B-Y



شكل (٢٣)

في $\triangle PYB$ ، m يقطع P-B ولايقطع Y-B ولايمر باي راس من المثلث، فانه من بديهية باخ، m يقطع P-Y

$\longleftarrow Y \in S_2$

نفرض ان النقاط P, A, B على مستقيم واحد.

من بديهية ٧ $\longleftarrow$ تتحقق واحدة فقط ممايلي:

A-P-B ، P-B-A ، P-A-B

١ـ نفرض ان P-A-B، وبما ان A-Y-B

من مبرهنة ٤ $\longleftarrow$ P-A-Y-B $\longleftarrow$ P-A-Y

من مبرهنة ١٥ $\longleftarrow$ $P\text{-}A \subset P\text{-}Y$

وبما ان P-A تقطع m $\longleftarrow$ P-Y تقطع m

$\longleftarrow Y \in S_2$

٢ـ نفرض ان P-B-A ، بنفس الطريقة السابقة، فان $Y \in S_2$

٣ـ نفرض A-P-B.

لتكن P-A تقطع m في X_1 و P-B تقطع m في X_2.

اي ان $P\text{-}X_1\text{-}A$ و $P\text{-}X_2\text{-}B$

$P\text{-}X_1\text{-}A$ وبما ان A-P-B ، فانه من مبرهنة ٤ وبديهية ٥، يكون $A\text{-}X_1\text{-}P\text{-}B$ $\longleftarrow$ $X_1\text{-}P\text{-}B$

$X_1\text{-}P\text{-}B$ وبما ان $P\text{-}X_2\text{-}B$ ، فانه من مبرهنة ٣، النقاط $B,\ P,\ X_1,\ X_2$ مختلفة وعلى مستقيم واحد $\longleftarrow$ X_1, X_2 تقعان على المستقيم PB.

$\longleftarrow$ m يقطع المستقيم PB في النقطتين المختلفتين X_1 و X_2 وهذا يخالف مبرهنة ٢.

لذا فان هذه الحالة لايمكن ان تؤخذ.

من الحالتين (١) و (٢)، نستنتج ان S_2 هي مجموعة محدبة.

مبرهنة ٢٦

تقاطع n من المجموعات المحدبة هو مجموعة محدبة.

البرهان

ليكن $A = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$

حيث ان $A_1, A_2, \ldots, A_n$ هي مجموعات محدبة.

يجب ان نبرهن ان A هي مجموعة محدبة.

لتكن X و Y نقطتين مختلفتين في A

يجب ان نبين ان $X\text{-}Y$ هي مجموعة جزئية من A

$X, Y \in A \longleftarrow$

$X, Y \in A_1$ ، $X, Y \in A_2$ ، .... و $X, Y \in A_n$

وبما ان $A_1, A_2, \ldots, A_n$ مجموعات محدبة

$\longleftarrow$ $X\text{-}Y \subseteq A_1$ ، $X\text{-}Y \subseteq A_2$ ، ... ، $X\text{-}Y \subseteq A_n$

$\longleftarrow$ $X\text{-}Y \subseteq A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$

$\longleftarrow$ $X\text{-}Y \subseteq A$

$\longleftarrow$ A هي مجموعة محدبة.

تعريف ١٠

تدعى جهتا نقطة O على مستقيم m بجهتي O المتعاكستين.

تعريف ١١

تدعى جهتا المستقيم m بجهتي m المتعاكستين.

مبرهنة ٢٧

(أ) اذا كانت النقطتان A, B في جهتين متعاكستين من مستقيم m و B, C في نفس الجهة من m، فان A, C في جهتين متعاكستين من m.

(ب) اذا كانت النقطتان A, B في جهتين متعاكستين من مستقيم m وان B, C في جهتين متعاكستين من m، فان A, C في نفس الجهة من m.

(جـ) اذا كانت A, B في نفس الجهة من m و B, C في نفس الجهة من m، فان A, C في نفس الجهة من m.

تعريف ١٢

مجموعة كل النقاط على مستقيم في نفس الجهة من نقطة O، تدعى شعاع، تدعى O نقطة البداية.
الشعاعان المناظران لجهتي O يدعيان شعاعين متعاكسين.
يرمز للشعاع الذي نقطة بدايته A و B نقطة على الشعاع بالرمز:

$$\overrightarrow{AB}$$

اي ان $\overrightarrow{AB}$ هو مجموعة كل النقاط X على المستقيم AB بحيث ان A لاتقع بين X و B
بتعبير آخر، اما يكون A-X-B او A-B-X.

مبرهنة ٢٨

(أ) الشعاع هو مجموعة محدبة.
(ب) الشعاع هو مجموعة جزئية من مستقيم.
(ج) للشعاع نقطة بداية وحيدة.
(د) نقطة البداية لاتنتمي الى الشعاع.

(هـ) لكل شعاع يوجد شعاع واحد معاكس له.

(و) الشعاع الذي نقطة بدايته على مستقيم، لكنه لايقع على المستقيم، فان كل نقاطه تقع في نفس الجهة من المستقيم.

(ز) يتعين الشعاع من نقطة بدايته واي نقطة من نقاطه.

البرهان

(ا) يستنتج حالا من مبرهنة ٢٣(ب) ومن تعريف الشعاع.

(ب) يبرهن من تعريف الشعاع ،

(ج) يبرهن من تعريف الشعاع ومن مبرهنة ٩.

(د) يبرهن مباشرة من مبرهنة ٦ وتعريف الشعاع.

(هـ) يبرهن من تعريف الشعاع ومبرهنة ٧.

(و) ليكن $\overrightarrow{OA}$ شعاعا لايقع على مستقيم m، وان O على m.

يجب ان نبرهن ان كل نقاط $\overrightarrow{OA}$ تقع في نفس الجهة من m.

نفرض ان العبارة خطأ، فتوجد نقطة B على $\overrightarrow{OA}$ بحيث ان B تقع في جهة m التي لاتحتوي على A، اي ان A و B في جهتين متعاكستين من m.

من تعريف الفصل ومبرهنة ٢٠، حيث ان m يفصل جهتيه ، فانه توجد نقطة Q على m بحيث ان A-Q-B.

من تعريف الشعاع الذي هو جزء من مستقيم، O تقع على المستقيم AB، وبما ان A-Q-B ، فانه من بديهية ٦، Q تقع على المستقيم AB.

اي ان، الخط AB يقطع الخط m في النقطتين O و Q، من بديهية ١، يكون $O = Q$

بما ان $A\text{-}Q\text{-}B \longrightarrow A\text{-}O\text{-}B$

ـــــــ A و B في جهتين متعاكستين من O على الخط AB. بتعبير آخر، A و B في شعاعين متعاكسين نقطة بدايتهما O.
وهذا يخالف الفرض بان A و B تقعان على الشعاع $\overrightarrow{OA}$. لذا فان فرضيتنا خاطئة.
اي ان كل نقاط OA تقع في نفس الجهة من m.
(ز) يستنتج البرهان مباشرة من تعريف الشعاع ومبرهنة ٨.

٤-٦ داخل وخارج المثلث

تعريف ١٣

داخل ABC Δ هو مجموعة كل النقاط الناتجة من تقاطع
(أ) جهة المستقيم AB التي تحتوي C.
(ب) جهة المستقيم AC التي تحتوي B.
(جـ) جهة المستقيم BC التي تحتوي A.
خارج مثلث هو مجموعة كل النقاط التي لاتقع على المثلث ولاتقع في داخله.

مبرهنة ٢٩

داخل مثلث هو مجموعة محدبة.

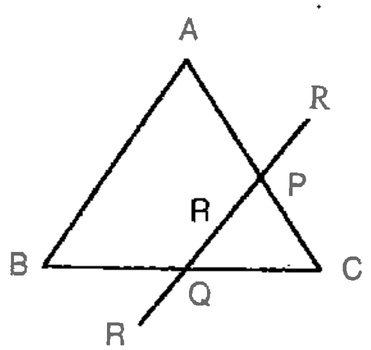
البرهان

ليكن ABC مثلثا.
داخل المثلث ABC هو تقاطع جهة AB التي تحتوي C وجهة AC التي تحتوي B

وجهة BC التي تحتوي A
من مبرهنة ٢٥ ⟵ جهة المستقيم هي مجموعة محدبة
ومن مبرهنة ٢٦ ⟵ تقاطع ثلاث مجموعات محدبة هي مجموعة محدبة
⟵ داخل ΔABC هو مجموعة محدبة.

مبرهنة ٣.

اذا كانت P, Q نقطتين على ضلعي مثلث، و R نقطة على المستقيم PQ وفي داخل المثلث، فان P-R-Q.



شكل (٢٤)

البرهان

ليكن ABC مثلثا، P نقطة على الضلع A-C و Q نقطة على الضلع B-C، R نقطة على المستقيم PQ وفي داخل المثلث.
من بديهية ٧، تتحقق واحدة فقط مما يلي:
P-Q-R ، Q-P-R ، P-R-Q

نفرض ان P-Q-R تتحقق، وبما ان Q على المستقيم BC ، فان P و R في جهتين متعاكستين من BC.

بما ان الشعاع CA لايقع على الخط BC لكن نقطة بدايته على الخط BC ، فمن مبرهنة ٢٨(و)،

كل نقاط الشعاع CA تقع في نفس الجهة من BC

اي ان A و P في نفس الجهة من BC.

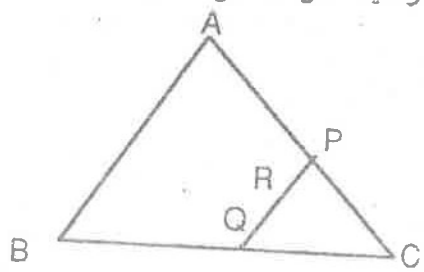
ومن مبرهنة ٢٧(أ)، A و R تقعان في جهتين متعاكستين من BC

اي ان R لاتقع في جهة BC التي تحتوي A مناقضا الفرض بان R في داخل المثلث.

وبنفس الطريقة نتوصل الى تناقض ، اذا فرضنا R-P-Q. لذا فان P-R-Q تتحقق.

مبرهنة ٣١

اذا كانت P, Q نقطتين على ضلعي مثلث فان P-Q هي مجموعة جزئية من داخل المثلث.



شكل (٢٥)

البرهان

ليكن ABC مثلثا، وفيه النقطة P على الضلع A-C والنقطة Q على الضلع B-C. لتكن R نقطة في P-Q.

يجب ان نبرهن ان R في داخل المثلث.

بما ان الشعاع CA لايقع على المستقيم BC وان نقطة

بدايته C تقع على BC ، فمن مبرهنة ٢٨(و)، كل نقاط $\overrightarrow{CA}$ تقع في نفس الجهة من BC ،اي ان A و P في نفس الجهة من BC.

وكذلك، بما ان P-R-Q ، فان R و P تقعان على الشعاع $\overrightarrow{QP}$. وبما ان Q على الخط BC ، فانه من مبرهنة ٢٨ (و) كل نقاط QP تقع في نفس الجهة من BC ، اي ان R ,P في نفس الجهة من BC، ومن مبرهنة ٢٧(أ)، النقطتان A و R تقعان في نفس الجهة من BC. اي ان R تقع في جهة BC التي تحتوي A.

مرة ثانية، وبنفس الطريقة نستطيع ان نبين ان R تقع في جهة AC التي تحتوي B.

كذلك، بما ان C ,Q تقعان على الشعاع $\overrightarrow{BC}$ وان $\overrightarrow{BC}$ لايقع على المستقيم AB ونقطة بدايته B على AB ، فمن مبرهنة ٢٨(و)، كل نقاط $\overrightarrow{BC}$ تقع في نفس الجهة من AB اي ان Q,C في نفس الجهة من AB.وبالمثل بالنسبة الى P,C.

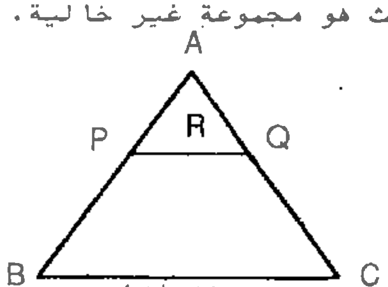
ومن مبرهنة ٢٧(جـ)، P و Q في جهة AB التي تحتوي C.

من مبرهنة ٢٥، جهة المستقيم AB التي تحتوي C هي مجموعة محدبة، فان P-Q هي مجموعة جزئية من جهة المستقيم AB التي تحتوي C. وبما ان R في P-Q ، فان R في جهة المستقيم AB التي تحتوي C.

من الخطوات اعلاه، نستنتج ان R في داخل المثلث.

مبرهنة ٣٢

داخل مثلث هو مجموعة غير خالية.



شكل (٢٦)

البرهان

ليكن ABC مثلثا.

من بديهية ٩، توجد نقطة P بحيث ان A-P-B

وكذلك توجد نقطة Q بحيث A-Q-C.

من مبرهنة ٢، $P \neq Q$

من بديهية ٩، توجد نقطة R بحيث ان P-R-Q

$\longleftarrow$ $R \in P\text{-}Q$

من مبرهنة ٣١، P-Q هي مجموعة جزئية من داخل المثلث

$\longleftarrow$ R في داخل المثلث

لذا، فان داخل المثلث هو مجموعة غير خالية.

مبرهنة ٣٣ مهم

في المثلث ABC ، اذا كان A-D-B ، فان C-D مع داخل المثلث ACD وداخل المثلث BCD تكون تجزئة لداخل المثلث ABC.

البرهان

ليكن داخل $S = \Delta ABC$ ، داخل $S_1 = \Delta ABC$ داخل $S_2 = \Delta BCD$. يجب ان نبرهن ان C-D مع S_1 و S_2 تكون تجزئة الى S.

يجب ان نبين لكل X في S ، فان X تنتمي الى واحدة وواحدة فقط من المجموعات C-D ، S_1 ، S_2

$X \in S$ $\longleftarrow$ X في جهة AB التي تحتوي C ،

X في جهة AC التي تحتوي B ، و

X في جهة BC التي تحتوي A .

بما ان A-D-B ، ومن بديهية ٦، AB = AD = BD

$\longleftarrow$ X في جهة AD التي تحتوي C وفي جهة BD التي

تحتوي C.
بما ان A-D-B و A على AC ، فانه من مبرهنة ٢٨(و)
X في جهة AC التي تحتوي D.
وبنفس الطريقة، X في جهة BC التي تحتوي D.
اما $X \in C\text{-}D$ او $X \notin C\text{-}D$

الحالة (١)

نفرض ان $X \in C\text{-}D$ ، ومن مبرهنة ١٣، $X \in CD$
ومن تعريف الفصل ومبرهنة ٢٠، X لاتقع في جهتي CD.
وبما ان A-D-B، فان A و B في جهتين متعاكستين من CD

⟵ X لاتقع في جهة CD التي تحتوي A.
ولاتقع في جهة CD التي تحتوي B.
⟵ $X \notin S_1$ و $X \notin S_2$
⟵ تنتمي X الى واحدة فقط من المجموعات:
$C\text{-}D$ ، S_1, S_2

الحالة (٢)

نفرض ان $X \notin C\text{-}D$ ⟵ اما $X \in CD$ او $X \notin CD$

(أ) نفرض ان $X \in CD$ ، ومن بديهية ٧،
اما $X\text{-}C\text{-}D$ او $C\text{-}D\text{-}X$
اذا كان $X\text{-}C\text{-}D$ وبما ان $C \in AC$ ، فان X و D في جهتين متعاكستين من AC
ومن مبرهنة ٢٨ (و)، B و D في نفس الجهة من AC
ومن مبرهنة ٢٧(أ)، B و X في جهتين متعاكستين من AC