اي ان X لاتقع في جهة AC التي تحتوي B

$\longleftarrow$ $X \notin S$ وهذا يناقض الفرض.

اذا كان C-D-X وبما ان $D \in AB$ ، فان X و C في جهتين متعاكستين من AB.

$\longleftarrow$ X لاتقع في جهة AB التي تحتوي C

$\longleftarrow$ $X \notin S$ وهذا يناقض الفرض

(ب) نفرض $X \notin CD$

من مبرهنة ٢٠ $\longrightarrow$ تقع X في احدى جهتي CD

$\longleftarrow$ اما X في جهة CD التي تحتوي A او في جهة CD التي تحتوي B.

نفرض ان X في جهة CD التي تحتوي A $\longleftarrow$ X لاتقع في جهة CD التي تحتوي B

$\longleftarrow$ $X \notin S_2$

ومن اعلاه، X في جهة AC التي تحتوي D و X في جهة AD التي تحتوي C

$\longleftarrow$ $X \in S_1$

وبما ان $X \notin S_2$ و $X \notin C\text{-}D$ ، فان X تنتمي الى واحدة فقط من المجموعات $C\text{-}D$, S_1, S_2.

اذا كانت X في جهة CD التي تحتوي B ، فان X لاتقع في جهة CD التي تحتوي A ، اي ان $X \notin S_1$.

ومن اعلاه، X في جهة BD التي تحتوي C و X في جهة BC التي تحتوي D.

فان $X \in S_2$

وبما ان $X \notin C\text{-}D$ و $X \notin S_1$ ، فان X تنتمي الى واحدة وواحدة فقط من المجموعات:

$C\text{-}D$ ، $S_1; S_2$

تعريف ١٤

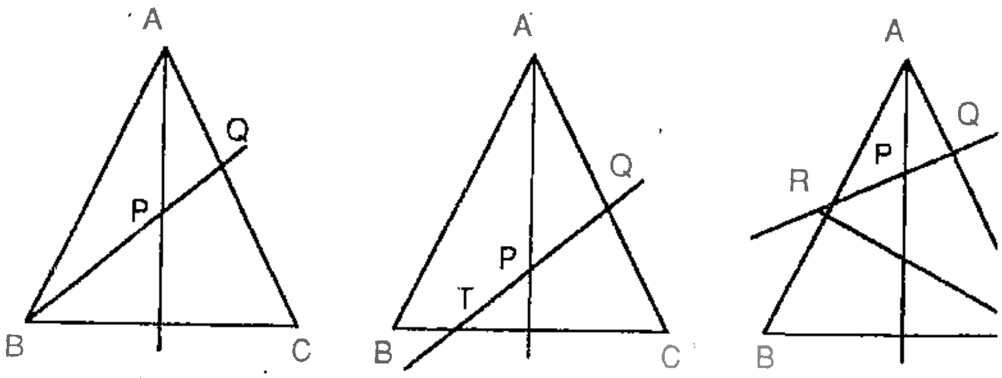
في اي مثلث، الضلع الذي لايحتوي احد رؤوس المثلث كنقطة نهايته يدعى الضلع المقابل لذلك الراس. والراس يدعى الراس المقابل.

مبرهنة ٣٤

المستقيم الذي يمر براس مثلث ونقطة في داخل المثلث، فانه يقطع الضلع المقابل.

البرهان

ليكن m مستقيما يمر من راس A لمثلث ABC ، اي انه يقطع كلا الخطين AB و AC ، لذلك، من مبرهنة ٢، m لايمكن ان يقطعهما مرة ثانية. نفرض ان m يمر من نقطة P في داخل المثلث. نأخذ اي نقطة Q على A-C. فانه من بديهية باخ، اذا كان الخط PQ لايحتوي على راس، يقطع A-B او B-C.



(ج) (ب) (أ)

شكل (٢٧)

الحالة (١)   (شكل ٢٧(أ))

نفرض ان المستقيم QP يقطع A-B في نقطة R ، فانه من مبرهنة ٣٠، يكون Q-P-R. في المثلث QRC ، بما ان Q-P-R ، فانه تتحقق بديهية باخ، والخط AP طالما لايمكن ان يقطع المستقيم AC مرة ثانية، فانه يقطع R-C في نقطة، ولتكن S. اي ان R-S-C. مرة ثانية، في المثلث RBC تتحقق بديهية باخ، وبما ان الخط AS لايمكن ان يقطع الخط AB مرة ثانية، فانه يجب ان يقطع B-C.

الحالة (٢)   (شكل ٢٧(ب))

نفرض ان المستقيم QP يقطع B-C في نقطة T، فانه من مبرهنة ٣٠، يكون Q-P-T ، ومرة ثانية تتحقق بديهية باخ في المثلث QTC. بما ان AP لايمكن ان يقطع المستقيم AC مرة ثانية، فانه يجب ان يقطع T-C ، اي انه يقطع B-C.

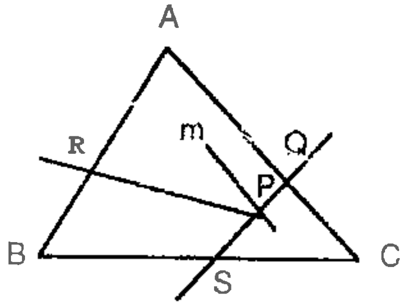
الحالة (٣)   (شكل ٢٧(ج))

نفرض ان الخط QP يحتوي على رأس؛ بما انه لايمكن ان يحتوي على A او C، لذلك فانه يحتوي على B. (يترك كتمرين لبيان ان Q-P-B.) بتطبيق بديهية باخ على المثلث QBC ، بطريقة مشابهة للبرهان اعلاه، نستنتج ان المستقيم AP يقطع B-C.

مبرهنة ٣٥

المستقيم الذي يمر في نقطة داخل مثلث، لكنه

لايحتوي على راس من المثلث، يقطع في الاقل احد الاضلاع.



شكل (٢٨)

البرهان

لتكن P نقطة في داخل مثلث ABC ، وليكن m مستقيما يمر من P. نأخذ اية نقطة على ضلع، ولتكن Q في A-C ، اذا كان m يحتوي على Q، فان هذا يؤدي الى النتيجة. اذا كان m لايحتوي على Q، نأخذ الخط QP. من بديهية باخ اذا كان الخط QP لايحتوي على B، فانه اما يقطع A-B او يقطع B-C. اذا كان الخط QP يقطع A-B في نقطة، ولتكن R، فانه يتكون مثلث ARQ ؛ اذا كان QP يقطع B-C في نقطة، ولتكن S، فانه يتكون مثلث QSC.

يستنتج من مبرهنة ٣٠ ان Q-P-R ، وفي الحالة الاخرى يكون Q-P-S. لذلك فانه في اي حالة، تطبق بديهية باخ، و m يقطع اما A-R او A-Q في المثلث ARQ ، او S-C او Q-C في المثلث QBC. لذلك، في اي حالة، يقطع احد اضلاع المثلث ABC. اخيرا، اذا كان المستقيم QP يحتوي على B، فان Q-P-B (لاحظ الاسئلة ادناه) وبهذا نتوصل الى النتيجة.

تمارين ٤-٦

١- برهن على انه اذا كان $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ، فان $A = C$

٢- برهن على ان $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$

٣- برهن على ان كلا من المجموعات التالية محدبة :
ϕ ، $\{A\}$ ، مجموعة كل النقاط (المستوي)

٤- برهن او ادحض كلا مما يلي:

أ) $A-B = C-D$ اذا وفقط اذا $A = C$ او $A = D$

ب) نهايتا القطعة وحيدتان.

جـ) اذا كانت A, B نقطتين مختلفتين، فان $\{A, B\}$ هي مجموعة محدبة.

د) اتحاد مجموعتين محدبتين هي مجموعة محدبة.

هـ) مجموعة جزئية من مجموعة محدبة تكون مجموعة محدبة.

٥- برهن على انه اذا كان مستقيم يمر من نقطة داخلية لمثلث ونقطة على ضلع من المثلث، ولايقطع اي من الضلعين الاخرين، فانه يمر بالرأس المقابل.

٦ـ برهن على انه في مثلث ABC ، اذا كان A-D-B ، و B-E-C فان نقطة تقاطع A-E و C-D تقع في داخل المثلث.

٧ـ برهن على ان نقطة تقع في داخل مثلث اذا وفقط اذا تقع بين رأس ونقطة على الضلع المقابل.

مع تحيات مكتب
اسامة
للاستنساخ
بغداد - باب المعظم

٤-٧ الزوايا

تعريف ١٥

ليكن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ شعاعين مختلفين لايقعان على مستقيم واحد ولهما نقطة بداية مشتركة A، اتحاد الشعاعين مع نقطة البداية يدعى زاوية.
الشعاعان هما ضلعي الزاوية. المستقيم الذي يحتوي الضلع يدعى خط الضلع. نقطة البداية تدعى الرأس.

رمز

يرمز للزاوية التي هي اتحاد الشعاعين AB و AC بالرمز:

$\angle BAC$ او $\angle CAB$

او للتبسيط $\angle A$

مبرهنة ٣٦

ليكن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ شعاعين لايقعان على مستقيم واحد وان B' على $\overrightarrow{AB}$ و C' على $\overrightarrow{AC}$ فان

$$\angle BAC = \angle BAC' = \angle B'AC = \angle B'AC'$$

البرهان

تبرهن من تعريف ١٥ ومبرهنة ٢٨(ز).

قاعدة لغوية

زاوية مثلث هي الزاوية التي يكون رأسها هو رأس في المثلث وقطعتي المثلث التي يكون الرأس كنقطة نهايتهما كمجموعتين جزئيتين من ضلعيها.
ضلع مقابل لزاوية هو ضلع المثلث الذي لايكون رأس الزاوية كنقطة نهاية. هذا يعني، مثلا الضلع المقابل للزاوية BAC هو نفس الضلع المقابل للرأس A.

تعريف ١٦

داخل زاوية CAB هو تقاطع جهة الشعاع AC التي تحتوي B وجهة الشعاع AB التي تحتوي C.
خارج زاوية هو مجموعة كل النقاط التي لاتقع في داخل الزاوية ولا على الزاوية.
عندما نتكلم عن جهة شعاع او جهة قطعة، فمن الواضح نقصد احدى جهتي المستقيم الذي يحتوي الشعاع او القطعة.

مبرهنة ٣٧

للزاوية يوجد رأس واحد فقط.

البرهان

يستنتج مباشرة من تعريف الزاوية ومن مبرهنة ٢٨ (جـ)

مبرهنة ٣٨

داخل زاوية هو مجموعة غير خالية.

البرهان

بما ان داخل مثلث هو مجموعة جزئية من داخل زاوية، ومن مبرهنة ٣٢؛ داخل المثلث هو مجموعة غير خالية، فان داخل الزاوية هو مجموعة غير خالية.

مبرهنة ٣٩

داخل زاوية هو مجموعة محدبة.

البرهان

لتكن $\angle BAC$ زاوية

داخل $\angle BAC$ هو تقاطع جهة $\overleftrightarrow{AB}$ التي تحتوي C وجهة $\overleftrightarrow{AC}$ التي تحتوي B.

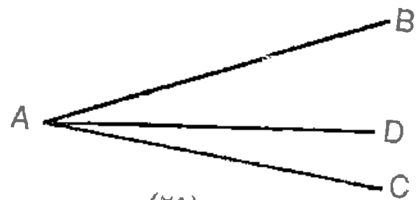
من مبرهنة ٢٥، جهة المستقيم هي مجموعة محدبة

ومن مبرهنة ٢٦، تقاطع n من المجموعات المحدبة، $n = 2$، هو مجموعة محدبة.

$\longleftarrow$ داخل $\angle BAC$ هو مجموعة محدبة.

مبرهنة ٤٠

اذا كانت D نقطة في داخل $\angle BAC$ ، فان كل نقطة على الشعاع $\overrightarrow{AD}$ تقع في داخل $\angle BAC$.



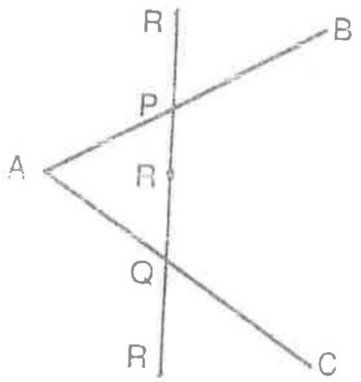
شكل (٢٩)

البرهان

بما ان D في داخل BAC ∠ ، فان D لاتقع على AB ولاتقع على $\overrightarrow{AC}$.
لذا فان AD لايقع على AB او على AC وبما ان نقطة بدايته A تقع على AB ، فانه من مبرهنة ٢٨(و) كل نقاط $\overrightarrow{AD}$ تقع في نفس الجهة من $\overrightarrow{AB}$
وبما ان D في جهة AB التي تحتوي C، فان كل نقاط AD تقع في جهة AB التي تحتوي C.
بما ان نقطة بداية $\overrightarrow{AD}$ تقع على AC، فانه من مبرهنة ٢٨(و) كل نقاط AD تقع في نفس الجهة من AC.
وبما ان D تقع في جهة AC التي تحتوي B، فان كل نقاط $\overrightarrow{AD}$ تقع في جهة AC التي تحتوي $\overrightarrow{B}$ لذا، فانه من تعريف داخل زاوية كل نقاط الشعاع AD تقع في داخل الزاوية.

مبرهنة ٤١ للطلاب

اذا كانت Q ,P نقطتين على ضلعي زاوية، و R نقطة على الخط PQ وفي داخل الزاوية، فان P-R-Q



شكل (٣٠)

البرهان

لتكن $\angle BAC$ زاوية، وفيها $P \in \overrightarrow{AB}$ و $Q \in \overrightarrow{AC}$ وان $R \in \overline{PQ}$ و R في داخل $\angle BAC$. يجب ان نبرهن $P-R-Q$.

R في داخل $\angle BAC$ ، و P و Q على ضلعي $\angle BAC$ فان النقاط P, Q, R مختلفة وبما انها تقع على مستقيم واحد فمن بديهية ٧، تتحقق واحدة فقط ممايلي:

$P-R-Q$ ، $P-Q-R$ ، $R-P-Q$

نفرض ان $R-P-Q$.

بما ان $P \in \overleftrightarrow{AB}$ ، فان R و Q في جهتين متعاكستين من $\overleftrightarrow{AB}$.

بما ان $\overrightarrow{AC}$ لايقع على $\overleftrightarrow{AB}$ لكن نقطة بدايته A تقع على $\overleftrightarrow{AB}$ ، فانه من مبرهنة ٢٨(و)، كل نقاط $\overrightarrow{AC}$ تقع في نفس الجهة من $\overleftrightarrow{AB}$

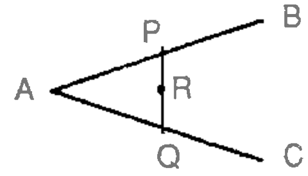
بما ان $Q, C \in \overrightarrow{AC}$ ، فان Q, C في نفس الجهة من $\overleftrightarrow{AB}$ ومن مبرهنة ٢٧(أ)، فان R, C في جهتين متعاكستين من $\overleftrightarrow{AB}$ ، اي ان R لاتقع في جهة $\overleftrightarrow{AB}$ التي تحتوي C وهذا يؤدي الى ان R لاتقع في داخل $\angle BAC$ وبذلك يناقض

الفرض.

وبنفس الطريقة، نتوصل الى تناقض اذا فرضنا ان P-Q-R. لذا فان P-R-Q تتحقق.

مبرهنة ٤٢

اذا كانت P, Q نقطتين على ضلعي زاوية، فان P-Q هي مجموعة جزئية من داخل الزاوية.



شكل (٣١)

البرهان

لتكن $\angle BAC$ زاوية، ولتكن $P \in \overrightarrow{AB}$ و $Q \in \overrightarrow{AC}$. يجب ان نبرهن ان P-Q هي مجموعة جزئية من داخل $\angle BAC$

لتكن $R \in P\text{-}Q$ ⟵ P-R-Q

⟵ $R, Q \in \overrightarrow{PQ}$

$\overrightarrow{PQ}$ لايقع على $\overleftrightarrow{AB}$ و $P \in AB$، من مبرهنة ٢٨(و)، كل نقاط $\overrightarrow{PQ}$ تقع في نفس الجهة من AB.

اي ان R, Q في نفس الجهة من $\overleftrightarrow{AP} = \overleftrightarrow{AB}$.

اي ان R تقع في جهة $\overleftrightarrow{AP}$ التي تحتوي Q.

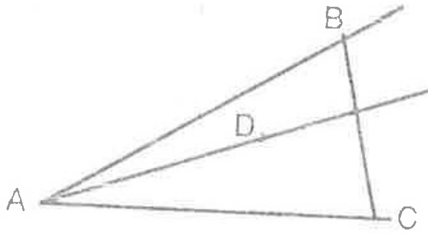
وبنفس الطريقة نبرهن ان R تقع في جهة $\overleftrightarrow{AQ}$ التي تحتوي P.

من تعريف داخل زاوية، تقع R في داخل $\angle PAQ$ ومن مبرهنة ٣٦، $\angle PAQ = \angle BAC$

لذا فان R تقع في داخل $\angle BAC$.

مبرهنة ٤٣ المعلم

اذا كانت D نقطة في داخل $\angle BAC$ فان $\overrightarrow{AD}$ يقطع $B-C$.



شكل (٣٢)

البرهان

D في داخل $\angle BAC$ ⟵

D في جهة AB التي تحتوي C وفي جهة AC التي تحتوي B اما D تقع على المستقيم BC او لاتقع.

(١) نفرض ان $D \in BC$ وبما ان B, C على ضلعي $\angle BAC$ و D في داخل الزاوية، فانه من مبرهنة ٤١، $B-D-C$

اي ان $\overrightarrow{AD}$ يقطع $B-C$.

(٢) نفرض ان D لاتقع على BC.

من مبرهنة ٢٠ وتعريف الفصل، تقع D في جهة BC التي تحتوي A او في جهة BC التي لاتحتوي A.

(أ) نفرض ان D تقع في جهة BC التي تحتوي A وبما ان D تقع في جهة AB التي تحتوي C.

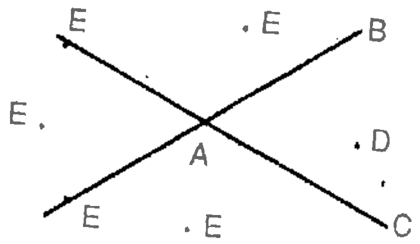
وفي جهة AC التي تحتوي B، فان D تقع في

داخل ΔABC لذا فان $\overrightarrow{AD}$ يقطع $B-C$ (لماذا؟).

(ب) نفرض ان D تقع في جهة BC التي لاتحتوي A.
اي ان A, D في جهتين متعاكستين من BC.
من تعريف الفصل ومبرهنة ٢٠، توجد نقطة H
على BC بحيث ان $A-H-D \longrightarrow H \in \overrightarrow{AD}$
ومن مبرهنة ٤٠، $\longrightarrow$ H في داخل $\angle BAC$
بما ان $H \in BC$ وفي داخل $\angle BAC$ فانه من
مبرهنة ٤١، يكون $B-H-C \longrightarrow H \in B-C$
وبما ان $H \in \overrightarrow{AD}$ ، فان $\overrightarrow{AD}$ يقطع $B-C$.

مبرهنة ٤٤ المعلاي

اذا كانت D نقطة في داخل $\angle BAC$ ، و E اية نقطة في خارج الزاوية، فان القطعة $D-E$ تقطع الزاوية.



شكل (٣٣)

البرهان

D في داخل $\angle BAC$ ، فان D تقع في جهة $\overrightarrow{AB}$ التي تحتوي C وفي جهة $\overrightarrow{AC}$ التي تحتوي B.
E تقع في خارج الزاوية، فان E لاتقع في داخل الزاوية ولاعلى الزاوية.
توجد عدة حالات تؤخذ بنظر الاعتبار:
(١) تقع E على الشعاع المعاكس للشعاع $\overrightarrow{AB}$
(٢) تقع E على الشعاع المعاكس للشعاع $\overrightarrow{AC}$

(٣) تقع E في جهة المستقيم AB التي لاتحتوي C
(٤) تقع E في جهة المستقيم AC التي لاتحتوي B.

الحالة (١)

نفرض ان E تقع على الشعاع المعاكس للشعاع $\overrightarrow{AB}$ ، اي ان E-A-B. وهذا يؤدي الى ان E و B في جهتين متعاكستين من AC ، وبما ان D في جهة $\overrightarrow{AC}$ التي تحتوي B، فانه من مبرهنة ٢٧(أ)، D, E في جهتين متعاكستين من $\overrightarrow{AC}$. من مبرهنة ٢٠ وتعريف الفصل، توجد نقطة H على $\overrightarrow{AC}$ بحيث ان D-H-E.

وبهذا، فان D-E تقطع BAC ∠.

الحالة (٢)

تبرهن بنفس طريقة الحالة (١)

الحالة (٣)

تقع E في جهة المستقيم AB التي لاتحتوي C.
وبما ان D تقع في جهة AB التي تحتوي C، فان D, E في جهتين متعاكستين من AB.من مبرهنة ٢٠ وتعريف الفصل، توجد نقطة H على AB بحيث ان D-H-E.

$H \in AB \longrightarrow H \in \overrightarrow{AB}$ ، $H = A$ او H على الشعاع المعاكس للشعاع $\overrightarrow{AB}$.

اذا كان $H \in \overrightarrow{AB}$ ، فان D-E تقطع الزاوية.

اذا كان $H = A$ ، فان D-E تقطع الزاوية.

اذا كان H تقع على الشعاع المعاكس للشعاع $\overrightarrow{AB}$ ، فان H-A-B.

ومنه نستنتج ان B و H في جهتين متعاكستين من $\overrightarrow{AC}$ ، وبما ان D في جهة $\overrightarrow{AC}$ التي تحتوي B، فانه من مبرهنة ٢٧(أ)، D, H في جهتين متعاكستين من $\overrightarrow{AC}$.ومن تعريف الفصل، ومبرهنة ٢٠، توجد نقطة R على $\overrightarrow{AC}$ بحيث ان D-R-H.

D-R-H ، وبما ان D-H-E ، فان من مبرهنة ٤، يكون

D-R-H-E ⟵ D-R-E

⟵ R ∈ D-E ، وبما ان $R \in \overrightarrow{AC}$

⟵ D-E تقطع الزاوية.

الحالة (٤)

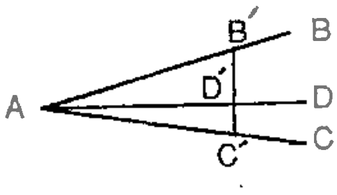
تبرهن بنفس طريقة الحالة (٣).

تعريف ١٧

لتكن BAC زاوية متكونة من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$، فان $\overrightarrow{AD}$ يكون بين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ اذا وفقط اذا AD في داخل ∠ BAC.

مبرهنة ٤٥

الشعاع $\overrightarrow{AD}$ يكون بين شعاعين آخرين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ اذا وفقط اذا توجد نقاط B' على $\overrightarrow{AB}$ ، C' على $\overrightarrow{AC}$ ، و D' على $\overrightarrow{AD}$ ، بحيث ان B'-D'-C'.



شكل (٣٤)

البرهان

(١) نفرض ان $\overrightarrow{AD}$ يقع بين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$

من تعريف ١٧، $\overrightarrow{AD}$ يقع في داخل $\angle BAC$

من بديهية ٩، توجد نقطة B' على $\overrightarrow{AB}$ وتوجد نقطة C' على $\overrightarrow{AC}$

من مبرهنة ٣٦ ⟵ $\angle BAC = \angle B'AC'$

⟵ $\overrightarrow{AD}$ في داخل $\angle B'AC'$.

من مبرهنة ٤٣ ⟵ $\overrightarrow{AD}$ يقطع $B'-C'$ في نقطة D'

⟵ $B'-D'-C'$

(٢) نفرض انه توجد نقاط $B' \in \overrightarrow{AB}$, $C' \in \overrightarrow{AC}$، و $D' \in \overrightarrow{AD}$ بحيث ان $B'-D'-C'$.

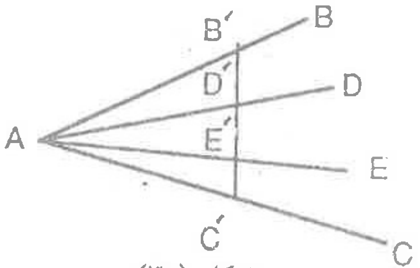
من مبرهنة ٤٢ ⟵ D' تقع في داخل $\angle BAC$. وبما ان $D' \in \overrightarrow{AD}$ ، فانه من مبرهنة ٤٠، كل نقاط $\overrightarrow{AD}$ تقع في داخل $\angle BAC$.

من تعريف ١٧ ⟵ $\overrightarrow{AD}$ يقع بين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.

مبرهنة ٤٦ للعلاج

(أ) اذا كان $\overrightarrow{AD}$ يقع بين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ، وان $\overrightarrow{AE}$ يقع بين $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AC}$، فان $\overrightarrow{AE}$ يقع بين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.

(ب) اذا كان $\overrightarrow{AD}$ يقع بين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ، وان $\overrightarrow{AC}$ يقع بين $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AE}$ (حيث ان E تقع في جهة $\overleftrightarrow{AB}$ التي تحتوي D)، فان $\overrightarrow{AC}$ يقع بين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AE}$.



شكل (٣٥)

برهان (أ) شكل (٣٥)

$\overrightarrow{AD}$ يقع بين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ، فانه من مبرهنة ٤٥، توجد نقاط $B' \in \overrightarrow{AB}$ ، $C' \in \overrightarrow{AC}$ ، $D' \in \overrightarrow{AD}$ بحيث ان $B'-D'-C'$

من مبرهنة ٣٦ $\longleftarrow$ $\angle DAC = \angle D'AC'$.

$\overrightarrow{AE}$ يقع بين $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AC}$.

ومن تعريف ١٧، فان $\overrightarrow{AE}$ في داخل $\angle DAC$ $\longleftarrow$ $\overrightarrow{AE}$ في داخل $\angle D'AC'$.

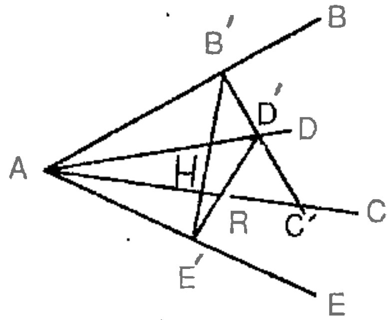
من مبرهنة ٤٣ $\longleftarrow$ $\overrightarrow{AE}$ يقطع $D'-C'$ في نقطة E'

$\longleftarrow$ $D'-E'-C'$

وبما ان $D'-E'-C'$ و $B'-D'-C'$ ، فانه من مبرهنة ٤، يكون $B'-D'-E'-C'$ $\longleftarrow$ $B'-E'-C'$.

وبما ان $B'-E'-C'$ و $B' \in \overrightarrow{AB}$ ، $E' \in \overrightarrow{AE}$ ، و $C' \in \overrightarrow{AC}$

ومن مبرهنة ٤٥، $\overrightarrow{AE}$ يقع بين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.



شكل (٣٦)

برهان (ب) (شكل ٣٦)

$\overrightarrow{AD}$ يقع بين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.

من مبرهنة ٤٥ ⟵ توجد نقاط $D' \in \overrightarrow{AD}$ ، $B' \in \overrightarrow{AB}$ ، و $C' \in \overrightarrow{AC}$ بحيث ان $B'-D'-C'$.

من بديهية ٩ ⟵ توجد نقطة E' على $\overrightarrow{AE}$.

$\overrightarrow{AC}$ يقع بين $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AE}$ ، ومن تعريف ١٧، ⟵ $\overrightarrow{AC}$ يقع في داخل $\angle DAE$.

وبما ان $D' \in \overrightarrow{AD}$ و $E' \in \overrightarrow{AE}$ ، فانه من مبرهنة ٣٦،

$\angle DAE = \angle D'AE'$

⟵ $\overrightarrow{AC}$ يقع في داخل $\angle D'AE'$

من مبرهنة ٤٣ ⟵ $\overrightarrow{AC}$ يقطع $D'E'$ في $R \in D'-E'$.

⟵ $D'-R-E'$ و $R \in \overrightarrow{AC}$

⟵ E' و D' في جهتين متعاكستين من $\overleftrightarrow{AC}$.

$B'-D'-C'$ ⟵ $B', D' \in \overrightarrow{C'B'}$

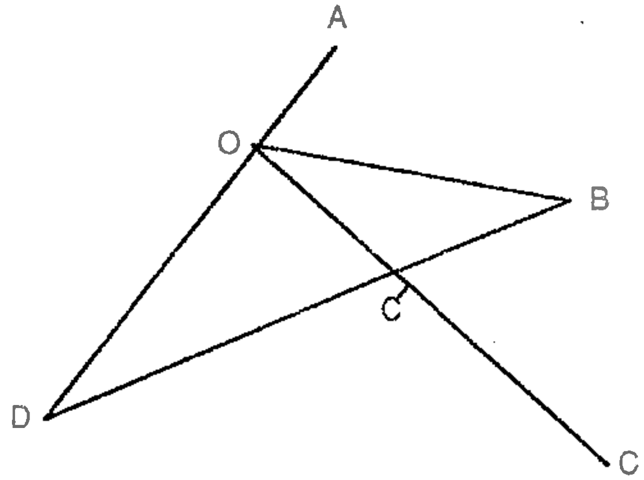
بما ان $\overrightarrow{C'B'}$ لايقع على $\overleftrightarrow{AC}$ ، لكن نقطة بدايته C' تقع على $\overleftrightarrow{AC}$، فانه من مبرهنة ٢٨(و)، كل نقاط $\overrightarrow{C'B'}$ تقع في نفس الجهة من $\overleftrightarrow{AC}$. لذا فان D', B' تقعان في نفس الجهة من $\overleftrightarrow{AC}$.

من مبرهنة ٢٧(أ) ⟵ B', E' في جهتين متعاكستين من $\overleftrightarrow{AC}$. من تعريف الفصل ومبرهنة ٢٠ ⟵ توجد نقطة H على $\overleftrightarrow{AC}$ بحيث ان $E'-H-B'$ وبما ان $B' \in \overrightarrow{AB}$، $E' \in \overrightarrow{AE}$ و $H \in \overrightarrow{AC}$

فان من مبرهنة ٤٥ ⟵ $\overrightarrow{AC}$ يقع بين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AE}$.

مبرهنة ٤٧

اذا كان $\overrightarrow{OB}$ يقع بين $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OC}$، وان $\overrightarrow{OD}$ هو الشعاع المعاكس للشعاع $\overrightarrow{OA}$، فان $\overrightarrow{OC}$ يقع بين $\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{OD}$.



شكل (٣٧)

البرهان

$\overrightarrow{OB}$ يقع بين $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OC}$، من تعريف ١٧ ⟵ $\overrightarrow{OB}$ في داخل $\angle AOC$ ⟵ B في جهة $\overrightarrow{OC}$ التي تحتوي A.

بما ان OA و $\overrightarrow{OD}$ شعاعين متعاكسين، و O هي نقطة بداية $\overrightarrow{OC}$ ، فان A و D في جهتين متعاكستين من $\overrightarrow{OC}$.

من مبرهنة ٢٧(أ) ـــــ D, B في جهتين متعاكستين من $\overrightarrow{OC}$. من تعريف الفصل ومبرهنة ٢٠ ـــــ توجد نقطة C' على $\overrightarrow{OC}$ بحيث ان D-C'-B.

من مبرهنة ٤٥ ـــــ $\overrightarrow{OC}$ يقع بين $\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{OD}$.

تمارين ٤-٧

١- في $\angle BAC$ حيث A-D-B و A-C-E ، برهن ان D-E و B-C تتقاطعان.

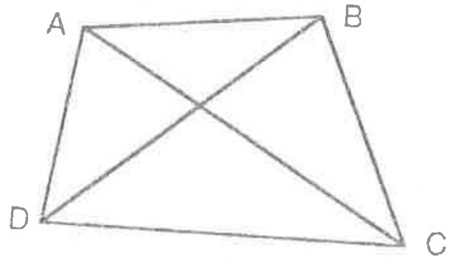
٢- لتكن A, B, C ثلاث نقاط لاتقع على مستقيم واحد والنقاط D, E, F بحيث ان B-C-D ، A-E-C، وB-E-F. برهن ان F تقع في داخل $\angle ACD$.

٣ـ اذا كان $\overrightarrow{AD}$ يقع بين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ، فانه من الخطا اما $\overrightarrow{AB}$ يقع بين $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AC}$ او ان $\overrightarrow{AC}$ يقع بين $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AB}$.

٤ـ اذا كان $\overrightarrow{AD}$ يقع بين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ وان $\overrightarrow{AB'}$ و $\overrightarrow{AC'}$ هما الشعاعين المعاكسين للشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ، على التوالي، فان $\overrightarrow{AD'}$ ، الشعاع المعاكس للشعاع $\overrightarrow{AD}$ ، يقع بين $\overrightarrow{AB'}$ و $\overrightarrow{AC'}$.

٤-٨ رباعي الاضلاع المحدب Convex Quadrilateral

تعريف ١٨



شكل (٣٨)

لتكن A, B, C, D اربع نقاط مختلفة لايوجد اي ثلاث منها على مستقيم واحد، اتحاد النقاط الاربع مع القطع الاربع A-B ، B-C ، C-D ، و D-A يدعى رباعي اضلاع. النقاط تدعى الرؤوس، القطع تدعى الاضلاع، الخطوط التي تحتوي الاضلاع تدعى خطوط الاضلاع.

ضلعان لهما نقطة نهاية مشتركة يدعيان متجاورين، ضلعان غير متجاورين يدعيان متقابلين.

زاوية رباعي اضلاع هي الزاوية التي تحتوي على راس وضلعين متجاورين.

زاويتان لرباعي اضلاع تكونان متجاورتين اذا

اشتركتا بضلع، زاويتان غير متجاورتين تكونان متقابلتين.
رأسا الزاويتين المتجاورتين يدعيان رأسين متجاورين، رأسين غير متجاورين يدعيان رأسين متقابلين.
القطعة الواصلة بين رأسين متقابلين تدعى قطر.

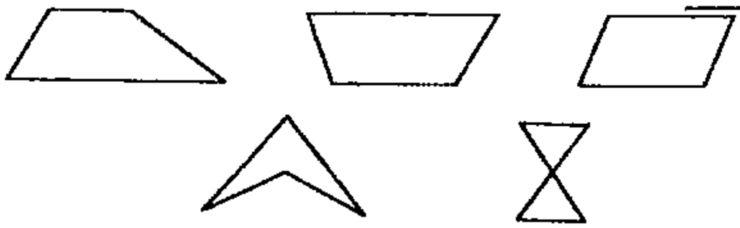
تعريف ١٩

اذا لم يتقاطع ضلعان في رباعي اضلاع، فانه يدعى بسيط (a simple).

تعريف ٢٠

(أ)

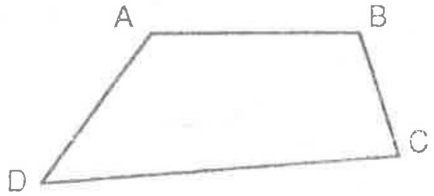
(ب)



شكل (٣٩)

اذا كان لاي رأسين متجاورين لرباعي اضلاع، الرأسان اللذان لايقعان على خط الضلع للرأسين المتجاورين يكونان في نفس الجهة من خط الضلع، فان رباعي الاضلاع يدعى رباعي اضلاع محدب.
اي انه عندما نتكلم عن رباعي اضلاع محدب نقصد الاشكال المبينة في الشكل (أ) ادناه بدلا من تلك الاشكال المبينة في الشكل (ب).

تعريف ٢١



شكل (٤٠)

ان داخل رباعي الاضلاع المحدب هو تقاطع كل انصاف المستوي المتعينة من خطوط الاضلاع والتي تحتوي على الرؤوس التي لاتقع على خطوط الاضلاع.

هكذا، اذا كان ABCD رباعي اضلاع محدب كما في الشكل فان داخله هو تقاطع:

١- نصف المستوي المتعين من AD الذي يحتوي C، B.

٢- نصف المستوي المتعين من AB الذي يحتوي D، C.

٣- نصف المستوي المتعين من BC الذي يحتوي D، A.

٤- نصف المستوي المتعين من DC الذي يحتوي A، B.

مبرهنة ٤٨

داخل رباعي اضلاع محدب يكون مجموعة محدبة

البرهان

ص ١١٤

يترك كتمرين.

هذه المبرهنة لاتصح اذا كان رباعي الاضلاع غير محدب.

مبرهنة ٤٩

يقطع قطرا رباعي اضلاع محدب احدهما الاخر.

البرهان

يترك كتمرين.

تمارين ٤-٨

١- برهن ان رباعي الاضلاع يكون محدبا اذا وفقط اذا كان قطريه يتقاطعان.
٢- برهن ان خطا يقطع ضلعا واحدا من رباعي اضلاع ولايمر باي رأس، فانه يقطع ضلعا ثانيا.
٣- برهن اذا كان خط يقطع ثلاثة اضلاع من رباعي اضلاع، فانه يقطع الرابع.

الفصل الخامس

التطابق والمقارنة

Congruence and Comparison

٥-١ بديهيات عن تطابق القطع

لقد ذكرنا سابقا ان التطابق هو علاقة اولية تقنية.

فيقال ان شكلا يطابق شكلا آخر.

ويرمز لهذا بالرمز ≅

فمثلا، "A-B تطابق C-D" يرمز لها:

$A\text{-}B \cong C\text{-}D$

مجموعة البديهيات

بما ان التطابق هو علاقة اولية، يجب ان نقدم بديهيات لتعطينا خواص هذه العلاقة.

بديهية ١١ (بديهية انشاء قطعة)

لتكن A-B قطعة و C نقطة على خط m، فانه على كل شعاع على m نقطة بدايته C توجد نقطة واحدة فقط D بحيث ان $A\text{-}B \cong C\text{-}D$

بديهية ١٢

تطابق القطع هو علاقة تكافؤ.

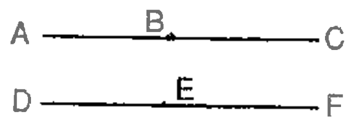
نستنتج من هذه البديهية ان كل قطعة تطابق نفسها، واذا كانت قطعة واحدة تطابق قطعة ثانية، فان

الثانية تطابق الاولى، واذا كانت قطعة واحدة تطابق قطعة ثانية، والقطعة الثانية تطابق قطعة ثالثة، فان الاولى تطابق الثالثة.

بديهية ١٣ (جمع القطع)

اذا كان (أ) A-B-C ، (ب) D-E-F ، (جـ) $A\text{-}B \cong D\text{-}E$ و (ء) $B\text{-}C \cong E\text{-}F$ فان $A\text{-}C \cong D\text{-}F$.

مبرهنة ٥. (طرح القطع)



شكل (٤١)

اذا كان (أ) A-B-C ، (ب) D-E-F ، (جـ) $A\text{-}B \cong D\text{-}E$ و (ء) $A\text{-}C \cong D\text{-}F$ فان $B\text{-}C \cong E\text{-}F$

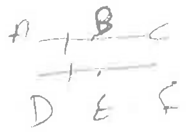
البرهان

نفرض ان B-C لاتطابق E-F. فانه من بديهية ١١، توجد نقطة G بحيث ان D-E-G و $B\text{-}C \cong E\text{-}G$. كذلك بما ان B-C لاتطابق E-F ، فانه من بديهية ١٢، نستنتج ان E-F لاتطابق E-G ، ومن هذا $F \neq G$.
لكن بما ان $A\text{-}B \cong D\text{-}E$ و $B\text{-}C \cong E\text{-}G$ ، فانه من بديهية ١٣ $A\text{-}C \cong D\text{-}G$. ولكن من الفرض $A\text{-}C \cong D\text{-}F$ فيكون من بديهية ١٢، $D\text{-}G \cong D\text{-}F$ ، ومن البديهيتين ١١ و ١٢ نستنتج ان $F = G$.
وهذا يقودنا الى تناقض. لذلك، فان فرضيتنا خاطئة.

وبذلك نستنتج ان $B-C \cong E-F$.

مبرهنة ٥١

اذا كان $A-C \cong D-F$ و B نقطة بحيث ان $A-B-C$ ،
فانه توجد ونقطة E بحيث ان $D-E-F$ و $A-B \cong D-E$.



البرهان

يترك كتمرين.

٥-١ تمارين

١- اذا كان $A-B \cong A-C$ ، هل ان $B = C$؟ ولماذا؟
٢- اذا كان A-B لاتطابق A-C، برهن ان $B \neq C$.

٥-٢ مقارنة القطع

تعريف ٢٢

A-B تكون اصغر من C-D اذا وفقط اذا توجد نقطة E بحيث ان $C-E-D$ و $A-B \cong C-E$.

رمز

يرمز للعبارة "A-B اصغر من C-D" بالرمز

$$A-B < C-D$$

نبرهن الان بعض المبرهنات المعروفة حول العلاقة "اصغر من".

مبرهنة ٥٢

اذا كانت A-B و C-D اي قطعتين، فانه تتحقق واحدة فقط ممايلي:

$$A\text{-}B < C\text{-}D \quad \text{و} \quad A\text{-}B \cong C\text{-}D, \quad C\text{-}D < A\text{-}B$$

البرهان

يترك كتمرين.

مبرهنة ٥٣

اذا كان $A\text{-}B < C\text{-}D$ و $A\text{-}B \cong E\text{-}F$ فان $E\text{-}F < C\text{-}D$

البرهان

بما ان $A\text{-}B < C\text{-}D$ ، فانه توجد نقطة G بحيث ان C-G-D و $A\text{-}B \cong C\text{-}G$ ، بما انه من الفرض $A\text{-}B \cong E\text{-}F$ ، فانه من بديهية ١٢، $E\text{-}F \cong C\text{-}G$. لذلك من تعريف ٣٢، يكون $E\text{-}F < C\text{-}D$.

مبرهنة ٥٤

اذا كان $A\text{-}B < C\text{-}D$ و $C\text{-}D \cong E\text{-}F$ ، فان $A\text{-}B < E\text{-}F$.

البرهان

من تعريف ٣٢، توجد نقطة G بحيث ان C-G-D ، و $A\text{-}B \cong C\text{-}G$ من مبرهنة ٥١، توجد نقطة H بحيث ان

$E-H-F$ ، و $E-H \cong C-G$ بما ان $A-B \cong C-G$ فانه من بديهية ١٢، $A-B \cong E-H$ ، لذلك، فان $A-B < E-F$.

مبرهنة ٥٥ هل اذا ثبت ان الاصغر للقطع هو علاقة متعدية ، برهن ذلك

اذا كان $A-B < C-D$ و $C-D < E-F$ فان $A-B < E-F$.

البرهان

بما ان $A-B < C-D$ ، فانه توجد نقطة G بحيث ان $C-G-D$ و $A-B \cong C-G$. بما ان $C-D < E-F$ ، فانه توجد نقطة H بحيث ان $E-H-F$ و $C-D \cong E-H$.
ومن مبرهنة ٥٤، نستنتج ان $A-B < E-H$. لذلك توجد نقطة I بحيث ان $E-I-H$ و $A-B \cong E-I$.
بما ان $E-H-F$ و $E-I-H$ ، فانه من مبرهنة ٤، $E-I-H-F$.
لذلك، $E-I-F$ ، وبذلك يكون $A-B < E-F$.

٥-٢ تمارين

١- برهن اذا كان $A-B-C$ ، فان $A-B < A-C$.
٢- برهن اذا كان $A-B-C-D$ ، فان $A-B < A-D$.

٥-٣ تطابق الزوايا والمثلثات

مجموعة البديهيات

بديهية ١٤ (بديهية انشاء زاوية)

لتكن BAC زاوية وليكن DF شعاعا على خط m، فانه في كل جهة من m يوجد شعاع واحد فقط DE بحيث

$\angle BAC \cong \angle EDF$.

بديهية ١٥

تطابق الزوايا هو علاقة تكافؤ.

بديهية ١٦

في مثلثين ABC و DEF ، اذا كان $A\text{-}B \cong D\text{-}E$ ، $A\text{-}C \cong D\text{-}F$ و $\angle A \cong \angle D$ ، فان $\angle B \cong \angle E$ و $\angle C \cong \angle F$.

ان هذه البديهية تنص على انه عندما ضلعان والزاوية المحددة بهما في مثلث تطابق على التوالي ضلعين والزاوية المحددة بهما من مثلث آخر، فان الزوايا الباقية متطابقة. ماهو الفرق بين هذه البديهية ومبرهنة اقليدس الرابعة؟ المبرهنة تنص على ان تحت نفس الفرض، فان المثلثين يتطابقان. لذا نحتاج الى تعريف تطابق مثلثين.

كمثال ناخذ المثلثين ABC و DEF توجد ستة طرق مختلفة لوضع تناظر متباين بين رؤوسهما، وكمايلي :

١- $C \leftrightarrow F$ ، $B \leftrightarrow E$ ، $A \leftrightarrow D$
٢- $C \leftrightarrow E$ ، $B \leftrightarrow F$ ، $A \leftrightarrow D$
٣- $C \leftrightarrow F$ ، $B \leftrightarrow D$ ، $A \leftrightarrow E$
٤- $C \leftrightarrow D$ ، $B \leftrightarrow F$ ، $A \leftrightarrow E$
٥- $C \leftrightarrow E$ ، $B \leftrightarrow D$ ، $A \leftrightarrow F$
٦- $C \leftrightarrow D$ ، $B \leftrightarrow E$ ، $A \leftrightarrow F$

كذلك، بما ان رؤوس المثلث تعين الاضلاع، فان

اي تناظر بين رؤوس مثلثين يؤدي الى تناظر بين الاضلاع، وبما ان للزاوية رأس وحيد، فان اي تناظر بين الرؤوس يؤدي الى تناظر بين الزوايا.

رمز تعريف رمز التناظر للمثلثين

بالرمز $\Delta ABC - \Delta DEF$ نعني التناظر التالي :

$A \leftrightarrow D$	$\angle A \leftrightarrow \angle D$	$A-B \leftrightarrow D-E$
$B \leftrightarrow E$	$\angle B \leftrightarrow \angle E$	$B-C \leftrightarrow E-F$
$C \leftrightarrow F$	$\angle C \leftrightarrow \angle F$	$A-C \leftrightarrow D-F$

تعريف ٢٣ تعريف التطابق او تناظر متطابق

ليكن ABC و DEF مثلثين، اذا وجد على الاقل تناظر واحد $\Delta ABC - \Delta XYZ$ ، حيث ان X, Y, Z هي D, E, F في ترتيب ما، بحيث ان

$$\angle A \cong \angle X \qquad A-B \cong X-Y$$
$$\angle B \cong \angle Y \qquad B-C \cong Y-Z$$
$$\angle C \cong \angle Z \qquad A-C \cong X-Z$$

فان هذا التناظر يدعى تناظر متطابق. ويقال عن المثلثين متطابقان.

رمز

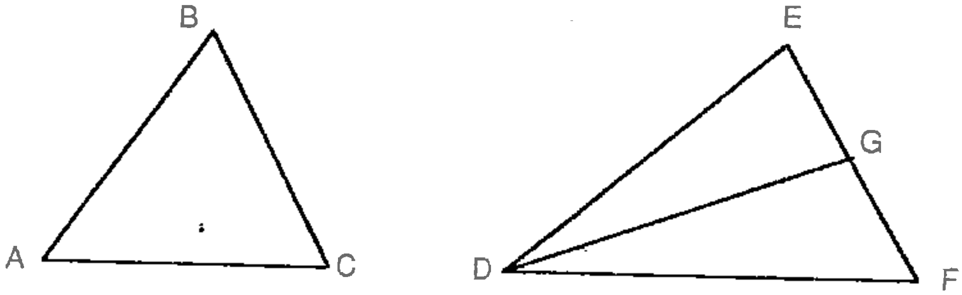
اذا كان $\Delta ABC - \Delta DEF$ هو تناظر متطابق للمثلثين ABC و DEF، فانه يرمز لهذا بالرمز:

$$\Delta ABC \cong \Delta DEF$$

مبرهنة ٥٦ (S A S)

اذا كان ضلعان والزاوية المحددة بهما في مثلث تطابق ضلعين والزاوية المحددة بهما من مثلث آخر، فان المثلثين يتطابقان.

بعبارة اخرى، اذا كان في مثلثين ABC و DEF،
$A\text{-}B \cong D\text{-}E$ ، $A\text{-}C \cong D\text{-}F$ ، و $\angle A \cong \angle D$ ، فان
$\Delta ABC \cong \Delta DEF$



شكل (٤٢)

البرهان

$\angle C \cong \angle F$

من بديهية ١٦، $\angle B \cong \angle E$. كل مانحتاجه من تعريف ٢٣، ان نبرهن ان $B\text{-}C \cong E\text{-}F$ نفرض ان العبارة خطأ.

من مبرهنة ٥٢، اما $B\text{-}C < E\text{-}F$ او $B\text{-}C > E\text{-}F$.

نفرض ان $B\text{-}C < E\text{-}F$.

من تعريف < ، توجد نقطة G بحيث ان $B\text{-}C \cong E\text{-}G$ و $E\text{-}G\text{-}F$

ومن بديهية ٦، E, G, F نقاط مختلفة وتقع على مستقيم واحد.

اي ان F, G تقعان على المستقيم EF. ومن مبرهنة ٢٨(و)، F و G في نفس الجهة من DE. في المثلثين ABC

و DEG ، من بديهية ١٦، نستنتج ان $\angle EDG \cong \angle BAC$،
ولكن من الفرض $\angle EDF \cong \angle BAC$ ،
لذلك، من بديهية ١٤، نستنتج ان $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DF}$ ، اي
ان $F, G \in DF$ وهذا يناقض مبرهنة ٢.
لذلك، فان الفرض بان $E-F < B-C$ يؤدي الى تناقض ، وبنفس الطريقة في الحالة الاخرى.
لذلك، فان $B-C \cong E-F$ وان $\Delta BAC \cong \Delta EDF$

تعريف ٢٤

زاويتان لهما ضلع مشترك وضلعيهما الاخرين يكونان شعاعين متعاكسين يقال عنهما تكونان زوجا خطيا.

تعريف ٢٥

زاويتان تطابقان على التوالي زاويتين لزوج خطي يقال عنهما متكاملتين، احداهما مكملة للاخرى.
من هذا التعريف ومن بديهية ١٥، تستنتج المبرهنة التالية:

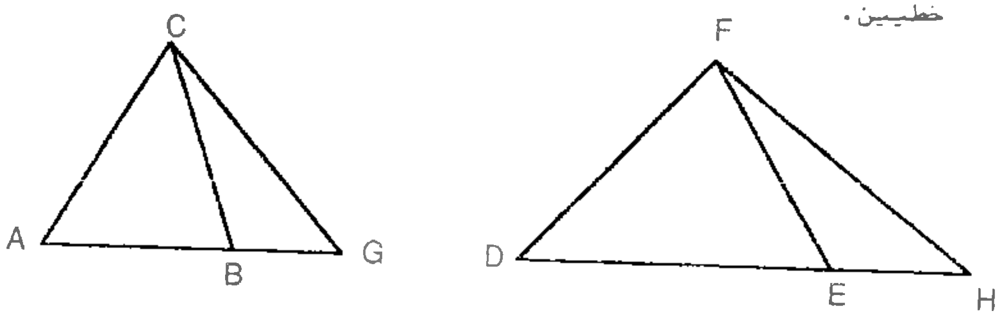
مبرهنة ٥٧

• اذا كانت زاويتان تكونان زوجا خطيا، فانهما متكاملتان.

مبرهنة ٥٨

اذا كانت زاويتان متطابقتين ، فانه تتطابق كذلك الزاويتان اللتان تكونان معهما، على التوالي، زوجين

خطيين.



شكل (٤٣)

البرهان

لتكن $\angle ABC \cong \angle DEF$. من بديهية ٩، توجد نقطة G بحيث ان A-B-G ، وتوجد نقطة H بحيث ان D-E-H. لذا يكون الشعاعان BA و BG متعاكسين، وكذلك الشعاعان ED و EH ، وتكون الزاويتان ABC و CBG زوجا خطيا، وكذلك الزاويتان DEF و FEH. نختار النقاط H, D و F بطريقة لاتؤثر على التعميم بحيث ان $A\text{-}B \cong D\text{-}E$ ، $B\text{-}C \cong E\text{-}F$ ، و $B\text{-}G \cong E\text{-}H$.

يجب ان نبرهن ان $\angle FEH \cong \angle CBG$

في المثلثين ABC و DEF :

$A\text{-}B \cong D\text{-}E$ ، $\angle ABC \cong \angle DEF$ ، و $B\text{-}C \cong E\text{-}F$

لذلك من مبرهنة SAS ، $A\text{-}C \cong D\text{-}F$

و $\angle BAC \cong \angle EDF$

من بديهية ١٣، $A\text{-}G \cong D\text{-}H$ لذلك مرة ثانية نطبق مبرهنة SAS على ΔCAG و ΔFDH، فيكون $\Delta FDH \cong \Delta CAG$ ، وهذا يؤدي الى ان $F\text{-}H \cong C\text{-}G$ وان $\angle DHF \cong \angle AGC$.

في المثلثين CBG و FEH :

$\angle EHF \cong \angle BGC$ ، $B\text{-}G \cong E\text{-}H$ ، و $H\text{-}F \cong G\text{-}C$

لذلك، من بديهية ١٦، نستنتج ان

(هامش) ؟

يمكن البرهان دون البديهية ١٦

$\angle CBG \cong \angle FEH$

نتيجة (١)

مكملات الزوايا المتطابقة تكون متطابقة

البرهان

نستنتج هذا من تعريف ٢٥، بديهية ١٥، ومبرهنة ٥٨.

تعريف ٢٦

يقال عن زاويتين لهما رأس مشترك بانهما زاويتان رأسيتان اذا وفقط اذا شعاعي زاوية واحدة هما الشعاعين المعاكسين لشعاعي الزاوية الاخرى.

نتيجة (٢)

تكون الزاويتان الرأسيتان متطابقتين.

البرهان

ينتج هذا من تعريف ٢٦، مبرهنة ٥٨، والخاصية الانعكاسية لبديهية ١٥.

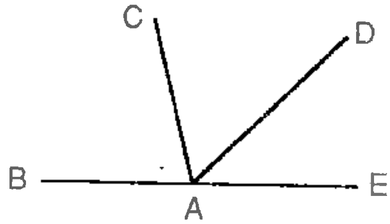
تعريف ٢٧

زاويتان لهما رأس مشترك وضلع مشترك، وضلعيهما الآخرين في الجهتين المتعاكستين لخط

الضلع المشترك، تدعيان زاويتين متجاورتين.

نتيجة (٣)

اذا كانت زاويتان متكاملتين ومتجاورتين، فانهما تكونان زوجا خطيا.



شكل ٤٤

شكل (٤٤)

البرهان

لتكن $\angle BAC$ و $\angle CAD$ زاويتين متكاملتين وان B و D في الجهتين المتعاكستين للخط AC. يجب ان نبرهن ان $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AB}$ شعاعين متعاكسين وان $\angle BAC$ و $\angle CAD$ تكونان زوجا خطيا. ليكن $\overrightarrow{AE}$ الشعاع المعاكس الى $\overrightarrow{AB}$. فانه من مبرهنة ٢٧ ⟵ D, E في نفس الجهة من الخط AC.

بما ان $\overrightarrow{AE}$ هو الشعاع المعاكس للشعاع $\overrightarrow{AB}$، فتكون الزاويتان $\angle BAC$ و $\angle CAE$ زوجا خطيا. ومن مبرهنة ٥٧، تكون الزاويتان $\angle BAC$ و $\angle CAE$ متكاملتين، وبما ان الزاويتين $\angle BAC$ و $\angle CAD$ متكاملتان، ومن بديهية ١٥، $\angle BAC \cong \angle BAC$ فان من نتيجة ١، $\angle CAD \cong \angle CAE$.

ومن بديهية ١٤، $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE}$.

لذلك يكون الشعاع $\overrightarrow{AD}$ هو الشعاع المعاكس للشعاع

$\overrightarrow{AB}$ ، وان الزاويتين BAC ∠ و CAD ∠ تكونان زوجا خطيا.

تمارين ٥-٣

١- اذا كان ABD ∠ ≐ ABC ∠ هل ان $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC}$؟ لماذا؟

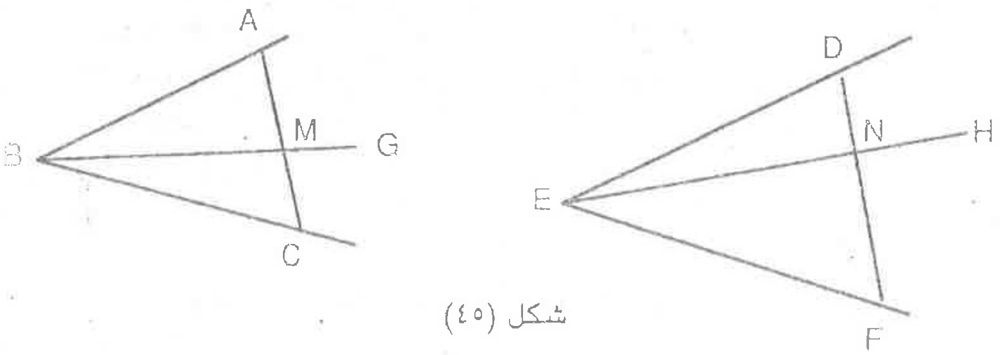
٢- اذا كان ABD ∠ لاتطابق ABC ∠ ، برهن على ان $\overrightarrow{BD} \neq \overrightarrow{BC}$.

٣- اذا كان B-C ≐ D-F و A-C ≐ D-E ، و D ∠ ≐ C ∠ ما هو التناظر المتطابق للمثلثين ABC و DEF ؟

٥-٤ جمع وطرح الزوايا

مبرهنة ٥٩

اذا كان DEF ∠ ≐ ABC ∠ وان $\overrightarrow{BG}$ شعاع في داخل ABC ∠ ، فانه يوجد شعاع $\overrightarrow{EH}$ في داخل DEF ∠ بحيث ان DEH ∠ ≐ ABG ∠ و HEF ∠ ≐ GBC ∠.



شكل (٤٥)

البرهان

من بديهية ١١، نختار النقاط D, F بطريقة لاتؤثر على المفهوم العام، بحيث ان A-B ≅ D-E ،

و $C-B \cong F-E$.

ومن مبرهنـــة SAS ⟵ $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ ، وان $A-C \cong D-F$ ، $\angle \overrightarrow{EFD} \cong \angle BCA$ و $\angle BAC \cong \angle EDF$.

بما ان BG يمر براس الزاوية $\angle \overrightarrow{ABC}$ ويقع في داخل الزاوية، فانه من مبرهنة ٤٣، BG يقطع A-C في نقطة ولتكن M.

بما ان $A-C \cong D-F$ وان A-M-C ،من مبرهنة ٥١، توجد نقطة N بحيث ان $D-N \cong A-M$ وان D-N-F.

من مبرهنة ٤٥، وتعريف ١٧ يكون الشعاع $\overrightarrow{EN}$ هو الشعاع المطلوب EH الذي يقع في داخل $\angle DEF$.

بما ان $A-C \cong D-F$ و $A-M \cong D-N$ و A-M-C و D-N-F فانـه من مبرهنـــة ٥٠ (طـرح القطـع)، يكـــون $M-C \cong N-F$ ،

في ΔABM و ΔDEN :

$\angle EDN = \angle EDF \cong \angle BAC = \angle BAM$ ⟵ $\angle BAM \cong \angle EDN$

$A-M \cong D-N$ و $A-B \cong D-E$ ، فانــه مــن مبرهنـــة SAS ،

$\Delta ABM \cong \Delta DEN$ ⟵ $\angle ABM \cong \angle DEN$

وبنفس الطريقـة، فــان المثلثيـــن MBC و NEF يتطابقان، ولذلك فان $\angle MBC \cong \angle NEF$،

$\angle ABG = \angle ABM \cong \angle DEN = \angle DEH$

لذلك، $\angle ABG \cong \angle DEH$.

$\angle GBC = \angle MBC \cong \angle NEF = \angle HEF$ ، لذلك $\angle GBC \cong \angle HEF$

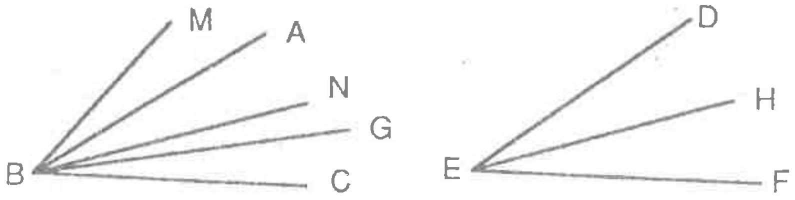
مبرهنة ٦٠. (جمع الزوايا)

لتكن $\angle ABC$ و $\angle DEF$ زاويتين لهما، على التوالي، الشعاعين BG و EH يقعان في داخليهما،

و $\angle GBC \cong \angle HEF$ ، و $\angle ABG \cong \angle DEH$

فان

$\angle ABC \cong \angle DEF$



شكل (٤٦)

البرهان

من بديهية ١٤، يوجد شعاع $\overrightarrow{BM}$ في جهة الخط BC التي تحتوي A بحيث ان $\angle DEF \cong \angle MBC$. بما ان EH في داخل $\angle DEF$ ، فانه من مبرهنة ٥٩، يوجد شعاع $\overrightarrow{BN}$ في داخل $\angle MBC$ بحيث ان $\angle HEF \cong \angle NBC$ و $\angle DEH \cong \angle MBN$.
ولكن من الفرض $\angle HEF \cong \angle GBC$ ، لذلك من بديهية ١٥، $\angle NBC \cong \angle GBC$ ومن بديهية ١٤، $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BN}$
لذلك $\angle ABG \cong \angle DEH \cong \angle MBN = \angle MBG$
ومن هذا $\angle ABG \cong MBG$ ومن بديهية ١٤ ، $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BM}$
لذلك، $\angle DEF \cong \angle MBC = \angle ABC$
اي ان $\angle DEF \cong \angle ABC$

مبرهنة ٦١ (طرح الزوايا)

اذا كان $\angle \overrightarrow{GFH} \cong \angle CBD$ و $\angle HFE \cong \angle DBA$
وان الشعاعين BA و $\overrightarrow{FE}$ يقعان في داخل $\angle CBD$ و $\angle GFH$ ، على التوالي، فان $\angle EFG \cong \angle ABC$.

شكل (٤٧)

البرهان

بما ان $\angle GFH \cong \angle CBD$ وان $\overrightarrow{BA}$ شعاع في داخل $\angle DBC$،فانه من مبرهنة ٥٩، يوجد شعاع $\overrightarrow{FI}$ في داخل $\angle GFH$ بحيث ان $\angle HFI \cong \angle DBA$ و $\angle IFG \cong \angle ABC$.

لكن من الفرض $\angle HFE \cong \angle DBA$

فانه من بديهية ١٥، $\angle HFE \cong \angle HFI$

ومن بديهية ١٤ ← $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FI}$

لذلك $\angle EFG \cong \angle ABC$

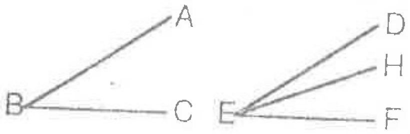
تمارين ٥-٤

١- استخدم مبرهنة ٣٤ بدلا من مبرهنة ٤٥ وتعريف ١٧ لتحصل على النقطة M في مبرهنة ٥٩ .

٥-٥ مقارنة الزوايا

تعريف ٢٨

تكون زاوية $\angle ABC$ اصغر من زاوية $\angle DEF$ اذا وفقط اذا يوجد شعاع $\overrightarrow{EH}$ في داخل $\angle DEF$ بحيث ان $\angle ABC \cong \angle HEF$. ويرمز لهذا بالرمز : $\angle ABC < \angle DEF$


شكل (٤٨)

مبرهنة ٦٢

لاي زوج من الزوايا، وليكن $\angle A$ و $\angle B$.
فانه تتحقق واحدة فقط ممايلي :
$\angle B < \angle A$ و $\angle A \cong \angle B$ و $\angle A < \angle B$

البرهان

يترك كتمرين.

مبرهنة ٦٣

اذا كان $\angle A < \angle B$ و $\angle A \cong \angle C$ ، فان $\angle C < \angle B$.

البرهان

لتكن $\angle B = \angle DBE$

بما ان $\angle A < \angle B$ ، ومن تعريف ٢٨، يوجد شعاع $\overrightarrow{BF}$ في داخل $\angle B$ بحيث ان $\angle A \cong \angle FBE$.
ومن الفرض $\angle A \cong \angle C$ ، فانه من بديهية ١٥، $\angle C \cong \angle FBE$.
ومن ~~مبرهنة~~ تعريف ٢٨، $\angle C < \angle B$

مبرهنة ٦٤

اذا كان $\angle B < \angle A$ و $\angle C \cong \angle B$

فان $\angle C < \angle A$.

البرهان

لتكن $\angle DBE = \angle B$ و $\angle GCH = \angle C$.

بما ان $\angle B < \angle A$ ، فانه من تعريف ٢٨، يوجد شعاع $\overrightarrow{BF}$ في داخل $\angle B$ بحيث ان $\angle FBE \cong \angle A$.

$\angle C \cong \angle B$ و $\overrightarrow{BF}$ في داخل $\angle B$ ، فانه من مبرهنة ٥٩، يوجد شعاع CI في داخل $\angle C$ بحيث ان $\angle ICH \cong \angle FBE$.

وبما ان $\angle FBE \cong \angle A$ ،

فانه من بديهية ١٥، $\angle ICH \cong \angle A$

ومن تعريف ٢٨، $\angle C < \angle A$.

مبرهنة ٦٥

اذا كان $\angle B < \angle A$ و $\angle C < \angle B$ ، فان $\angle C < \angle A$.

البرهان

لتكن $\angle DBE = \angle B$ و $\angle GCH = \angle C$.

بما ان $\angle B < \angle A$ ، فانه من تعريف ٢٨، يوجد شعاع $\overrightarrow{BF}$ في داخل $\angle B$ بحيث ان $\angle FBE \cong \angle A$.
وكذلك $\angle C < \angle B$ ، فانه يوجد شعاع $\overrightarrow{CI}$ في داخل $\angle C$ بحيث ان $\angle ICH \cong \angle B$. وبما ان $\overrightarrow{BF}$ في داخل $\angle B$، فانه من مبرهنة ٥٩، يوجد شعاع CJ في داخل $\angle ICH$ بحيث ان $\angle JCH \cong \angle FBE$. وبما ان $\angle FBE \cong \angle A$ ، فانه من

بديهية ١٥، $\angle JCH \doteq \angle A$.
من تعريف ١٧، $\overrightarrow{CJ}$ يقع بين $\overrightarrow{CH}$ و $\overrightarrow{CI}$ وان $\overrightarrow{CI}$ يقع بين
$\overrightarrow{CG}$ و $\overrightarrow{CH}$ ، ومن مبرهنة ٤٦(أ)، $\overrightarrow{CJ}$ يقع بين $\overrightarrow{CH}$ و $\overrightarrow{CG}$ ،
اي ان $\overrightarrow{CJ}$ يقع في داخل $\angle C$ وبما ان $\angle JCH \doteq \angle A$ فانه
من تعريف ٢٨، $\angle C > \angle A$.

تمارين ٥-٥

١) برهن اذا كان $\overrightarrow{BF}$ في داخل $\angle ABC$ ، فان
$\angle ABC > \angle FBC$.

٢) برهن اذا كان $\overrightarrow{BF}$ في داخل $\angle ABC$ ، وان $\overrightarrow{BE}$ في داخل
$\angle FBC$ ، فان $\angle ABC > \angle EBC$.

الفصل الحادي عشر

الهندسة الاسقاطية التركيبية

Synthetic Projective Geometry

سندرس المستوي الاسقاطي آخذين بنظر الاعتبار الافكار الاساسية لهذه الهندسة بدون التعمق فى المواضيع.

يتضمن المستوي الاسقاطي المجموعة π لكلمات اولية تدعى نقاط ومجموعات جزئية من π تدعى مستقيمات والتي هي ايضا غير معرفة. سيرمز لنقاط π بالحروف الكبيرة $A, B, C, \ldots$ ومستقيمات π بالجروف الصغيرة $l, m, n, \ldots$.

والان نعيد ذكر بديهيات π التي ذكرت في الفصل الاول.

مع تحيات مكتب
اسامة
للاستنساخ
بغداد - باب المعظم

١١-١ بديهيات الوجود والوقوع

١ـ لاي نقطتين مختلفتين A و B في π ، يوجد مستقيم واحد فقط يحتويهما ، ذلك يعني، اذا كان $A, B \in \pi$ بحيث ان $A \neq B$.

$A, B \in L$ و $A, B \in m$ ، فان $l = m$.

٢ـ كل مستقيم يحتوي على ثلاث نقاط في الاقل.

٣ـ توجد في الاقل نقطة واحدة A ويوجد في الاقل مستقيم واحد l بحيث ان A لاتنتمي الى l.

٤ـ اي مستقيمين مختلفين يشتركان في نقطة واحدة في الاقل.

رموز

اذا كان $P \in l$ ، فاننا نقول: "النقطة P تقع على l"، او "P على l"، وكذلك: "l يمر من P"، او "l يحتوي P ".

اذا كان $A \in l$ و $B \in l$ ، فنرمز للمستقيم l بالرمز AB.

نقطة تقاطع المستقيمين l و m هي النقطة التي تنتمي الى المستقيمين l و m، ويرمز لها بالرمز: $l \cap m$.

مبرهنة ١

اي مستقيمين مختلفين l و m في π يتقاطعان بنقطة واحدة وواحدة فقط.

ليكن l و m مستقيمين مختلفين في π ، اي ان $m \neq l$. من البديهية ٤، توجد نقطة A بحيث ان $A \in l$ و $A \in m$.

نفرض وجود نقطة اخرى B، $B \neq A$ بحيث ان $B \in l$ و $B \in m$. فانه من البديهية ١، $l = m$ وهذا تناقض لان $m \neq l$. لذا فان فرضيتنا خاطئة.

وعليه، فان l و m يتقاطعان في نقطة واحدة فقط.

مبرهنة ٢

اية نقطة في π يمر بها ثلاث مستقيمات في الاقل.

البرهان

لتكن P اية نقطة في π.

من البديهية ٣، يوجد مستقيم l بحيث ان P لاتقع على l.

كذلك من البديهية ٢، توجد على الاقل ثلاث نقاط على l، ولتكن A_1 ، A_2 ، A_3.

من البديهية ١ ، توجد المستقيمات PA_1 ، PA_2، PA_3 التي تمر من P وتكون مختلفة.

١١-٢ مبدأ الثنائية *(Principle of duality)*

ان نقاط ومستقيمات المستوي الاسقاطي π تتصف بخاصية مميزة وهي ان المستقيم والنقطة هما عناصر ثنائية في المفهوم الذي فيه اية عبارة صحيحة تتضمن عناصر π تبقى صحيحة عند تبديل النقطة والمستقيم احدهما محل الآخر.

تعريف ١

عبارتان تكون احداهما ثنائية (dual) للاخرى اذا امكن حصول واحدة من الاخرى بتبديل الكلمتين "النقطة" و "المستقيم"، احداهما محل الاخرى.

عبارة تدعى ثنائية نفسها (self dual) اذا حصلنا على نفس العبارة بتبديل الكلمتين "النقطة" و "المستقيم".

فمثلا، تعريف المثلث هو ثنائي نفسه.

لذلك، فان مبدأ الثنائية يكون كما يلي:

مبدأ الثنائية

اية عبارة صحيحة تتعلق بتعيين النقاط والمستقيمات في المستوي الاسقاطي تنتج عبارة ثانية صحيحة نحصل عليها من العبارة الاولى بتبديل الكلمتين "النقطة" و "المستقيم" احداهما محل الاخرى.

ان مبدأ الثنائية يستنتج من الحقيقة بان تبديل الكلمتين "النقطة" و "المستقيم" احداهما محل الاخرى في البديهيات الاربعة، نحصل على عبارات صحيحة.

بعبارة اخرى، يتحقق مبدأ الثنائية على البديهيات.

لذا، فان اية عبارة نحصل عليها من البديهيات تكون صحيحة.

ذلك، مبرهنة ١ هي ثنائية بديهية ١، مبرهنة ٢ هي ثنائية بديهية ٢، بديهية ٣ هي ثنائية نفسها، وثنائية بديهية ٤ لاي نقطتين يوجد على الاقل مستقيم واحد يحتويهما. هذه العبارة تكون صحيحة من بديهية١ .

ان مبدأ الثنائية، كما سنرى فيما بعد، يلعب دورا

مهما في برهنة مبرهنات في الهندسة الاسقاطية.

تعريف ٢

بشكل على π نعني اي مجموعة جزئية من π وغير خالية. بصورة خاصة، سنركز اهتمامنا على الاشكال التالية.

تعريف ٣

حزمة مستقيمات (Pencil of Lines) هي مجموعة كل المستقيمات التي تمر بنقطة O. النقطة O تدعى راس الحزمة (vertex).

حزمة نقاط (pencil of points) هي مجموعة كل النقاط التي تقع على مستقيم l. المستقيم l يدعى محور الحزمة. (axis).

١١-٣ التشكيلات وبديهية فانو (Configuration and Fano's Axiom)

تعريف ٤

مجموعة من m من النقاط و n من المستقيمات في π بحيث ان كل نقطة من m من النقاط يمر بها عدد ثابت وهو a من المستقيمات وكل مستقيم من n من المستقيمات يحتوي على عدد ثابت وهو b من النقاط هي تشكيل (m_a, n_b). كمثال يكون تشكيل المثلث $(3_2, 3_2)$.

مبرهنة ٣

اذا كان (m_a, n_b) تشكيلا في المستوي الاسقاطي، فان $ma = nb$.

البرهان

بما ان كل نقطة من m من النقاط يمر بها a من المستقيمات، فانه ينبغي ان يكون ma من المستقيمات. لكن كل مستقيم يحتوي على b من النقاط، اي ان المستقيم يتكرر b من المرات.

لذلك، يكون عدد الخطوط $n = \dfrac{ma}{b}$

اي ان $ma = nb$

تعريف ٥

يقال عن تشكيل انه ثنائي نفسه (self-dual) اذا احتوى على عدد النقاط كعدد المستقيمات.

$(m_a\ n_b)$ هو ثنائي نفسه اذا كان $m = n$.

في هذه الحالة، $a = b$، لان $am = mb$. اي ان التشكيل ثنائي نفسه يكون (m_b, m_b). سنرمز لهذا التشكيل بالرمز (m_b). كمثال، المثلث هو (3_2) تشكيل ثنائي نفسه.

عندما $b = 1$ ، التشكيل المحتمل الوحيد هو نقطة وخط يحتويها.

اذا كان $b = 2$ ، فان (m_2) هو تشكيل يتضمن m من النقاط

و m من المستقيمات. كمثال، النموذج الذي تشكيله (5_2) يعطى بالشكل التالي:

شكل (١٠٩)

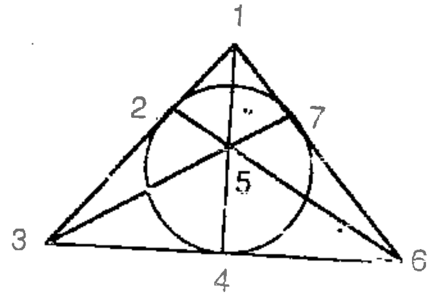
الحالة $b\geq3$ تعطينا تشكيلات عديدة، الطريقة العامة لوضع جدول لتشكيل من نوع (m_b)،

ليكن $1,2,\ldots,m$ ترمز الى m من النقاط و $[1],[2],\ldots,[m]$ ترمز الى m من المستقيمات. نكتب هذه المستقيمات في صف و b من النقاط الموجودة على مستقيم معين تكون في عمود تحت المستقيم. فيكون في هذا الترتيب عمودين مختلفين لايشتركان باكثر من نقطة واحدة وكل رقم يجب ان يقع في b من الاعمدة، لان كل نقطة تكون محتواة في b من المستقيمات. كمثال على ذلك، نأخذ التشكيل (7_3)

[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]
1	1	1	2	2	3	3
2	4	6	4	5	4	5
3	5	7	7	6	6	7

نلاحظ حقيقتين مهمتين حول هذا التشكيل. اولهما، انه من الممكن تشكيل واحد فقط، طالما كل الاعمدة ترتب بطريقة واحدة وتنتج نموذجا واحدا، حيث اذا بدلنا 4 الى 5 ، كمثال، في عمود، يجب ان نبدل كل 4 الى 5 والعكس بالعكس. ثانيا، نجد من الصعوبة تمثيل هذا التشكيل بمخطط، حيث انه لايوجد تمثيل مالم نعتبر 2,4,7 تقع على مستقيم واحد كما في الشكل

التالي:



شكل (١١٠)

لذلك، لايمكن ان نسمح المستوي الاسقاطي بقبول تشكيل (7_3) لسببين: اولا، لايسمح المستوي الاقليدي بتشكيل (7_3) بسبب المستقيمات المنحنية، وثانيا، سيقتصر المستوي الاسقاطي على سبع نقاط فقط، حيث مع اي سبع نقاط نحصل على تشكيل واحد فقط.

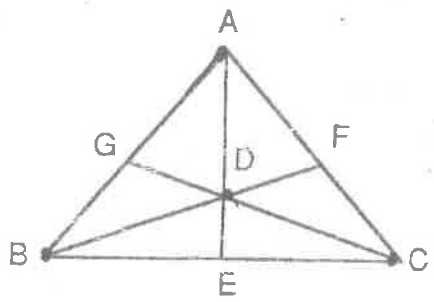
طالما غرضنا توسيع المستوي الاسقاطي، يكون من الضروري ان نضيف بديهية تؤكد على عدم وجود تشكيل (7_3).

من اجل ذلك، يجب ان نناقش رباعيات الزوايا التامة.

تعريف ٦ دالهنا ج م سياحي

اربع نقاط في π ، لاتوجد اي ثلاثة منها على مستقيم واحد، وستة مستقيمات تتعين من ازواج من هذه النقاط تكون رباعي زوايا تام (a complete quadrangle).

تدعى هذه النقاط رؤوس والمستقيمات التي تتعين من هذه النقاط اضلاع رباعي الزوايا التام. سنرمز لرباعي الزوايا التام برؤوسه وعادة نطلق عليه رباعي زوايا، ونقول رباعي الزوايا (ABCD) كما في الشكل التالي:



شكل (١١١)

ضلعان في رباعي الزوايا يقال عنهما متقابلين اذا لم يشتركا باي رأس. توجد ثلاثة ازواج من هذه الاضلاع المتقابلة في رباعي الزوايا. نقطة تقاطع زوج من الاضلاع المتقابلة لرباعي الزوايا تدعى نقطة قطرية (a diagonal point) لرباعي الزوايا. رباعي الزوايا له ثلاث نقاط قطرية.

في هذا الشكل، تكون الرؤوس A, B, C, D. فالاضلاع هي BC, BD, CD, DA, AB, AC. الضلع المقابل للضلع AB هو CD ونقطة تقاطعهما G هي نقطة قطرية لرباعي الزوايا (ABCD). وبنفس الطريقة، E و F نقطتان قطريتان.

قد تقع النقاط E, F, G على مستقيم واحد او لاتقع. اذا اخذناها على مستقيم واحد، نحصل على تشكيل (7_3). طالما لانرغب بادخال تشكيل (7_3) ، سنأخذ النقاط لاتقع على مستقيم واحد.

يقودنا هذا الى بديهية فانو:

بديهية ٥: النقاط القطرية لرباعي الزوايا التام لاتقع على مستقيم واحد.

لذلك النقاط القطرية لرباعي الزوايا التام تكون مثلثا يدعى المثلث القطري لرباعي الزوايا التام.

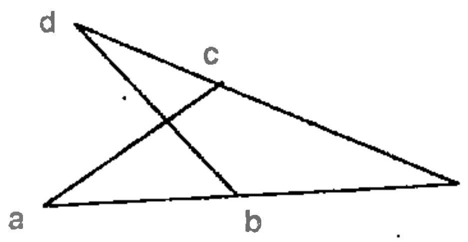
يجب ان نلاحظ، انه في اي وقت نضيف بديهية جديدة الى البديهيات الاربعة الاصلية، يجب ان نبين ان البديهية الجديدة تحقق مبدا الثنائية. غير ذلك،

لايتحقق مبدأ الثنائية في المنظام الموسع. لبيان ان ثنائية بديهية ٥ هي عبارة صحيحة نأخذ التشكيل $(6_2, 4_3)$، ثنائي رباعي زوايا تام.

تعريف ٧

اربعة مستقيمات في π، لايوجد اي ثلاثة منها تلتقي بنقطة واحدة، وست نقاط تتعين من تقاطع ازواج من هذه المستقيمات، تكون رباعي اضلاع تام (a complete quadrilateral).

المستقيمات التي تكون رباعي اضلاع تام تدعى اضلاعه والنقاط المتعينة من المستقيمات تدعى رؤوسه. نرمز لرباعي الاضلاع التام باضلاعه، فمثلا، رباعي اضلاع تام (abcd) كما في الشكل التالي:



شكل (٢١٧)

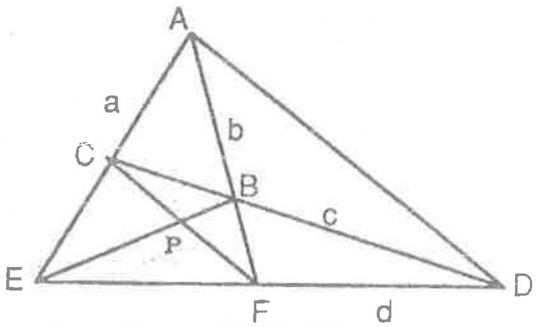
راسان لرباعي اضلاع تام يقال عنهما متقابلين اذا لم يقعا على نفس الضلع. توجد ثلاثة ازواج من هذه الرؤوس المتقابلة في رباعي اضلاع تام. المستقيم الواصل بين زوج من الرؤوس المتقابلة لرباعي اضلاع تام يدعى خطا قطريا (a diagonal line).

والان نبرهن ثنائية بديهية فانو (بديهية ٥) في المبرهنة التالية.

مبرهنة ٤ .(ثنائية بديهية ٥)

الخطوط القطرية لرباعي اضلاع تام لاتلتقي بنقطة واحدة.

البرهان



شكل (١١٣)

ليكن (abcd) رباعي اضلاع تام. فان الرؤوس لهذا الرباعي هي:

$a \cap b = A$, $c \cap d = D$
$b \cap c = B$, $a \cap d = E$
$a \cap c = C$, $b \cap d = F$

الخطوط القطرية تكون: AD, BE, CF

لتكن $CF \cap BE = P$.

يجب ان نبرهن ان P لاتقع على AD.

ناخذ رباعي الزوايا التام (BCEF). نقاطه القطرية هي: P, A, D

من بديهية ٥، النقاط القطرية P, A, D لاتقع على مستقيم واحد.

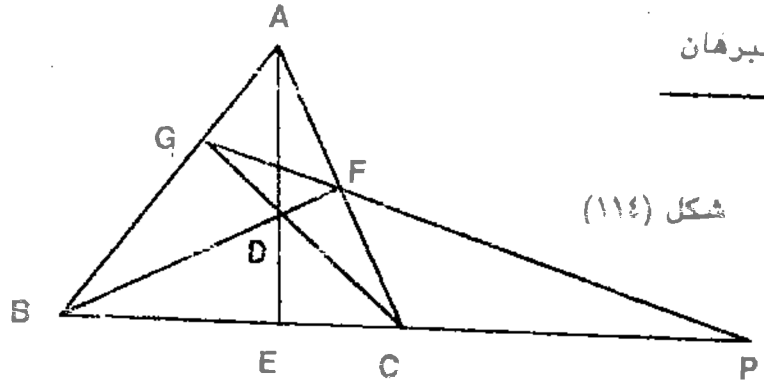
لذلك، فان P لاتقع على المستقيم AD.

المبرهنة التالية نستنتجها من بديهية ٥.

مبرهنة ٥

المستقيم في مستوي اسقاطي يحقق البديهيات الخمس يحتوي على اربع نقاط في الاقل.

البرهان



شكل (١١٤)

نأخذ رباعي زوايا (ABCD) كما في الشكل.
لتكن G ,F ,E نقاطه القطرية. بما ان النقطتين G و F لاتقعان على المستقيم BC، فان المستقيمين GF و BC مختلفان.
لذلك يجب ان يتقاطعا في نقطة واحدة، ولتكن P.
$P \neq B$ ، لانه اذا كان $P = B$ ، فان GF يقطع AB في نقطتين مختلفتين B و G وهذا يناقض مبرهنة ١.
بنفس الطريقة، $P \neq C$. وكذلك من بديهية ٥، $P \neq E$.
هكذا، P هي النقطة الرابعة على الخط BC ، التي تختلف عن B، C، و E.

١١-٣ تمارين

١- برهن على ان رباعي الزوايا التام هو تشكيل $(4_3,\ 6_2)$ وان رباعي الاضلاع التام هو تشكيل $(6_2,\ 4_3)$.

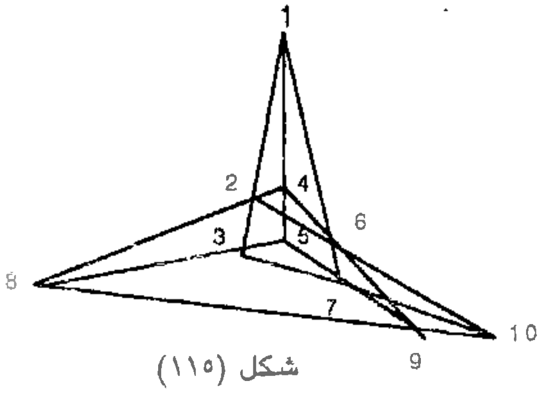
٢- برهن على انه في مستوي اسقاطي يحقق البديهيات الخمس كل نقطة يمر بها على الاقل اربعة خطوط.
٣- برهن على انه توجد في مستوي اسقاطي يحقق البديهيات الخمس ثلاث عشر نقطة على الاقل.
٤- هل تستطيع ان تزرع سبع اشجار في سبعة خطوط بحيث ان على كل خط ثلاث اشجار؟ اعطي الاسباب.
٥- هل تستطيع ان تزرع عشر اشجار في عشرة خطوط بحيث ان كل خط يحتوي على ثلاث اشجار ؟ اعط الاسباب.

١١-٤ بديهية ديزارك (Desarques Axiom)

لناخذ الجدول التالي لتشكيل (10_3)

[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]	[10]
1	1	1	2	2	3	3	4	5	8
2	4	6	4	6	5	7	6	7	9
3	5	7	8	10	8	10	9	9	10

يجب ان يلاحظ ان بكتابة المستقيمات التي تحتوي النقطة ١، يكون عندنا عدة احتمالات، طالما توجد عشر نقاط، هذه ليست الحالة في تشكيل (7_3) ، حيث من الممكن ان ثلاثة مستقيمات تشترك نقطة واحدة بالاساس في طريقة واحدة. على كل حال، في حالة (10_3)، نحصل على 10 تشكيلات مختلفة. كذلك، من الممكن تمثيل معظم التشكيلات (10_3) بمخطط. التشكيل المذكور اعلاه يدعى تشكيل ديزارك. ويمثل بالشكل التالي:



شكل (١١٥)

تعريف ٨

يكون مثلثان في π منظورين (perspective) من نقطة O اذا وجد تناظر متباين بين رؤوس المثلثين بحيث ان كل المستقيمات الواصلة بين الرؤوس المتناظرة تمر من نقطة O. تدعى O مركز المنظورية.

رمز

يرمز للمثلثين ABC و A'B'C' المنظورين من نقطة O بحيث ان A,B,C تناظر A',B',C' على التوالي، بالرمز

$$\Delta ABC \overset{O}{\underset{\wedge}{=}} \Delta A'B'C'$$

ان ثنائي تعريف ٨ يكون كما يلي:

يكون مثلثان في π منظورين من مستقيم l اذا وجد تناظر متباين بين اضلاع المثلثين بحيث ان كل نقاط تقاطع الاضلاع المتناظرة تقع على المستقيم l. يدعى l محور المنظورية.

رمز

اذا كان ΔABC و $\Delta A'B'C'$ منظورين من l بحيث ان AB, BC, CA تناظر A'B', B'C', C'A' على التوالي، يرمز لهذا:

$$\Delta ABC \overset{l}{\underset{\wedge}{=}} \Delta A'B'C'$$

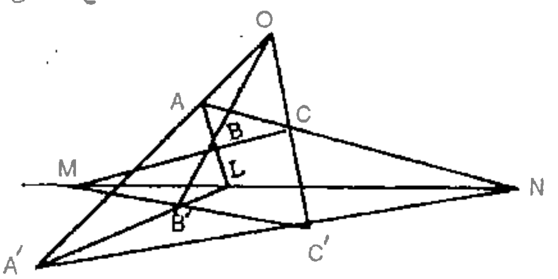
كمثال، في الشكل السابق، تشكيل ديزارك، المثلث المتكون من 6 ,4 ,2 والمثلث المتكون من 3,5,7 منظورين من 1 لانه يوجد تناظر متباين بحيث ان كل المستقيمات التي تمر من الرؤوس المتناظرة تلتقي بالنقطة 1 . كذلك، يكونان منظورين من المستقيم [10] ، لان نقاط تقاطع الاضلاع المتناظرة للمثلثين تقع على المستقيم [10]. ونفس الشيء يبين لاي مثلثين في هذا التشكيل.

بكلمات اخرى، لتقبل تشكيل ديزارك، من الضروري ان يحقق المستوي الخاصية بانه اذا كان مثلثان منظورين من نقطة، فانهما يكونان منظورين من مستقيم. المستوي الاسقاطي الذي عرفناه (الذي يحقق البديهيات من ١ الى ٥) ليس ضروريا ان يحقق هذه الخاصية. لذلك، من الضروري ان ندخل بديهية ديزارك التالية.

بديهية ٦

اذا كان مثلثان في مستوي اسقاطي منظورين من نقطة، فانهما يكونان منظورين من مستقيم.

هذا يعني، اذا كان ΔABC و $\Delta A'B'C'$ مثلثين بحيث ان AA', BB', CC' تلتقي جميعا في نقطة O (اي ان المثلثين منظوران من O)، فان النقاط $L = AB \cap A'B'$ ، $M = BC \cap B'C'$ و $N = CA \cap C'A'$ تقع على مستقيم واحد.



شكل (١١٦)

سنبرهن الان ثنائية بديهية ٦ في المبرهنة التالية.

مبرهنة ٦ (ثنائية بديهية ديزارك)

اذا كان مثلثان في مستوي اسقاطي منظورين من مستقيم، فانهما يكونان منظورين من نقطة.

البرهان

ليكن ABC و A'B'C' مثلثين منظورين من مستقيم l، ليكن $A'B' \cap AB = L$ ، $B'C' \cap BC = M$ و $A'C' \cap AC = N$ فان L, M , N تقع على المستقيم l. يجب ان نبرهن على ان المستقيمات AA', BB', CC' تلتقي بنقطة.

لتكن $O = BB' \cap CC'$ سنبرهن ان AA' يمر من O. المثلثان LBB' و NCC' منظورين من M، اي ان

$$\Delta LBB' \ \overset{M}{\underset{\overline{\wedge}}{=}}\ \Delta NCC'$$

لذلك، من بديهية ٦، النقاط $LB \cap NC = A$ ، $BB' \cap CC' = O$ و $B'L \cap C'N = A'$ تقع على مستقيم واحد. ان هذا يبين ان AA' يمر من O والمثلثين يكونان منظورين من النقطة O.

١١-٤ تمارين

١- في التشكيل (10_3) المذكور في هذا البند (شكل ١١٥)، جد مثلثين منظورين من النقطة 2 وجد محور المنظورية للمثلثين.

٢– ليكن (ABCD) رباعي زوايا تام. نقاطه القطرية هي $E = AD \cap BC$ و $F = BD \cap Ac$ و $G = CD \cap AB$. برهن ان النقاط $L = EF \cap AB$ ، $M = FG \cap BC$ ؛ و $N = GE \cap AC$ تقع على مستقيم واحد.

٣– اكتب جدولين مختلفين للتشكيل (10_3).

١١–٥ المجموعات التوافقية (Harmonic Sete)

سنناقش الان نتيجة اخرى لبديهية فانو، اي، مفهوم المجموعات التوافقية. نحصل على بعض خواص المجموعات التوافقية كذلك من بديهية ديزارك. على كل حال، سنبتدأ بتعاريف اساسية.

تعريف ٩

ليكن F شكلا و P نقطة لاتنتمي الى F، نقاط F والنقطة P تعين حزمة مستقيمات مع P كرأس تدعى قطع نقطي (point section) للشكل F من P.

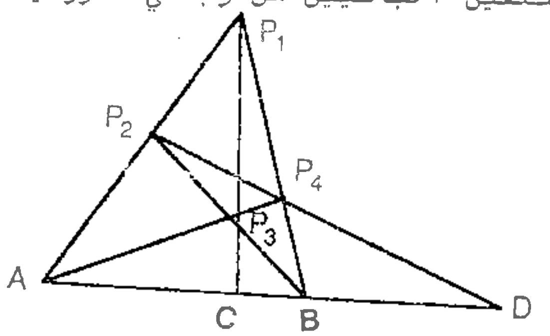
ثنائي تعريف ٩

ليكن F شكلا و l مستقيما لاينتمي الى F، مستقيمات F والمستقيم l تعين حزمة نقاط مع l كمحور تدعى قطع خطي (line section) للشكل F من l.

كمثال، قطع خطي لرباعي زوايا تام يتعين من مستقيم l هو حزمة من ست نقاط على l. كذلك، قطع نقطي لرباعي زوايا تام يتعين من نقطة P ليست على رباعي الزوايا هو حزمة من اربعة مستقيمات.

تعريف ١٠

مجموعة مرتبة من اربع نقاط A, B, C, D على مستقيم l هي مجموعة توافقية من نقاط اذا وجد رباعي زوايا تام فيه A و B نقطتين قطريتين و C و D تقعان على الضلعين الباقيين من رباعي الزوايا التام.



شكل (١١٧)

من التعريف ٩، من الواضح ان A, B, C, D تكون مجموعة توافقية اذا كانت هي القطع الخطي لرباعي الزوايا التام المتعين من خط يحتوي A و B كنقطتين قطريتين لرباعي الزوايا.

الرمز $H(AB, CD)$ يرمز للعبارة "A, B, C, D تكون مجموعة توافقية".

بما ان A و B تلعبان نفس الدور، فانه يمكن ان تستبدلا، اي ان:

$$H(AB, CD) \longleftrightarrow H(BA, CD)$$

بنفس الطريقة، يمكن ان تستبدل النقطتين C و D الواقعتين على الضلعين الباقيين:

$$H(AB, CD) \longleftrightarrow H(AB, DC)$$

بهذا، يكون عندنا المبرهنة التالية.

مبرهنة ٧

$$H(BA, CD) \longleftrightarrow H(BA, DC) \longleftrightarrow H(AB, DC)$$

H(AB, CD) ⟵⟶

قاعدة لغوية

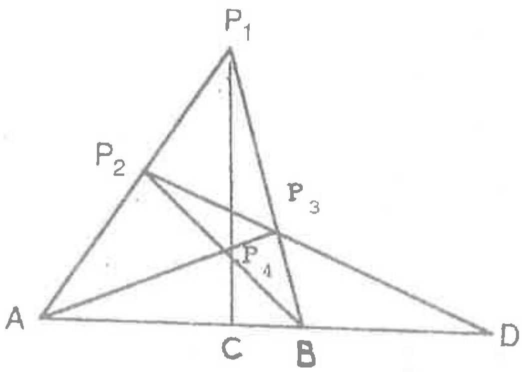
اذا كان H (AB, CD)، فانه يقال ان D النقطة التوافقية الرابعة للنقاط A, B, C، او هي المرافق التوافقي للنقطة C بالنسبة الى A و B.

من مبرهنة ٧، يستنتج اذا كانت D مرافق توافقي الى C بالنسبة الى A و B، فان C هي مرافق توافقي الى D بالنسبة الى A و B.

مبرهنة ٨

ليكن A, B, C ثلاث نقاط مختلفة على مستقيم l. فانه من الممكن ايجاد مرافق توافقي الى C بالنسبة الى A و B.

البرهان



شكل (١١٨)

لتكن P_1 نقطة لاتقع على l، نصل AP_1 ، ولتكن P_2 نقطة على AP_1 بحيث ان $A \neq P2$ و $P_1 \neq P_2$. نصل CP_1 ، BP_2 ، و $BP1$. لتكن

$$P_4 = CP_1 \cap BP_2$$
$$P_3 = AP_4 \cap BP_1$$

فان $(P_1 P_2 P_3 P_4)$ هو رباعي الزوايا المطلوب، وفيه A و B نقطتين قطريتين و C نقطة على الضلع P_1P_4.

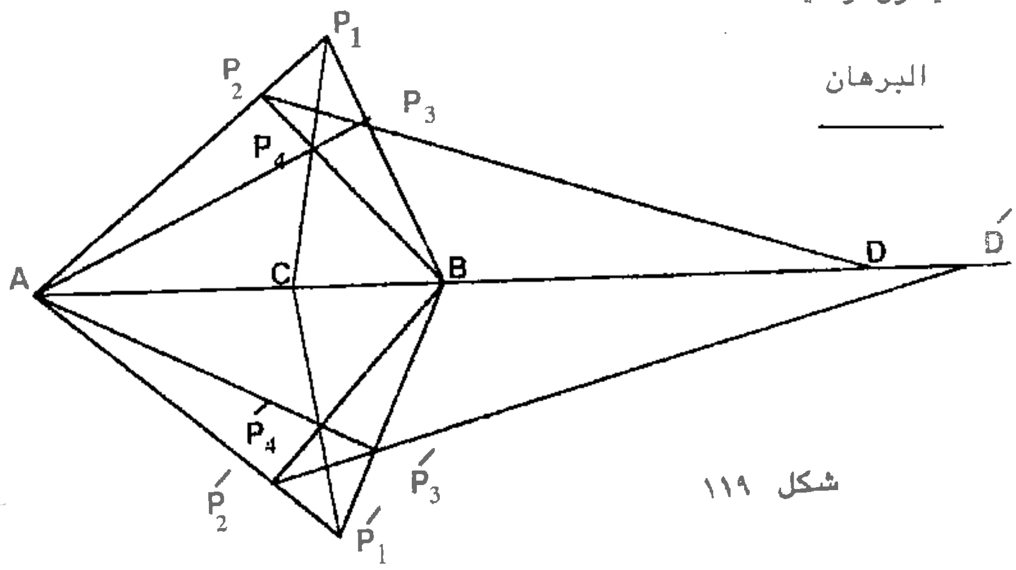
لتكن $D = P_2P_3 \cap l$

فتكون D هي المرافق التوافقي الى C بالنسبة الى A و B.

مبرهنة ٩ للطلاب

لتكن A, B, C ثلاث نقاط على مستقيم l، فان المرافق التوافقي للنقطة C بالنسبة الى A و B يكون وحيدا.

البرهان



شكل ١١٩

من مبرهنة ٨، لتكن D مرافق توافقي الى C بالنسبة الى A و B فيوجد رباعي زوايا تام $(P_1P_2P_3P_4)$.

لتكن 'D مرافق توافقي الى C بالنسبة الى A و B، فيوجد رباعي زوايا تام آخر $(P'_1P'_2P'_3P'_4)$ حيث ان

$$A = P_1P_2 \cap P_3P_4 = P'_1P'_2 \cap P'_3P'_4$$
$$B = P_1P_3 \cap P_2P_4 = P'_1P'_3 \cap P'_2P'_4$$
$$C = P_1P_4 \cap 1 = P'_1P'_4 \cap 1$$
$$D = P_2P_3 \cap 1, \; D' = P'_2P'_3 \cap 1$$

يجب ان نبرهن ان $D = D'$

من ثنائية بديهية ٦،

بما ان

$$\Delta P_1P_3P_4 \overset{O}{\underset{\Lambda}{=}} \Delta P'_1P'_3P'_4 \longleftarrow \Delta P_1P_3P_4 \overset{1}{\underset{\Lambda}{=}} \Delta P'_1P'_3P'_4$$
$$\Delta P_1P_2P_4 \overset{M}{\underset{\Lambda}{=}} \Delta P'_1P'_2P'_4 \longleftarrow \Delta P_1P_2P_4 \overset{1}{\underset{\Lambda}{=}} \Delta P'_1P'_2P'_4$$
$$O = P_1P'_1 \cap P_3P'_3 \cap P_4P'_4$$
$$M = P_1P'_1 \cap P_2P'_2 \cap P_4P'_4$$
$$O = M \Longleftarrow$$

لذلك،

$$\Delta P_2P_3P_4 \overset{O}{\underset{\Lambda}{=}} \Delta P'_2P'_3P'_4$$

ومن بديهية ٦، النقطة $P_2P_3 \cap P'_2P'_3$ تقع على خط واحد مع النقطتين A و B، حيث ان

$$A = P_3P_4 \cap P'_3P'_4$$

و

$$B = P_2P_4 \cap P'_2P'_4$$

لكن $AB = l$ ، لذلك

$$P_2P_3 \cap P'_2P'_3 \in l$$
$$l \cap P_2P_3 = D$$

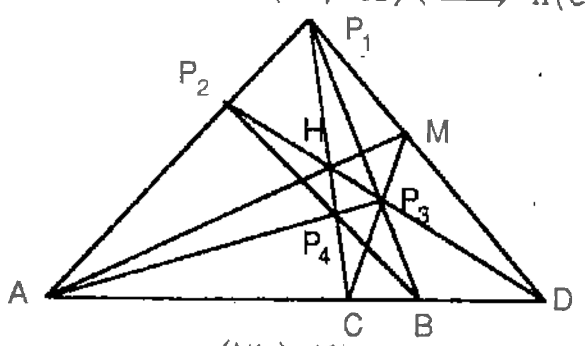
، $l \cap P'_2P'_3 = D'$

$\longleftarrow$ $D = D'$

مبرهنة ١٠.

$$H(AB, CD) \longleftrightarrow H(CD, AB)$$

البرهان



شكل (١٢٠)

يمكن ان تبرهن هذه المبرهنة بايجاد رباعي زوايا تام الذي فيه C, D نقطتين قطريتين.

$H(AB, CD)$ $\longleftarrow$ يوجد رباعي زوايا تام $(P_1\ P_2\ P_3\ P_4)$ بحيث ان :

$$A = P_1P_2 \cap P_3P_4$$
$$B = P_1P_3 \cap P_2P_4$$
$$C = P_1P_4 \cap l$$
$$D = P_2P_3 \cap l$$

حيث ان A, B, C, D تقع على المستقيم l. نصل P_3C و P_1D.

لتكن
$$M = P_3C \cap P_1D$$
$$H = P_1P_4 \cap P_2P_3$$

من الواضح ان $\Delta P_2P_4H \overset{l}{\underset{\wedge}{=}} \Delta P_1P_3M$

لان
$$B = P_2P_4 \cap P_1P_3$$
$$C = P_4H \cap P_3M$$
$$D = P_2H \cap P_1M$$

وان B, C, D على l.

من ثنائية بديهية ٦ ، يكون ΔP_2P_4H و ΔP_1P_3M منظورين من نقطة. بما ان $A = P_1P_2 \cap P_3P_4$ ، فان MH يمر من A. بهذا يكون عندنا رباعيٌ زوايا تام $(P_1H P_3M)$ ، وفيه $D = P_1M \cap P_3H$, $C = P_1H \cap P_3M$ و $A = MH \cap l$ و $B = P_1P_3 \cap l$

ومن هذا نستنتج ان $H(CD, AB)$ وبنفس الطريقة نبرهن الاتجاه الآخر.

نتيجة

$$H(AB, CD) \longleftrightarrow H(CD, AB) \longleftrightarrow H(CD, BA)$$
$$\longleftrightarrow H(DC, BA) \longleftrightarrow H(DC, AB) \longleftrightarrow$$
$$H(AB, DC) \longleftrightarrow H(BA, DC) \longleftrightarrow H(BA, CD)$$

١١-٥ تمارين

١- برهن ان النقاط لمجموعة توافقية تكون مختلفة.

٢- من مبدأ الثنائية، عرف مجموعة توافقية من

مستقيمات.

٣- لتكن ثلاثة مستقيمات تمر بنقطة، جد المستقيم الرابع بحيث ينتج مجموعة توافقية من مستقيمات.

٤- برهن ان القطع الخطي لرباعي زوايا تام المتعين من مستقيم يحتوي على نقطة قطرية واحدة فقط هو حزمة من خمس نقاط.

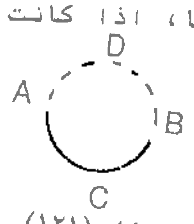
١١-٦ بديهيات الفصل *(Separation Axioms)*

نعرف مما تقدم ان المستقيم في المستوي الاسقاطي يحتوي على اربع نقاط في الاقل. وجود نقاط اكثر على المستقيم يتطلب بديهيات اضافية.

مجموعة جديدة من بديهيات تضمن وجود عدد غير منته من النقاط على المستقيم ترتبط مع المفهوم العام "للفصل" الذي نعرفه في حياتنا اليومية في حالات مثل غرفة في بيت تفصل عن غرفة اخرى بحائط، دولتين تفصل بينهما حدود دولية، قطعة من خيط تفصل الى جزئين بقطع واحد، او سلك دائري يفصل الى قطعتين بقطعين.

على المستقيم الاقليدي، نقطة واحدة C تفصل نقطة A من نقطة B بالمفهوم الذي فيه البداية من اي نقطة والتحرك باستمرار في نفس الاتجاه والمرور بالنقطة C.

هذا الوضع يختلف تماما، اذا كانت النقاط على دائرة



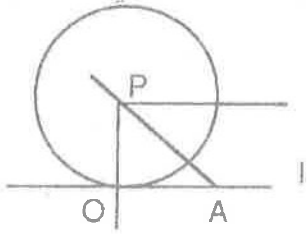
شكل (١٢١)

حيث ان A و B نهايتا قطعتان مختلفتان: واحدة، القطعة

بالخط الغامق، والاخرى، القطعة المنقطة. اذا كانت C في القطعة بالخط الغامق، يمكن التحرك من A الى B على القطعة المنقطة بدون المرور من C. لكن اذا وجدت نقطة D على هذه القطعة المنقطة، لايمكن التحرك من A الى B في اي اتجاه بدون المرور من واحدة او اخرى من النقطتين C او D.

هذا يعني ان نقطتين بدلا من واحدة تتطلب لفصل نقطتين على دائرة من زوج آخر من النقاط على الدائرة.

نفرض ان O نقطة على مستقيم l في المستوي الاقليدي و P مركز دائرة تمس l في O (كما في الشكل). فان اي مستقيم يمر من P يكون زاوية θ، $\theta \neq 90^\circ$ ، مع PO يقطع l في نقطة A. المستقيم الذي يصنع زاوية θ، $\theta = 90$ مع PO يكون موازيا الى l ومن ثم لايقطع l. ان هذا يفتقر الى تناظر متباين بين المستقيمات التي تمر من P ونقاط المستقيم I مثل عدم وجود جسر من جهة واحدة على نهر الى الجهة الاخرى. لاتوجد طريقة بواسطتها النقطة A تتحرك على المستقيم الاقليدي I الى يمين النقطة O وتستطيع الوصول الى نقطة في يسار O.



شكل (١٢٢)

في المستوي الاسقاطي، يختلف الوضع تماما. حيث يوجد جسر الى الجهة الاخرى، اذ كل مستقيم يمر من نقطة P للمستوي الاسقاطي يقطع l في نقطة A، و A تتحرك باستمرار من نقطة O، مستمرة في نفس الاتجاه، من الممكن ان ترجع A في آخر الامر الى نقطة البداية O

بالضبط كما لو كانت تتحرك على دائرة.
لذلك، المستقيم في المستوي الاسقاطي له خاصية دائرة، حيث يكون مثل منحني مغلق.
ان هذا يقودنا لفهم البديهيات التالية التي تتعلق بعلاقة اولية (غير معرفة) تدعى (الفصل). هذه البديهيات تصف ترتيب النقاط على دائرة، اي ان الفصل يكون لزوج من نقاط بزوج من نقاط.

رمز

الرمز AB / CD يستعمل ليرمز للفصل لزوج من نقاط A, B بزوج من نقاط C, D.

بديهيات الفصل(Separation Axioms)

بديهية ٧

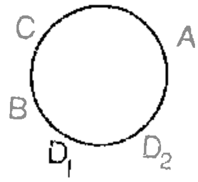
الزوجان A, B و C, D لمجموعة توافقية من النقاط احدهما يفصل الآخر.
بتعبير آخر؛ اذا كان H(AB, CD)، فان AB / CD.

بديهية ٨

اذا كان الزوجان A, B و C, D_1 احدهما يفصل الاخر وكذلك الزوجان A, D_1 و B, D_2 احدهما يفصل الآخر، فان الزوجين A, B و C, D_2 احدهما يفصل الآخر.
بتعبير آخر: اذا كان AB / D_1C
و AD_1 / D_2B
فان AB / CD_2

بديهية ٩

اذا كان الزوجان A, B و C, D احدهما يفصل الآخر، فان A, B, C, D نقاط مختلفة



شكل (١٢٣)

والان يمكن ان نعرف قطعة لمستقيم اسقاطي:

تعريف ١١

لتكن A,B,C ثلاث نقاط معلومة على المستقيم l، فان مجموعة كل النقاط X بحيث ان AB//CX هي قطعة المستقيم التي تكون A و B نهايتيها. الرمز AB//C يستعمل ليرمز لقطعة لاتحتوي النقطة C.

مبرهنة ١١

القطعة AB // C هي مجموعة غير خالية.

البرهان

لتكن A, B, C ثلاث نقاط على مستقيم l.
من مبرهنة ٨، يمكن ايجاد نقطة D التي هي مرافق توافقي الى C بالنسبة الى A و B. هذا يعني، H(AB, CD) ، ومن بديهية ٧، AB / CD

ومن ثم، تقع D على قطعة المستقيم AB//c.

تعريف ١٢

مجموعة من نقاط $D_1, D_2, \ldots, D_n$ على مستقيم l يحتوي على ثلاث نقاط معلومة A, B, C تكون متتابعة توافقية (harmonic seqence) اذا كانت نقطة D_1 هي مرافق توافقي لواحدة من النقاط A, B, C بالنسبة الى النقطتين الاخريتين.

واي نقطة تتبع نقطة D_1 هي مرافق توافقي لاي واحدة من النقاط التي تسبقها من المتتابعة بالنسبة الى نقطتين آخريتين تسبقها في المتتابعة.

ان بديهيات الفصل ستستعمل الان لبيان ان المستقيم في المستوي الاسقاطي يحتوي على عدد غير منته من النقاط $D_1, D_2, \ldots, D_n$ التي تكون متتابعة توافقية بالاعتماد على تعريف ١٢.

مبرهنة ١٢

كل مستقيم في المستوي الاسقاطي يحتوي على عدد غير منته من نقاط.

البرهان

لتكن A, B, C ثلاثة نقاط معلومة على مستقيم معلوم l. من مبرهنة ٨، يمكن ايجاد نقطة D_1 بحيث ان $H_1(AB, CD_1)$

وكذلك توجد نقطة D_2 بحيث ان $H_2(AD_1, CD_2)$ ،

وهكذا نستمر، فتوجد نقاط $D_3, \ldots, D_n$ على l بحيث ان $H_3(AD_2, D_3D_1), \ldots, H_n(AD_{n-1}, D_n D_{n-2})$

يجب ان نبين ان كل نقطة D_j من المتتابعة التوافقية $A, B, C, D_1, D_2, D_3, \ldots, D_n$ تختلف عن النقطة التي تسبقها. لعمل ذلك، يكفي ان نبين انه لاي عدد صحيح $1 < j \leq n$ ، فان D_j تختلف عن D_r ، حيث $1 \leq r < j$.

من بديهية ٧، نستنتج العلاقات التالية:

$(1) \ldots \quad AD_j \ / \ D_{j+1} \quad D_{j-1}$

$(2) \ldots \quad AD_{j-1} \ / \ D_j \quad D_{j-2}$

$(3) \ldots \quad AD_{j-2} / \ D_{j-1} \quad D_{j-3}$

$(K) \ldots \quad AD_{j-k+1} \quad / \ D_{j-k+2} \quad D_{j-k} \quad \ldots\ldots (k)$

من (1) وبديهية ٩، $D_j \neq D_{j-1}$

من (1) و (2) وبديهية ٨،

$(K+1) \ldots \quad AD_j \ / \ D_{j+1} \quad D_{j-2}$

ومن بديهية ٩، $D_j \neq D_{j-2}$

من (2) و (3) وبديهية ٨،

$(K+2) \ldots \quad AD_{j-1} \ / \ D_j \ D_{j-3}$

والتي مع (1) وبديهية ٨، يكون

$(K+3) \ldots \quad AD_j \ / \ D_{j+1} \quad D_{j-3}$

ومن بديهية ٩، $D_j \neq D_{j-3}$

بنفس الطريقة، يمكن ان نبين باستعمال k من العلاقات، حيث $k = j-1$ وبديهية ٨، يكون

$AD_j \ / \ D_{j+1} \ D_1$

ومن بديهية ٩، $D_j \neq D_1$

من هذا نستنتج ان النقاط $D_1, D_2, \ldots, D_n$ مختلفة.

وبما ان عدد هذه النقاط غير منته، فان المستقيم l يحتوي على عدد غير منته من النقاط، وبما انه يمكن ايجاد تناظر متباين بين المستقيم l واي مستقيم آخر في المستوي، فان اي مستقيم يحتوي على عدد غير منته من النقاط.

١١-٧ بديهية الاستمرارية (A Continuity Axiom)

مع كل نقطة في الهندسة الاسقاطية يقرن عددا يدعى احداثي النقطة بدون استخدام مفهوم المسافة. سنقدم هذا في الفصل القادم. على كل حال، ملاحظات قليلة عن هذا الربط تحث على اضافة البديهية الاخيرة للبديهيات الحالية.

في برهان المبرهنة ١٢، لقد وجدت النقاط $D_1, D_2, \ldots, D_n$ على المستقيم l الذي يحتوي النقاط المعلومة A, B, C. من الممكن ايجاد تناظر متباين بين هذه النقاط ومجموعة الاعداد الصحيحة.

$-r, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n$.

اولا، الاحداثيات $0, 1, \infty$ نقرنها على التوالي مع النقاط A, B, C، ومن ثم النقاط المتعاقبة $D_1, D_2, \ldots, D_n$ تقرن على التوالي مع الاحداثيات $2, 3, \ldots, n+1$ هذا يعني، اذا كانت، النقطة تناظر العدد الصحيح n يرمز لها $P(n)$، $P(1)$ هي مرافق

توافقي الى $P(\infty)$ بالنسبة الى $P(0)$ و $P(2)$، $P(3)$ هي المرافق التوافقي الى $P(\infty)$ بالنسبة الى $P(2)$ و $P(4)$، وهكذا. كذلك $P(0)$ هي المرافق التوافقي الى $P(\infty)$ بالنسبة الى $P(-1)$ و $P(1)$.

$P(-1)$ هي المرافق التوافقي الى $P(\infty)$ بالنسبة الى $P(-2)$ و $P(0)$ والخ.

اذا كان n احداثي $P(n)$، نجد برسم الشكل ان النقاط $P(0),\ P(1),\ P(2),\ P(3),\ \ldots\ldots$ ليست متساوية البعد فيما بينهما كما عندما الاحداثي يمثل المسافة من نقطة ثابتة على الخط.

توجد فجوات بين النقاط في الشكل. اذا وجدت نقاط بينهما، كما نرغب مستقبلا، فان وجودها يجب ان يؤكد بديهيا.

ستملأ هذه الفجوات في ولكل عدد نسبي m/n ، حيث m, n عددين صحيحين موجبين، يناظر نقطة $P(m/n)$ على الخط. المجموعة الجديدة من النقاط تدعى الشبكة النسبية المتعينة من النقاط الثابتة $P(0), P(1), P(\infty)$.

ان هذه العملية لاتزود لنقاط $P(x)$ ، حيث ان X عدد غير نسبي، ولذلك سنأخذ البديهية الاخيرة – بديهية الاستمرارية – التي تخص هذا الموضوع، والتي تتضمن نظام الاعداد الحقيقية الموسع الذي يحتوي مجموعة الاعداد الحقيقية مع ∞ و$-\infty$.

بديهية ١. (بديهية الاستمرارية)

يوجد مستقيم اسقاطي l يحتوي على مجموعة من نقاط متشاكلة تقابليا (isomorphic) مع مجموعة اعداد لنظام الاعداد الحقيقية الموسع.

من هذه البديهية من الممكن ايجاد تناظر متباين بين نقاط المستقيم الاسقاطي واعداد نظام عددي هو

نظام الاعداد الحقيقية.
نقرن العدد X مع نقطة P للمستقيم يدعى احداثي النقطة. ويرمز للنقطة P(X).
عندما يستخدم نظام الاعداد الحقيقية، فان النقطة P(x) يقال عنها حقيقية، والنقطة التي تقرن مع الرمز ∞ تدعى عادة النقطة المحاذية P(∞) للمستقيم.
مجموعة الاعداد الحقيقية الموسعة غير مناسبة في الهندسة الاسقاطية طالما المستقيم في الهندسة الاسقاطية له خاصية دائرة. بدلا من ذلك، نأخذ {R,∞} التي نحصل عليها بأخذ $\infty = -\infty$.
وبذلك، فان المستوي الاسقاطي يحتوي على مستقيم يتضمن مجموعة نقاط متشاكلة تقابليا مع المجموعة {R,∞}.

١١-٨ المنظورية والاسقاطية (Perspectivity and Projectivity)

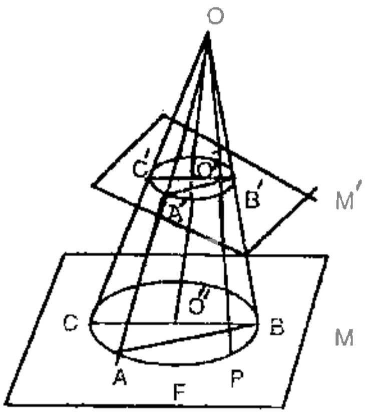
ان هدف الهندسة الاسقاطية هو دراسة الخواص الهندسية لشكل يسقط من نقطة ما الى شكل آخر.
نفرض ان شكلا F يتضمن دائرة في مستوي M ومستقيم يقطع الدائرة في نقطتين A, B. فانه، اذا وصلنا كل نقطة من الشكل F بنقطة O لاتقع على M بخط مستقيم، مستوي آخر M' سيقطع كل من هذه الخطوط بنقطة.
الشكل الناتج F' من نقاط هو صورة، او اسقاط الشكل الاصلي.
من هذه العملية، يوجد تناظر بين نقاط F ونقاط F' بحيث كل نقطة من شكل تناظر نقطة واحدة فقط من الشكل الآخر.
اذا اسقط F' من نقطة اخرى O' الى مستوي ثالث، فانه ينتج شكلا جديدا F''، ويوجد ايضا تناظر

متباين بين 'F و ''F ، ومن ثم بين F و ''F. هذا التناظر الاخير يدعى تناظر اسقاطي.

التناظر الاسقاطي الخاص الذي فيه الخطوط الواصلة بين النقاط المتناظرة تلتقي بنقطة واحدة يدعى منظوريا.

بهذا، كل المنظوريات هي تناظرات اسقاطية، لكن ليس كل التناظرات الاسقاطية هي منظوريات.

نختبر الشكلين F و 'F لملاحظة الخواص التي لاتتغير بالاسقاط. الخط المستقيم AB في F يناظر الخط المستقيم 'A'B في 'F ، والخطان، مثل AB و AP المتقاطعين يكونا بعد اسقاطهما خطين متقاطعين. وكذلك، نقاط على خط، مثل، C, O'', B تسقط الى نقاط 'C', O', B ، والتي تقع ايضا على خط، لذلك النقاط المستقيمة والخطوط المتقاطعة هي خواص لشكل لايتغير بالاسقاط.



شكل (١٢٤)

تدعى هذه خواص اسقاطية كما في التعريف التالي:

تعريف ١٣

خاصية شكل لاتتغير باي اسقاط تدعى خاصية اسقاطية.

طول قطعة مستقيم ليس له صفة اسقاطية.

مسافة، طول، زاوية، ومساحة، كل هذه مفاهيم قياسية ومبرهنات تتعلق بهذه المفاهيم تدعى مبرهنات قياسية، فمثلا، مبرهنة فيثاغورس هي قياسية، كما في معظم مبرهنات الهندسة الاولية.

تصنف الاشكال الى نوعين: اسقاطية او قياسية. فمثلا، المثلث هو شكل اسقاطي، طالما المثلث يسقط الى مثلث، على فرض ان مركز الاسقاط لايقع في مستوي المثلث. مثلث متساوي الساقين، ربما يسقط الى مثلث غير متساوي الساقين وكذلك المثلث المتساوي الاضلاع، لذا هي قياسية، ليست اسقاطية. كذلك، بما ان بعض الدوائر تسقط الى اهليلج، فالخاصية كونها دائرة ليست اسقاطية. ان الهندسة الاسقاطية بالاساس تتعلق بالاشكال التي لها خواص اسقاطية اي الاشكال التي لاتتغير بعملية الاسقاط.

تعريف ١٤

شكلان F و F' في π يكونان منظورين من نقطة O اذا كانت النقاط في F في تناظر متباين مع نقاط F' بحيث ان كل المستقيمات الواصلة بين النقاط المتناظرة تمر بنقطة O، التي هي مركز المنظورية.

يرمز لهذا بالرمز

$$F \overset{O}{\underset{\wedge}{=}} F'$$

ثنائي تعريف ١٤

شكلان F و 'F يكونان منظورين من مستقيم l اذا كانت المستقيمات في F في تناظر متباين مع مستقيمات 'F بحيث ان نقاط تقاطع المستقيمات المتناظرة تقع على المستقيم l، يدعى l محور المنظورية.

يمكن ان يعبر عن هذا بالرمز:

$$F \underset{\overline{\overline{\wedge}}}{\overset{l}{}} F'$$

فمثلا، في تعريف ١٤ ، ليكن

$F = \{ A, B, C, \ldots \in l\}$

$F' = \{A', B', C', \ldots \in m\}$

وان $F' \underset{\overline{\overline{\wedge}}}{\overset{O}{}} F$ بحيث ان A تناظر 'A، B تناظر 'B، وهكذا، فاننا نكتب:

$$A, B, C, \ldots \underset{\overline{\overline{\wedge}}}{\overset{\cap}{}} A', B', C', \ldots$$

يؤدي هذا الى:

$AA' \cap BB' \cap CC' \cap \ldots = O$

بنفس الطريقة، اذا كان F = l و F' = m ، فان

$$l \underset{\overline{\overline{\wedge}}}{\overset{O}{}} m$$

يعني ان نقاط l تكون في حالة تناظر مع نقاط m والمستقيمات الواصلة بين النقاط المتناظرة تمر بنقطة O.

كذلك يرمز $l \underset{\overline{\overline{\wedge}}}{\overset{O}{}} m$ للتطبيق من l الى m بحيث ان

صورة $P \in l$ هي النقطة $OP \cap m \in m$.

من الواضح انه اذا كان $l \cap m = X$ و $l \overset{O}{\bar{\bar{\wedge}}} m$

فان نقطة التقاطع X تناظر نفسها، اي ان صورة X بموجب هذا التطبيق هي النقطة $X \in m$.

يؤدي هذا ايضا الى ان المنظورية تكون دائما في تناظر متباين وشامل، وان معكوسها يكون منظوريا ايضا. جد مثالا حول المنظورية من مستقيم.

لتكن l, m, n مستقيمات بحيث ان

$$l \overset{O}{\bar{\bar{\wedge}}} m \quad و \quad m \overset{O'}{\bar{\bar{\wedge}}} n$$

سنرمز للتطبيق من l الى n بالرمز :

$$l \mathrel{\bar{\wedge}} n$$

الذي نحصل عليه من تركيب منظوريتين، اي ان صورة $P \in l$ هي النقطة $O'P' \cap n \in n$، حيث ان $P' = OP \cap m$

ان التطبيق $l \mathrel{\bar{\wedge}} n$ ليس منظوريا، لان المستقيمات الواصلة بين النقاط المتناظرة مثل P, P' ربما لاتمر من نقطة مشتركة. ان هذا التطبيق يدعى اسقاطيا.

تعريف ١٥

الاسقاطية هي تطبيق لمستقيم l الى مستقيم n يعبر عنه كتركيب لسلسلة منتهية منظوريات.

بما ان المنظوريات دائما متباينة وشاملة، فانه من الواضح ان الاسقاطية تكون كذلك.

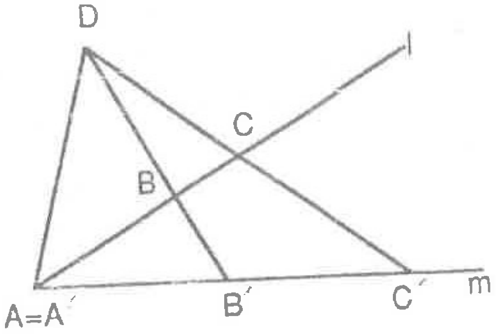
مبرهنة ١٣ العلاوي

لتكن A, B, C ثلاث نقاط مختلفة على مستقيم l

و 'C', B', C ثلاث نقاط مختلفة على مستقيم m، فانه توجد اسقاطية $l \bar{\wedge} m$ بحيث ان A تناظر 'A، B تناظر 'B، و C تناظر 'C.

البرهان

الحالة (١)

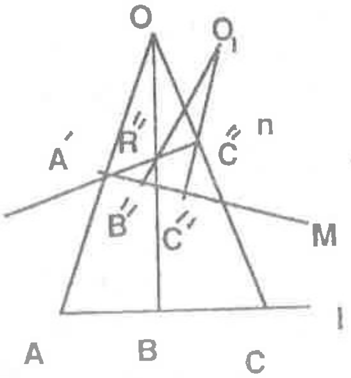


شكل (١٢٥)

اذا كان $A = A'$
نصل 'B, B و 'C, C ولتكن O نقطة تقاطع 'BB و 'CC.

فان $A', B', C' \overset{O}{\bar{\bar{\wedge}}} A, B, C$

الحالة (٢)



(شكل ١٢٦)

$l \neq m$ ولاتوجد اي نقطة من هذه النقاط مشتركة بين l و m.
لتكن O نقطة على المستقيم 'AA، و n مستقيما يختلف

عن كل من 1 و m ويحتوي على 'A.

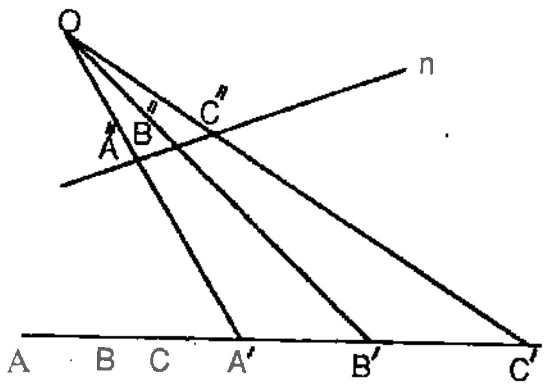
من O تسقط B, C الى n لذلك "C" ,B هما النقطتين المناظرتين على n. نصل "B', B و "C', C و لتكن $O_1 = B'B'' \cap C'C''$، فان

$$A\ B\ C \ \overset{O}{\underset{\wedge}{=}}\ A'\ B''\ C'' \ \overset{O_1}{\underset{\wedge}{=}}\ A'B'C'$$

لذلك

$$A\ B\ C \ \overline{\overline{\wedge}}\ A'\ B'\ C'$$

الحالة (٣)



شكل (١٢٧)

اذا كان $l = m$

ليكن n مستقيما يختلف عن I. نأخذ نقطتين A'',B'' على n

ولتكن $O = A'A'' \cap B'B''$

نصل OC ، ولتكن $C'' = OC' \cap n$

لذلك، $A''\ B''\ C'' \ \overset{O}{\underset{\wedge}{=}}\ A'\ B'\ C'$

مثال

لتكن A, B, C, D اربع نقاط مختلفة على مستقيم

1. جد الاسقاطية $ABC \,\bar{\wedge}\, ACD$ وجد النقطة التي تناظر اي نقطة P على l بموجب هذه الاسقاطية.

ليكن l و m مستقيمين يمران من A.

لتكن B', C' نقطتين آخريتين على m.

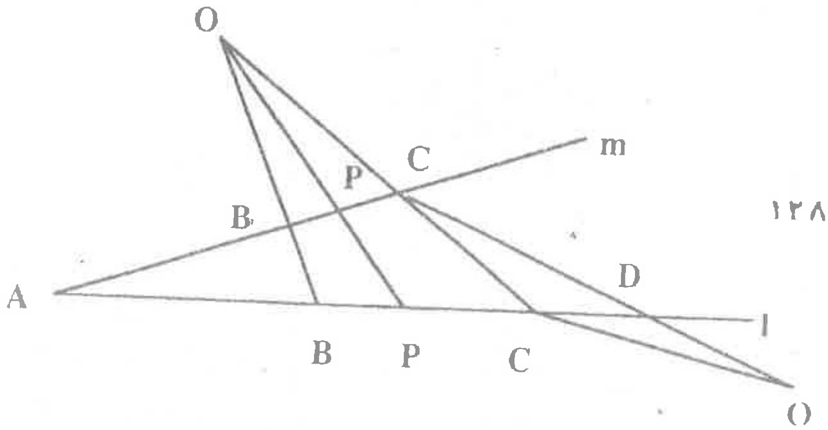
لتكن $O = BB' \cap CC'$

لذلك $ABC \xrightarrow[\overline{\wedge}]{O} AB'C'$

لتكن $O' = B'C \cap C'D$

فان $AB'C' \xrightarrow[\overline{\wedge}]{O'} ACD$

اي ان $ABC \xrightarrow[\overline{\wedge}]{O} AB'C' \xrightarrow[\overline{\wedge}]{O'} ACD$



شكل ١٢٨

بتطبيق الحالة ٢،

$ABC \;\pi\; A''B''C''$

لذلك، فان

$ABC \;\pi\; A'B'C'$

ومن هذا نستنتج ان $ABC \bar{\wedge} ACD$
النقطة المناظرة الى P هي النقطة $l \cap O'P'$ حيث
$P' = m \cap OP$.

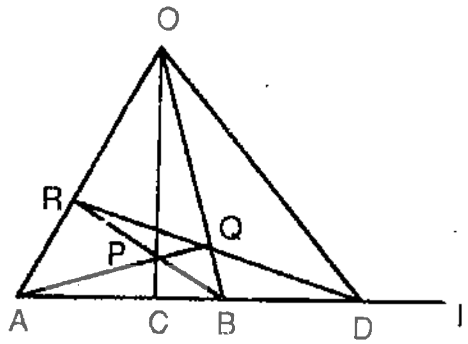
مبرهنة ١٤

اذا كانت A, B, C, D تكون مجموعة توافقية من نقاط على مستقيم l، فان القطع النقطي الى H(AB, CD) من نقطة O لاتقع على l هو مجموعة توافقية من مستقيمات.

بتعبير آخر:

المستقيمات التي تصل مجموعة توافقية من نقاط A, B, C, D على مستقيم l ونقطة O لاتقع على l هي مجموعة توافقية من مستقيمات.

البرهان



شكل(١٢٩)

لتكن A, B, C, D نقاط على l بحيث ان H(AB,CD) . ولتكن O نقطة لاتقع على l.

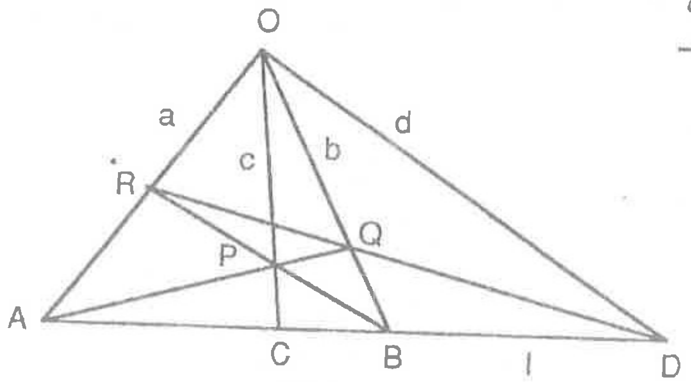
نرسم من A خطا يقطع OC و OB في نقطتين P و Q، على التوالي. وليكن BP يقطع OA في نقطة R. فانه يتكون رباعي زوايا تام (PQRO) وقطريه A و B حيث ان $A = PQ \cap OR$ ،$B = PR \cap OQ$ و$C = Op \cap l$. بما ان

النقطة التوافقية الرابعة وحيدة، فان RQ يمر من D، المستقيمات AD, AQ, RD, BR تكون رباعي اضلاع؛ وفيه:
OA و OB خطين قطريين، بما ان OC و OD هما المستقيمان الواصلان بين O والراسين P و D، على التوالي، فان المستقيمات OA, OB, OC, OD تكون مجموعة توافقية.

مبرهنة ١٥ (ثنائية مبرهنة ١٤)

اذا كانت a, b, c, d تكون مجموعة توافقية من مستقيمات تمر من نقطة O، فان نقاط تقاطع هذه المستقيمات مع مستقيم l لايمر من O هي مجموعة توافقية من نقاط.
بتعبير آخر:
نقاط تقاطع مجموعة توافقية من مستقيمات a, b, c, d تمر من نقطة O مع مستقيم l بحيث ان $O \notin l$ هي مجموعة توافقية من نقاط.

البرهان



شكل (١٣٠)

ليكن

$A = a \cap l$ ، $B = b \cap l$ ، $C = c \cap l$ و $D = d \cap l$

ليكن m خطا اخرا يمر من A.

لتكن $P = m \cap CO$ و $Q = m \cap BO$

وبذلك يكون عندنا رباعي اضلاع، اضلاعه:

AD, DQ, PQ, PB وقطريه OA و OB.

لذلك، فان الضلعين DQ و PB يتقاطعان في نقطة R على OA.

ويكون عندنا رباعي زوايا (PQRO)، وفيه A و B نقطتين قطريتين، والضلعين من النقطة القطرية الثالثة يقطعان l في النقطتين C و D.

لذلك A, B, C, D تكون مجموعة توافقية من نقاط.

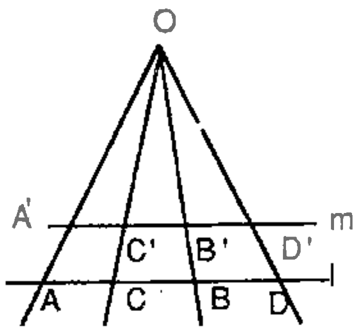
مبرهنة ١٦

الاسقاطية تحفظ الخاصية التوافقية

بتعبير آخر:

اسقاط مستقيم الى مستقيم آخر يرسل مجموعة توافقية من نقاط الى اية مجموعة اخرى توافقية من نقاط.

البرهان



شكل (١٣١)

لتكن A, B, C, D اربع نقاط على مستقيم l بحيث ان $H(AB, CD)$. ولتكن $l \overset{O}{\overline{\wedge}} m$

فان صور A, B, C, D هي A', B', C', D' ، على التوالي التي هي القطع الخطي للمستقيمات OA, OB, OC, OD من المستقيم m. اي ان

$A' = OA \cap m$ ، $B' = OB \cap m$

و $C' = OC \cap m$ ، $D' = OD \cap m$.

ليكن $a = OA$, $b = OB$, $c = OC$, $d = OD$

بما ان $H(AB, CD)$ ، فانه من مبرهنة ١٤، يكون $H(ab, cd)$

ومن مبرهنة ١٥، يكون $H(A'B', C'D')$.

بهذا فقد برهنا، اذا كان $H(AB, CD)$ و $A', B', C', D' \overset{O}{\overline{\wedge}} A\ B\ C\ D$ فان $H(A'B', C'D')$ ، اي ان المنظورية تحفظ الخاصية التوافقية. بما ان الاسقاطية هي ببساطة تركيب لسلسلة منتهية من منظوريات، فان الاسقاطية تحفظ الخاصية التوافقية.